

科學圖書大庫

大眾機率與統計

譯者 趙文敏 校閱 郭汾派

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

大眾機率與統計

譯者 趙文敏 校閱 郭汾派

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成為事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啟發，始能為蔚為大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啟導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏為監修人，編譯委員林碧鏗氏為編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分為叢書，合則大庫。為欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

校閱小言

面對複雜萬端之自然現象或層出不窮變化難測之社會現象；如何於其中提綱挈領地說明此等現象之可能，實有賴於“統計”。統計學原屬實用科學之一，凡屬實用科學叢書，其編纂自以能配合實際之應用爲貴。本書名爲“大衆機率與統計”，作者除力避深奧之理論，擷取與大衆生活有關之實用材料外，並於書中詳舉範例，於理論之介紹，皆以深入淺出之方式陳明之。縱初閱統計書籍者，對本書亦易吸收領會。故對初學者而言，本書實爲不可多得之入門良書；對一般已研習統計學者而言，本書更能增強其學習之興趣，並有助於其對基本原理更深入之認識。

譯者趙文敏君，師大數學系畢業，天資聰穎且勤奮好學。本書譯文讀來順暢無澗，堪稱“譯”“作”俱佳之好書，故本人樂於爲之校閱並推介。

郭汾派

五十九年九月

目 錄

校閱小言	Ⅲ
第 一 章 一個充滿着偶然的世界	1
第 二 章 樣本空間與事件	4
第 三 章 機率模型	16
第 四 章 計數與計算	34
第 五 章 與其他事件有關之事件	62
第 六 章 平均數與離均差	84
第 七 章 相關	107
第 八 章 母全體與樣本	129
第 九 章 僅有兩種可能結果之試行	138
第 十 章 常態分配	154
第十一章 葡萄乾，星辰，飛彈	167
第十二章 自然界之偶發性	173
參考書目	177
習題解答	178
索 引	192

第一章 一個充滿着偶然的世界

偶發性是一切事物之通性

“雖計劃極其周密，然一切仍難逆料”。Robert Burns（蘇格蘭詩人，1759-1796）一句話，正道出了偶發事件隨時會出現在日常生活之真相。吾人之所作所爲，即使是芝麻小事，偶發皆於其中扮演一份角色。甚至，更確切地說，偶發事件永遠地跟着吾人之腳步，由生而死。試看，嬰兒之出生，偶發性正是其因素之一。懷孕一事亦是一偶然事件，未出生之嬰兒之爲男或爲女，亦有各半之可能機會。機會甚至可幫助吾人選擇配偶，因爲多數之婚姻皆由偶然之邂逅而成。而就破壞方面而言，車禍，火警，地震，及水災等意外，不也正警告世人，偶發性甚至能決定結束吾人生命之時刻。

就工業活動而言，偶發事件或隨機事件也爲其中之重要角色。一部精心設計之機器固然是在多數時間內製造出優良產品，然而經常地亦有不良產品出現，而後者之產生事先可能毫無任何跡象，純粹是一種偶發性質。此一偶發事件之發生，固不爲吾人所喜然而却是無可避免。從另一方面言之，並非所有偶發事件皆不爲吾人所喜，如電話交換則不然。在平時，用戶使用電話之時間總是作隨機分佈，即散佈各時刻而不擁擠。總機也隨時愉快地爲用戶服務。而當暴風雪來臨總機已受干擾之際，用戶使用電話之時間也不再是任意分佈，幾乎是所有用戶皆在同一時刻使用。

不僅以上諸例而已，偶發性其實是宇宙特有之性質。雖然星群係有規律地組合而成銀河，然而在太空中銀河卻是任意地分佈。儘管宇宙綫是均勻而穩定地由太空流向地球，然而却可能受地球磁場之影響而散亂地射向地球表面上某特殊地區，可以任意地擊中此特殊地區上之各處。經常地，有某些動物或植物生殖細胞內之遺傳因子被宇宙綫擊中而發生改變。如此，動植物之遺傳性任意地發生變化，造成了子體與親體之差異。又如一滴看似平靜之水滴中，其內部之分子却四面八方地任意跳動，此即是在顯微鏡下才可見之布

朗運動。人類可見之光綫皆由光子所組成，各光子所作小幅度之運動其分量是完全任意，而造成此運動者又是電子由原子內高位能區任意進入低位能區所致。

人類不僅無法預知將出生之嬰兒是男是女，亦無法預測機器將製成者是優良產品或不良產品。甚至，一粒灰塵被水滴中分子擊中後將如何運動也非吾人事先所能預料者。凡此種種皆因其為偶發事件故不可預料。而且因偶發事件之普遍發生，吾人所能確實預知者只是；在吾人之一切所見所為中，經常會遇着意料以外之情況。

偶發性仍具某些規則

前節吾人雖闡明偶發事件隨時發生，但須注意者是偶發性雖常發生，但其發生並非表示一切毫無次序。譬如說，固然無人能先知道將出生之嬰兒是男是女，但吾人却可確信：在一整年內出生之嬰兒，其中男女孩之數目幾乎各有一半。又如：電話總機固然無法知道在某一分鐘內將有多少用戶呼叫電話，却可知道同一瞬間內呼叫電話的用戶最大數目約為多少，所以對此種情況大都有妥善之準備。又如：投擲一顆均勻骰子，吾人固然無法預知是否出現六點，但却可確信：在許多次投擲中，出現六點之次數約為全部次數之六分之一。此數例代表之意義是：對於一隨機事件，發生一次固然有各種無法預知之情況，然而在許多次之發生中，必可得出其中之某些規則。亦就是說，在重複之過程中，紛亂之情況會引出某種次序。隨機事件之發生，也如同可決定結果之事件一般，受某種規則之控制。而機率論之要務即在找尋這些規則。依賴所得規則之助，數學家與統計學家已有一些方法，能對那些不可預知之事作合理之推測。

似非而是之學科

在前節中吾人曾說明機率論之目的是：從不可確知之事件中得出某些確定之結論。從決定此目的之時，已看出機率論之內容充滿着似非而是的論點。因此，讀者若在此科目中找出某些奇怪之論點不必感到驚奇。當吾人介紹機率論之概念並以之解答某些問題時，倘若所得之答案很令人驚奇，讀者不必因之驚訝不置。類似此種情形，只要經驗多次，讀者自會發現，在機率論中許多意料之外者才真正是應預料將發生者。

機率論之啓蒙

機率論之數學理論起源於有關賭博之問題的研究。一位好賭博者，Chevalier de Méré，曾將此種問題就教於法國數學家 Pascal (1623-1662) 氏曾於 1654 年將此等問題及其所作之解答與 Fermat (法國數學家，1601-1665) 討論，於是數學上一門嶄新的理論因之問世。此後，又有許多著名的數學家對此科目之進展貢獻甚大。時至今日，原只是一位法國郎中之偶然雅興却產生一門精密的科學，此科學不僅在物理學，生物學及社會科學各方面皆有廣泛之應用，甚至與當代哲學中某些深奧之問題也發生了關聯。

讀者難免想知道，Chevalier de Méré 所就教於 Pascal 者是些什麼問題，在此吾人僅介紹其中一個稱為點數問題者如下：甲乙二人各出 32 元作賭，每贏一場者稱其贏得一點。兩人相約先贏得三點者為全勝，可得 64 元。又假定在每場賭賽中各人贏得一點之機會相同（如投擲一錢幣）。依此條件，

Chevalier de Méré 提出一個疑問，如果賭賽已開始而雙方都尚未贏得三點，但為他故決定不再比賽，則 64 元應如何分配，始為公平？

問題已提出，讀者可能想獨自解答此問題。有此意者且在未讀完本章之前立刻試著去作。而讀完第五章之後可再試着解答一次。Pascal 對此問題之答案及其推理方法吾人列於書末習題解答，讀者可參看比較之。

統計之機率

機率問題之研究與發展，至於今日，已有兩種不同之觀點。其一為主觀性機率，此觀點中所謂機率是：對於證據不足之結論，所謂此結論為真之機率就是吾人對此結論之信賴程度的一種測度。另一觀點為物理性機率或統計之機率。此觀點中所謂機率則是：對於某實驗之一可能之結果，此可能結果發生之機率乃是當此實驗重覆許多次時，該可能結果發生之相對次數（發生之次數與實驗次數之比）。至於純數學觀點中之機率論，則係由統計之機率中抽象化而得，當然又與前二者不同。與近世代數，近代幾何相同地是，最新形式之機率論也以集合論為其基礎。此種統計之機率的進展，本世紀前廿五年內以 R. A. Fisher 與 R. von Mises 二人之貢獻最大。至於將集合論應用於機率論中，則是 1933 年 A. Kolmogoroff 之成就。本書所要介紹的是：以集合論為基礎之機率論與統計之機率的應用等初步概念。另於第十二章中，對於前述兩種機率的關係作了一番說明。

第二章 樣本空間與事件

樣本空間

投擲一骰子是一種會產生偶然事件的簡單實驗，當骰子靜止下來，其頂端之面必出現 1, 2, 3, 4, 5 或 6 等六者之一。如果吾人提出一問題，“此骰之頂面出現什麼數？”則此問題有六種可能的答案。每一個可能的答案都是此實驗之可能的結果之一。則集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 稱爲此實驗之樣本空間。其中每一元素代表實驗之一可能結果。

如果吾人換另一問題，“出現於骰子頂面者是偶數或奇數？”此問題只有兩種可能的答案。於是，對於此問題，此實驗只有兩種可能的結果。則投擲一骰之實驗中，集合 $\{\text{奇數}, \text{偶數}\}$ 亦爲一個樣本空間。倘若吾人再換一個問題，“出現於骰子頂面者是不是么點？”則對於此問題，吾人又可得出此實驗的第三個樣本空間， $\{\text{么點}, \text{非么點}\}$ 。

吾人不必取一骰子做投擲之實驗來研究其可能之結果。僅須以想像代之可矣！假想一骰已被擲下而（針對吾人心中已想妥之問題）將可能之結果予以逐項分開即可。因此，所謂實驗只是概念性而已。依此觀念，吾人得下一定義：一個實際的或概念性的實驗之樣本空間乃是表示此實驗之一切可能結果的符號新成之集合，其中每一可能之結果都是針對某一特別問題之一可能答案，而作一實驗其所得之結果必是此集合之一且僅一個元素。

前述擲骰之例說明了一實驗可有許多不同之樣本空間。而各樣本空間之建立一方面是依吾人作實驗時心中想妥之問題，他方面也受另一種因素之影響。舉例言之，若吾人以 $\{\text{奇數}, \text{偶數}\}$ 作爲擲一骰子之樣本空間，亦即每一次擲骰記下其爲奇或偶。則對於此一問題“每擲一次其頂面出現何數？”。前述之記錄遂無法作答。反言之，若吾人以 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 作爲樣本空間，即每一次擲骰吾人記下其頂面出現之數值。則此記錄却可回答類以“出現於頂面者是偶數或奇數？”之問題。故對於擲一骰子之實驗，以

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 為樣本空間實較 $\{\text{奇數}, \text{偶數}\}$ 為佳。因前者可用以回答更多的有關實驗的問題。一樣本空間之各可能結果分類愈細，此樣本空間之用途愈大。因此在討論有關實驗結果之機率的問題時，吾人必選取一足夠精細之樣本空間，使之可用以回答一切可能被提出之問題。

其次，並非將一實驗之某些可能結果列出就可構成一樣本空間。例如，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, \}$ 不是擲一骰子之實驗的樣本空間，因為儘管 6 是此實驗之一可能結果，此集合中却無元素與之對應。而集合 $\{\text{奇數}, \text{偶數}, \text{么點}\}$ 也不是此實驗之一樣本空間，因為結果之一的 1 與集合中兩個元素對應，即，奇數與么點。

當吾人投擲一錢幣，此幣可能出現正面於其上，亦可能出現反面。當然也可能發生錢幣豎立或靠上某物使之未俯倒之情形，後者之情形吾人不予放慮而重作投擲。因此，投擲一錢幣之實驗只有兩種可能之結果。若以 H 代表正面，以 T 代表反面，則集合 $\{H, T\}$ 乃為此實驗之樣本空間。

若吾人重複的投擲一錢幣，直至出現正面為止；顯然地正面可能在第一次投擲就出現，或第二次，第三次，等等。這些可能之結果吾人分別記為 $H, TH, TTH, \dots$ ，等等。甚至亦可能根本未出現正面。後者吾人記為 $TTT \dots$ ，此處之三個逗點乃表示反面重複的出現。則此實驗之正確樣本空間應為 $\{TTT \dots, H, TH, TTH, \dots\}$ ，括弧內最後之三逗點表示此集合之元素可繼續地書出。於是此例提供了一實驗可能造成無限之樣本空間的事實。不過，於本書中所使用之樣本空間幾乎都是有限樣本空間。所以往後使用“樣本空間”一詞，如無特別聲明，一律視為有限樣本空間。

樣本空間之事件

吾人再放慮投擲一骰子之實驗。以集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 作為樣本空間，並以大寫字母 S 表示此集合，於是可寫成 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。吾人投擲此骰而觀察此一事件：“出現之數為偶數”。只要出現之數為 2，或 4，或 6，此事件即稱為發生。亦即，若實驗之結果是集合 $E_r = \{2, 4, 6\}$ 之一元素，此事件即為發生，此處 E_r 只為了說明方便而用以表示此集合之記號。集合 E_r 是集合 S 之一部分集合，亦即， E_r 之每一元素皆屬於 S 。

其次，假設吾人觀察另一事件，“出現之數是 3 之倍數”。只要實驗之結果是集合 $E_s = \{3, 6\}$ 之一元素，此事件即為發生， E_s 也是 S 之一部

分集合。若吾人觀察之事件爲“出現之數爲完全平方”，則只要實驗之結果是 $E_3 = \{1, 4\}$ 之一元素，此事件即爲發生。若吾人觀察之事件爲“出現之數爲質數”，則當實驗之結果爲 $E_4 = \{2, 3, 5\}$ 之一元素時，此事件始發生。由此可知，當實驗進行了，由每個可能發生之事件皆可得出 S 之一部分集合。而且，吾人可選取 S 之任意一部分集合而得一事件，例如，部分集合 $E_5 = \{1, 3, 4\}$ ，可用以觀察一事件，“骰子之頂面出現 1, 3, 或 4”。此論點使吾人得下述定義：所謂一實驗之樣本空間之一事件乃指此樣本空間之一部分集合。而當實驗之結果爲此部分集合之一元素時即稱此事件發生。

爲求對此定義更加清楚明白，吾人必須將部分集合一詞略加解釋。依上面所述，吾人所謂 S 之部分集合乃是指其元素皆屬於 S 之任意集合。一個集合如果包含 S 的某些元素而沒包含不屬於 S 之元素則此集合爲 S 之一部分集合，依此，則因 S 之每個元素皆爲 S 之元素，故 S 本身亦爲 S 之一部分集合。故一樣本空間之一事件包含此空間之所有或一部分元素。

必然事件

於樣本空間 S 中，事件 S 因包含樣本空間之所有元素顯然地與其他事件有所不同。倘若吾人作擲一骰子之實驗，且重複多次，則事件 E_1 僅於其中數次能發生。如出現之數爲奇數，則事件 E_1 就不發生。然而事件 S 則不同，因爲每個可能結果皆屬於 S ，故事件 S 每次實驗皆發生。因此之故，吾人稱事件 S 爲樣本空間 S 之必然事件。也就是說，每作一次實驗，此事件必然發生。

不可能事件

假設吾人自集合 S ，每次減少一元素，直至最後一元素被移去，則此集合變成一無所有。或者有人認爲最後所得已不再是一集合。但是吾人將會發現如果一致同意可以有一個不含任何元素之集合，則可使許多論證變得非常簡單。而此一集合可以想像成爲，以兩個括弧所成： $\{\}$ ，宛如前述各集合中用以表列其元素所使用者，只是此時二括弧之間沒有元素而已。此集合吾人稱之爲空集合，並以記號 ϕ 表之。並依下述之定義，將空集合視爲樣本空間 S 之一部分集合。此定義是：所謂 S 之一部分集合乃是未包含或包含全體或一部分 S 之元素之集合，而且此集合如含有元素，則每一元素皆屬於 S 。

爲明瞭空集合之廣泛應用，試放慮下一問題：對應於下一事件之部分

集合為何？“出現於骰子頂面之數是完全平方且是質數”。顯然地，只有當出現之數同為 E_3 與 E_4 之元素時，此事件始為發生。但是仔細檢查此二個 S 之部分集合之元素即知道 S 中沒有屬於 E_3 與 E_4 之元素。換言之，由屬於 E_3 與 E_4 二者的 S 之元素所成之集合是空集合。其意義乃說明此事件不可能發生。因此關於 S 之部分集合可以作如此分類：當投擲一骰子時，每一個可能發生之事件皆對應於一個 S 之非空部分集合；而每一個不可能發生之事件則對應於空集合。為此，吾人有時把空集合稱為**不可能事件**。

簡單事件

在 S 之部分集合中，其中有一部分僅含一個元素。這些部分集合共六個，即： $E_6 = \{1\}$ ， $E_7 = \{2\}$ ， $E_8 = \{3\}$ ， $E_9 = \{4\}$ ， $E_{10} = \{5\}$ ， $E_{11} = \{6\}$ 。在機率理論中，所有的可能事件皆由這種一元素之事件中取適當者聯合而成，因此後者是很重要之事件。例如，欲得 E_3 ，則聯合 E_6 與 E_9 。欲得 E_4 ，則聯合 E_7 ， E_8 及 E_{10} 。這些一元素之事件既很重要，吾人乃給予特殊之名稱。一樣本空間中僅含一元素之事件稱之為此空間之一**簡單事件**。

集合與部分集合

因為一樣本空間乃是（由一實驗之可能結果所成之）一個集合，而事件則為此集合之部分集合。於是吾人引用數學上集合論之一些概念，記號及結論可使往後之說明更清楚。依照前述吾人使用“集合”一詞之方法，很易了解所謂集合乃是一些實際的或概念性的物品所成之一個群體，而此集合之物品則稱為其**元素**。欲表達一個有限集合，吾人使用兩個括弧作為其元素之容器，將元素表列於二括弧之間。或是利用一個能明確決定其元素的規則來定義一集合亦可。舉例言之，集合 S 之元素共有1, 2, 3, 4, 5, 及6，則吾人可寫成 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。或者是說明 S 為由大於0而小於7之整數所成之集合。兩個集合稱為相等之充要條件是二者所含之元素完全相同。

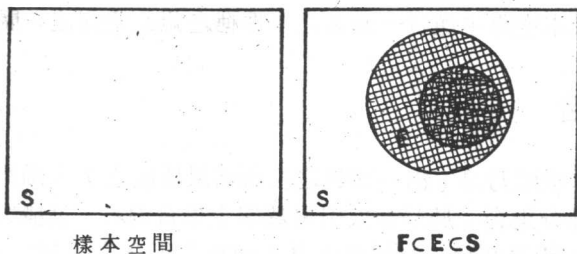
前此吾人已定義了部分集合，並介紹了空集合之觀念。空集合是每一個集合之部分集合，以下吾人利用記號 $\subset$ 來表示“是……之一部分集合”的關係。即若 F 為 E 之一部分集合，吾人寫成 $F \subset E$ 。下面列出之三集合就是不含元素，含一元素，及包含二元素者：

$$\emptyset = \{ \} \quad R = \{a\} \quad T = \{x, y\}$$

集合 ϕ 只有一部分集合： ϕ 。集合 R 則有二部分集合： ϕ 及 R 。集合 T 有四部分集合： ϕ ， $\{x\}$ ， $\{y\}$ ，及 T 。

對於投擲一骰子之實驗，以 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 作為其樣本空間，而改慮事件 $E_3 = \{1, 4\}$ 及事件 $E_5 = \{1, 3, 4\}$ 。因為 E_3 是 E_5 之一部分集合。因此若投擲此骰之結果為 E_3 之元素，則亦為 E_5 之元素。所以只要事件 E_3 發生，事件 E_5 必發生。此一關係有時稱之為事件 E_3 涵蘊事件 E_5 。於是對於此一敘述 $E_3 \subset E_5$ ，吾人可有兩種讀法。一為僅就集合論之意讀為 E_3 是 E_5 之一部分集合，另一則依機率理論之意義而讀為 E_3 涵蘊 E_5 。

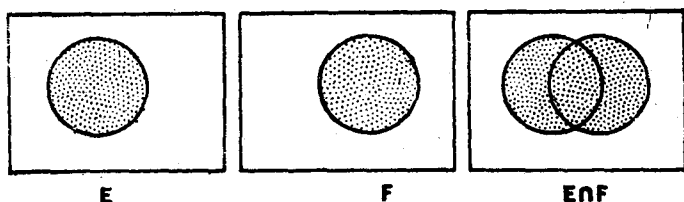
關於一樣本空間之各部分集合間之關係可利用文氏圖解法作簡單的圖示。樣本空間本身以一矩形區域表之。此樣本空間之一部分集合則以矩形區域之點所成之部分集合表之。下面圖示中，若矩形區域代表樣本空間 S ，而陰影部分 E 及 F 代表 S 之事件，而且 F 為 E 之一部分集合。



兩集合之聯集

投擲一骰子時，若下列三者之一滿足，則稱事件 E_1 或 E_3 發生（出現之數為偶數或完全平方）：(1) 出現之數為偶數但非完全平方，故結果屬於 E_1 但不屬於 E_3 ；(2) 出現之數為完全平方但非偶數，故結果屬於 E_3 而不屬於 E_1 ；(3) 出現之數為偶數也為完全平方，故實驗結果屬於 E_1 及 E_3 。於是所謂事件 E_1 或 E_3 實際即集合 $\{1, 2, 4, 6\}$ 。此集合乃是將屬於 E_1 或 E_3 或屬於二者之元素聯合而得。於集合論中此集合稱為 E_1 與 E_3 之聯集而以 $E_1 \cup E_3$ 表之。（讀作 E_1 與 E_3 之聯集）。若 E 與 F 為一樣本空間之二事件， $E \cup F$ 乃是

由屬於 E 或 F 或屬於二者之元素所成之集合，而且除此而外不再有其他元素。由二集合作其聯集之運算可以文氏圖解法說明如下：



依聯集之定義，以及依其文氏圖解法，很易得知當二集合作其聯集時，何者書寫於前實無關緊要。亦就是說， $E \cup F = F \cup E$ 。換言之，聯集運算滿足交換律。此律與算術之加法交換律很相似，即 $x + y = y + x$ 。

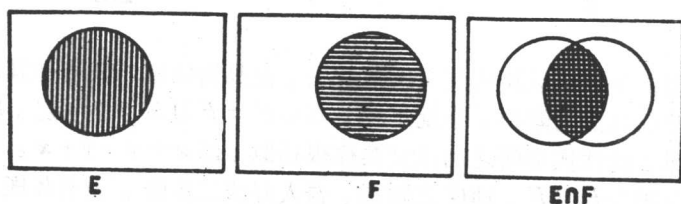
欲求三集合 E ， F ，與 G 之聯集，吾人分成二步驟。先求 E 與 F 之聯集 $E \cup F$ 。其次求 $E \cup F$ 與 G 之聯集。此一結果記為 $(E \cup F) \cup G$ 。吾人亦可先求 F 與 G 之聯集 $F \cup G$ ，而後求 E 與 $F \cup G$ 之聯集。此一結果則記為 $E \cup (F \cup G)$ 。依文氏圖解法易知 $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ 。換言之，聯集運算滿足結合律。此律與算術之加法結合律很相似，即 $(x + y) + z = x + (y + z)$ 。因結合律成立，所以吾人可將括弧略去而逕寫成 $E \cup F \cup G$ 以表示 E ， F ，與 G 之聯集。於是依交換律與結合律可知如 $E \cup G \cup F$ ， $F \cup G \cup E$ ，等等，只將 E ， F ，與 G 之順序互換所得之各集合皆相同。集合之數目多於三個時也有與此相似之結果：當兩個或兩個以上之集合作聯集運算時，各集合之順序如何不影響其結果。

兩集合之交集

於投擲一骰子之實驗中，令 $E_1 = \{2, 4, 6\}$ ， $E_2 = \{1, 4\}$ 。事件 E_1 只當出現之數為偶數時始發生而事件 E_2 只當出現之數為完全平方始為發生。若出現之數既為偶數又是完全平方則吾人稱為事件 E_1 及 E_2 發生。於是所謂事件“ E_1 及 E_2 ”亦即是集合 $\{4\}$ ，此乃由屬於 E_1 與 E_2 二者之元素所成之集合。於集合論中，此稱為 E_1 與 E_2 之交集而記為 $E_1 \cap E_2$ 。（讀作 E_1 與 E_2 之交集。）若 E 與 F 為一樣本空間之二事件， $E \cap F$ 乃是由屬於 E 與 F 二者之元素所成之集合，且除此之外不再有其他元素。由二集合求其交集之運算以圖形表示如下。此一運算亦滿足交換律與結合律。亦即是， $E \cap F = F \cap E$ ，及 $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ 。

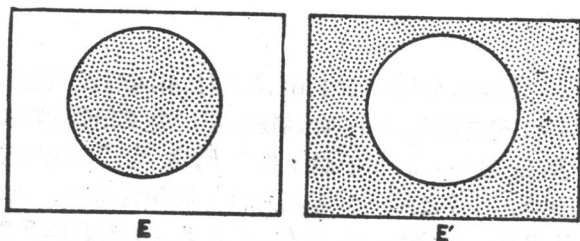
交集之定義亦可推廣至二個以上之集合：任意數目之集合的交集乃是由屬於所提及之每一個集合的元素所成之集合。當三個或以上之集合求交集，則其交集可以依任意順序逐步求出。

若 $E = \{1, 2\}$ ， $F = \{3, 4\}$ ，與 $G = \{1, 3\}$ ，則 $E \cap G = \{1\}$ ， $F \cap G = \{3\}$ ，而 $E \cap F = \emptyset$ 。若二集合之交集為空集合，則此二集合稱為**互斥**或**不相交**。於此例中， E 與 F 不相交。於文氏圖解法中，不相交之集合可以兩個不重疊之圓表示之。



一集合之餘集合

投擲一骰子時，若出現之數為 2，4 或 6 以外之任意數，則稱事件 E_i 不發生。而所謂事件非 E_i 乃是由樣本空間 S 中不屬於 E_i 之元素所成之集合 $\{1, 3, 5\}$ 。於集合論中此稱為 E_i 之**餘集合**，而以記號 E' 表之。若 E 為樣本空間 S 中之任一集合， E' 乃是由 S 中不屬於 E 之元素所成之集合。顯然地 E 是 E' 之餘集合，故 $(E')' = E$ 。觀察下面之文氏圖解可知 $E \cup E' = S$ 而 $E \cap E' = \emptyset$ 。



若 E ， F 及 G 為樣本空間 S 之事件，則下述各關係依文氏圖解法很易明瞭： $E \cup \emptyset = E$ ； $E \cup S = S$ ； $E \cap S = E$ ； $E \cap \emptyset = \emptyset$ ； $E \cup E = E$ ； $(E \cup F)'$

$= E' \cap F'$ ，(聯集之餘集合為餘集合之交集)； $(E \cap F)' = E' \cup F'$ ，(交集之餘集合為餘集合之聯集)； $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$ ；以及 $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ 。最後二關係式與算術之分配律很相像，即 $x(y+z) = xy + xz$ 。

一集合之元素數

在本書之後段，吾人欲求一事件之機率時，有時須計算該事件之元素數。一集合 E 之元素數以記號 $n(E)$ 表之。若 E 與 F 為一樣本空間 S 中之事件，則吾人可由 $n(E)$ 以及 $n(F)$ 計算 $E \cup F$ 之元素數。集合 $E \cup F$ 可以視為下列三集合之聯集：一為由屬於 E 但不屬於 F 之元素所成，一為由屬於 F 但不屬於 E 之元素所成，一為由屬於 E 及 F 二者之元素所成。依集合論之概念，此三集合分別為： $E \cap F'$ ， $F \cap E'$ ，及 $E \cap F$ 。由文氏圖解法易知， $n(E)$ 為 $E \cap F'$ 之元素數加 $E \cap F$ 之元素數。而且 $n(F)$ 為 $E \cap F$ 之元素數加 $F \cap E'$ 之元素數。於是若吾人以 $n(E)$ 加 $n(F)$ ，則 $E \cap F'$ 與 $F \cap E'$ 之元素雖僅計算

