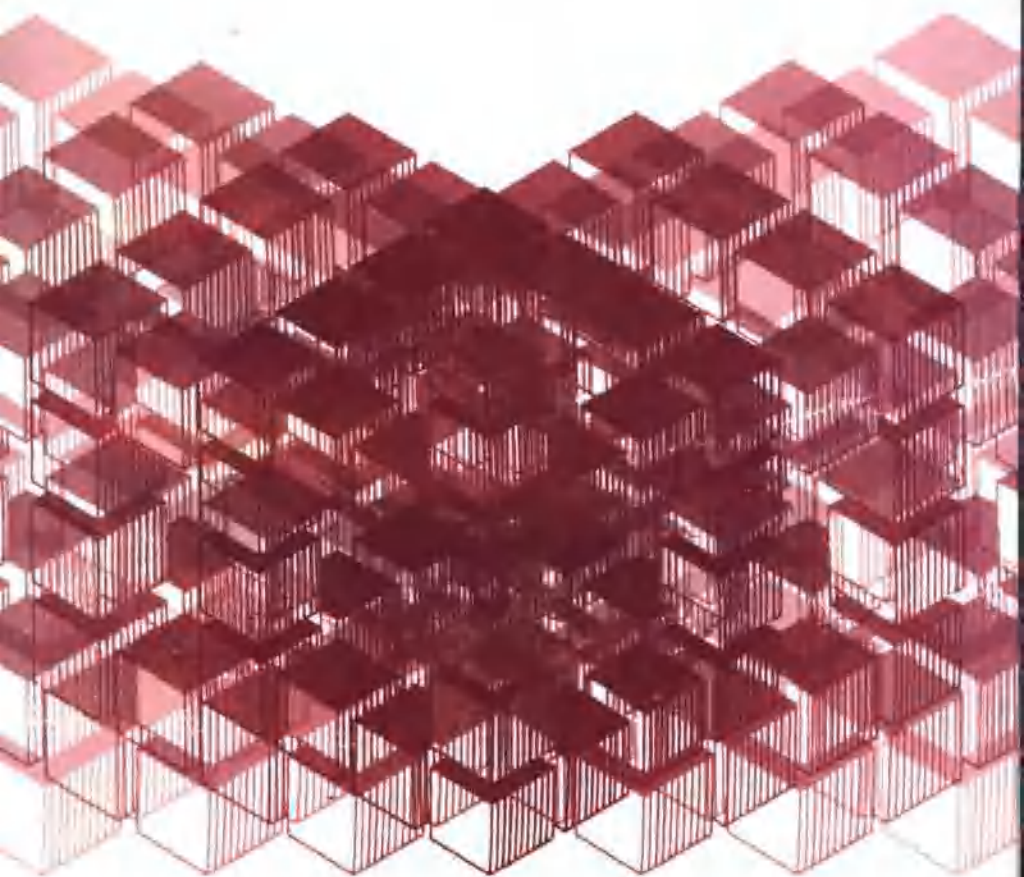


基本图形分析法

徐方瞿



大象出版社

基本图形分析法

徐方瞿

大象出版社

中央社会主义学院
惠存

徐方瞿

二〇〇一年三月二十日

基本图形分析法

徐方颢 著

责任编辑 张国旺

大象出版社出版

(郑州市农业路73号 邮编450002)

河南第二新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 20印张 469千字

1998年7月第1版 1998年7月第1次印刷

印数1-4325册

ISBN 7-5347-2024-9/G·1688

定 价 21.00元

基本图形分析法是笔者在长期从事平面几何教学工作的基础上,经过多年的研究,总结、创造的一种平面几何问题的分析方法。

十多年来,由于基本图形分析法能较系统地、有效地解决平面几何问题的分析方法的规律性,尤其是能较完善地解决平面几何中添辅助线的规律性,所以在平面几何教学中取得了显著的效果,对大面积提高平面几何教学质量,对提高广大几何教师的业务素质,教学能力起了显著的作用。全国二十多个省、市、自治区的300多所中学先后采用基本图形分析法进行几何教学,取得了很好的效果。同时有近5000名教师到上海参加了执教基本图形分析法的教学培训工作。在基本图形分析法的逐步发展、应用和推广的过程中,各地教学研究机构和广大数学教师都希望能有一本系统地介绍基本图形分析法的专著,既可作为教学的参考,也可作为数学教师进修或培训的教材。为此,笔者将近三十年来对基本图形分析法的研究成果,汇集于一册,写成了本书。

本书是一本论述分析方法的专著,它的目的在于剖析、介绍和论述对几何问题的思维过程、分析过程。它所要解决的问题是:拿到一个问题后是怎样想的?是怎样一步一步想出来的?为什么会这样想?所以它的内容和结构有以下几个主要的特点:

1. 只介绍分析过程, 不写严格的证明过程. 分析过程是解决几何问题的关键, 也是思维活动中最有价值的精华. 而证明过程则是正确的分析再加上规范化的表达的结果, 对于数学教师来说, 规范化的表达应该是没有问题的, 所以本书将所有的证明过程都略去不写.

2. 为了显示添加辅助线的过程, 原则上每新增一条辅助线就画一幅新的图, 以体现几何问题的辅助线是随分析过程的进行, 分析到什么地方就添到什么地方道理.

3. 每一部分内容都按前详后简的原则撰写. 由于分析过程的介绍, 尤其是每一部分的剖析, 都有相当的篇幅, 而分析中出现的规律性的叙述在语言上又基本上是相同的, 如对每一道题目都作详尽的剖析和介绍, 本书就会相当繁长, 因此每一种分析方法在作了一定数量的介绍, 实质上也就是在揭示了规律性以后, 同样的内容就写得简略了.

4. 为了适应更多方面的读者的需要, 本书在每一部分的开始, 都适当地选取一些基础的, 难度并不高的例题, 作分析方法的介绍, 以使内容上体现由浅入深的原则.

本书图形系由张际南、雷英、南宫慈云和朱蓓蓓等五人绘制, 在此一并致谢!

由于笔者水平所限, 对于本书的不当之处, 望广大读者给予批评指正.

编 者

1996年5月于上海

目 录

第一章 基本图形分析法概论	(1)
第一节 基本图形分析法.....	(1)
第二节 怎样应用基本图形分析法添辅助线	(29)
第二章 平行线	(37)
第三章 等腰三角形	(53)
第一节 等腰三角形	(53)
第二节 角平分线和平行线的组合图形 ..	(62)
第三节 等腰三角形中的重要线段	(87)
第四节 角平分线和垂线的组合图形	(98)
第五节 直角三角形斜边上的中线.....	(131)
第四章 与圆有关的角	(157)
第一节 圆周角.....	(157)
第二节 弦切角.....	(192)
第五章 全等三角形	(233)
第一节 轴对称型.....	(233)
第二节 中心对称型.....	(278)
第三节 旋转型.....	(299)
第四节 平移型.....	(382)
第六章 相似三角形	(387)
第一节 平行线型.....	(387)
第二节 逆平行线型.....	(540)
第三节 旋转型.....	(580)

第四节 位似型	(606)
第七章 特殊角三角形	(611)
第八章 有关三角形面积的基本图形	(623)

第一章 基本图形分析法概论

第一节 基本图形分析法

图形,是几何学科的研究对象,平面图形,是平面几何的研究对象.

一道几何问题,无论是证明题、计算题还是作图题,都会以一个图形以及这个图形所具有的各种性质为其研究对象.而出现在几何问题中的每一个几何图形,无论是怎样的简单或怎样的复杂,经过分析,都一定可以发现这样一个事实,即它是由一个或若干个最简单、最基本的图形组合而成的.

例如,如图 1·1, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 边 BC 上的高 AD 的延长线交 $\odot O$ 于 H , 以 AD 为直径的 $\odot O'$ 交 AB 、 AC 于 E 、 F , EF 交 AD 于 G . 求证: $AD^2 = AG \cdot AH$.

分析: 这个问题中出现了条件 AD 是 $\odot O'$ 的直径, E (或 F) 是半圆上的点, 所以可应用半圆上的圆周角是直角的基本性质进行证明. 而现在图形中有 $\odot O'$ 的直径 AD , 有半圆上的点 E , 但没有圆周角. 所以应将圆周

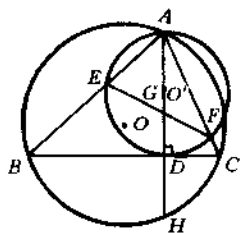


图 1·1

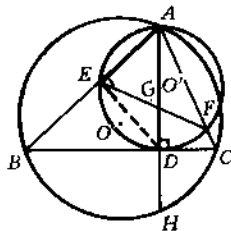


图 1·2

角添上,于是连结 DE (如图 1·2), 即可得 $\angle DEA = 90^\circ$. 这里出现的半圆上的圆周角实际上就是组成这个几何图形的第一个基本图形.

在得到 $DE \perp AE$ 后, 由条件 $AD \perp BC$, 可得 $\triangle ABD$ 是直角三角形, 这样就出现了 DE 是 $Rt\triangle ABD$ 的斜边上的高, 那么, 应用直角三角形斜边上的高的基本性质, 就可得结论中出现的 AD^2 应等于 $AE \cdot AB$, 且 $\angle ADE = \angle ABD$. 这个直角三角形斜边上的高, 就是组成这个几何图形的第二个基本图形 (如图 1·3).

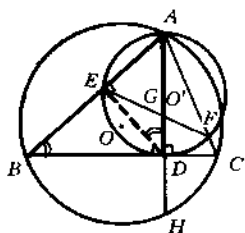


图 1·3

由性质 $AD^2 = AE \cdot AB$, 再对比要求的结论 $AD^2 = AG \cdot AH$, 可知问题转化成要证明 $AE \cdot AB = AG \cdot AH$.

这是线段之间的比例关系, 经过描图可发现, 出现了两组相乘线段重叠在一直线上, 且有一个公共的端点, 从而可添加一组逆平行线型的相似三角形进行证明, 添加的方法是将端点 (B) 和端点 (H) 、内分点和内分点分别连接起来, 于是连接 BH . 可得 $\triangle AGE$ 和 $\triangle ABH$ 应是一对逆平行线型的相似三角形, 这就是组成这个几何图形的

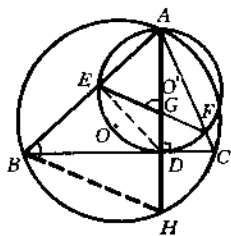


图 1·4

的第三个基本图形 (如图 1·4). 而要证明这两个三角形相似就可以转化为要证 $AE \cdot AB = AG \cdot AH$ 的等价性质 $\angle AGE = \angle ABH$ (或 $\angle AEG = \angle H$).

由于 $\angle AGE$ 可以看作是 $\triangle AFG$ 的一个外角 (E, G, F 成一直线), 所以 $\angle AGE = \angle FAG + \angle AFG$. 而 $\angle FAG$ 可以看作是 $\odot O$ 的一个圆周角, 在 $\odot O$ 上已经出现四点 A, B, H, C , 所以应用圆周

角的性质可得 $\angle FAG = \angle CBH$. 这里出现的圆周角就是组成这个几何图形的第四个基本图形(如图 1·5). 根据同样的道理, 在 $\odot O'$ 中应用圆周角的基本图形的性质可得 $\angle AFG = \angle ADE$. 而已经证明了 $\angle ADE = \angle ABD$, 所以 $\angle AFG = \angle ABD$, 又 $\angle CBH + \angle ABD = \angle ABH$, 所以 $\angle ABH = \angle AGE$ 就可以证明, 分析也就完成.

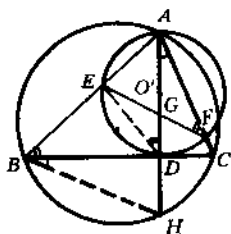


图 1·5

从上述例题的分析, 可以发现这个几何问题的图形实际上是由半圆上的圆周角、直角三角形斜边上的高、逆平行线型相似三角形和圆周角这四个基本图形组合而成的. 所谓对这个问题的分析, 实质上就是将问题进行分解并进而发现且找到组成它的所有的基本图形, 再应用这些基本图形的性质使问题得到解决. 如果我们对更多的几何问题作这样的分解和研究, 就可以进一步发现, 几何问题的这种特点是带有普遍性的, 而这种分析方法又是带有规律性的. 于是就可通过总结、归纳得到:

在几何学科中, 根据问题的条件和结论, 分析并找到组成这个几何问题的一个或若干个基本图形, 再应用这些基本图形的性质, 使问题得到解决, 这样一种分析方法就叫做基本图形分析法.

在上述讨论什么是基本图形分析法的过程中, 出现了基本图形的概念, 所以我們也需要讨论一下什么是基本图形. 基本图形, 顾名思义, 似乎就应该是组成几何图形的最基本的元素, 这样就会很自然地想到点、线段和弧这些图形. 然而我们现在所要研究和解决的问题不仅仅是图形的分解或“拆零”, 更重要的目标是要解决几何题的分析方法问题. 从这个意义上讲, 将点、线段和弧作为基本图形就没有意义了. 甚至连三角形也不能作为基本图形, 因为它不仅可以在绝大多数几何问题的图形中不止一个地出现, 而且也无法表述清楚它在分析过程中应在什么条件下应用的问题. 因此,

对基本图形的定义就要兼取两个方面的要求,也就是它既是组成几何图形的“基本元”,又必须是有特定的性质和应用条件的图形,而不能将甚至是一道题目的图形或比它们更简单的无法说清楚应用条件和分析方法的图形也作为基本图形.据此,我们有:

在几何分析中,组成一个几何问题的图形的最简单、最基本的但又是具有特定的性质,能明确地阐明其应用条件和应用方法的图形,称为基本图形.

一般几何问题的图形,都可以分解成一个或若干个基本图形.因此在对一个几何问题进行分析并得到相应的基本图形后,如果再对一个新的几何问题也进行同样的分析,则又可得到一个或若干个基本图形,然后我们可将这两组基本图形加以比较,这时就会出现两种可能性:一种是两组基本图形中没有相同的、重复的,另一种是两组基本图形中有一个或若干个是相同的、重复的.这时我们就可以将新出现的基本图形留下,而将重复的基本图形筛去,在这样一个过程中我们就会发现,随着我们解剖的几何图形的增多,在刚开始的时候,新的基本图形的增加或出现还是比较快的,但逐渐逐渐其增加或出现的新的基本图形就越来越少了.而当我们所剖析的几何问题达到一定的数量,而这些几何问题的选取本身又是很随机的话,那么新的基本图形就几乎不再增加.这样,我们就可以应用这种筛选的方法得到我们所期望、所需要的,又是我们已经可以找到的所有的应用于几何分析的基本图形,或者也可以讲是得到一个基本图形的集合.

接下来的问题当然应该是逐一地介绍基本图形,但是介绍这些基本图形的目的显然是要在分析中应用,这样就会出现一个在什么情况下或在什么条件下应该用哪一个基本图形的问题?再进一步的话还有一个怎么样应用的问题.实质上也就是要讨论每一个基本图形的应用条件和应用方法的问题,这两个问题实质上也是基本图形分析法应用的关键问题.

在一个几何问题中,为什么会想到要应用这个基本图形而不想到要应用另外的一个基本图形,显然是决定于这个基本图形的特征,决定于这个基本图形不同于其它基本图形的属于它本身独具的本质属性,决定于这个基本图形和其它基本图形的本质上的差异.所以,要解决基本图形的应用条件问题,首先就要研究和讨论每一个基本图形的特性,然后,我们就可以根据这些特性,来归纳、发现并最终得到每一个基本图形的应用条件.在我们的研究中,我们还发现在所讨论的基本图形的特性和随之得到的应用条件中,除了必要的是以数量关系表现的性质以外,相当一部分是位置关系的表述,这也是基本图形分析法和传统的几何分析方法的一个重要的区别.在根据应用条件确定或找到基本图形以后,应用方法一般来讲都比较容易确定,在以后的讨论中,我们可以进一步发现,应用方法实际上是基本图形完整化的具体表述,所以基本图形一经确定,应用方法也就相应地确定了.因此,在基本图形的介绍中,从某种意义上讲,应用条件和应用方法甚至要比基本图形本身还重要得多.

现在我们就可以逐一地来介绍基本图形,而根据我们多年来的研究,这些基本图形可以分为以下几个部分:平行线、等腰三角形、与圆有关的角、全等三角形、相似三角形、特殊角三角形、与面积方法有关的三角形.

一、平行线.

图形的基本性质:(如图 1·6)

$$\angle 1 = \angle 2 \quad \Longleftrightarrow AB \parallel CD$$

$$\angle 1 = \angle 3 \quad \Longleftrightarrow AB \parallel CD$$

$$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ \quad \Longleftrightarrow AB \parallel CD$$

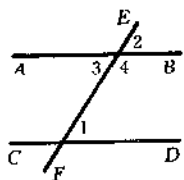


图 1·6

图形的基本特征:两条平行线或者两条要判定是平行的直线被第三条直线所截.

当几何问题中,出现了两条平行线或两条要判定为平行的直线被第三条直线所截,或者是出现了平行线的判定问题、平行线性质的应用问题时,就可以应用或添加平行线的基本图形进行分析.

应用的方法是抓住两条平行线被第三条直线所截的特点,具体的方法是:添加同与两条平行线相交的第三条直线;添加同和第三条直线相交的一组平行线.

二、等腰三角形.

1. 等腰三角形.

图形的基本性质:(如图 1·7)

$\triangle ABC$ 中, $AB=AC \iff \angle B=\angle C$

图形的基本特征:等腰三角形的两条腰是两条具有公共端点,但又不一直在一直线上的两条相等线段.

当几何问题中,出现了两条具有公共端点而又不一直在一直线上的相等线段时,就可以应用或添加等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是将这两条具有公共端点的相等线段组成等腰三角形,这时如果只有两条腰而没有底边的话,就应将底边添上.

2. 出现顶角的外角的等腰三角形.

图形的基本性质:(如图 1·8)

$\triangle ABC$ 中, AD 是 BA 的延长线.

$AB=AC \iff \angle DAC=2\angle B (=2\angle C).$

图形的基本特征:出现了等腰三角形顶角的外角以及这个外角与它的不相邻内角之间的倍半关系.

当几何问题中,出现了两条具有公共端点而又不一直在一直线上的相等线段以及由它们组成的等腰三角形的顶角的外角,或者出现了两个角之间的倍半关系且其中的倍角可以看作是一个三角形的外角



图 1·7



图 1·8

(或一个角的邻补角)时,就可以应用或添加出现顶角的外角的等腰三角形进行分析.

应用的方法是将等腰三角形找出或添完整后,再应用与两条腰相等具有等价性质的角的倍半关系进行分析.

3. 角平分线和平行线的组合而得到的等腰三角形.

i) 由角的一边的平行线与角平分线相交得到的等腰三角形.

图形的基本性质:(如图 1·9)

OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线, $DE \parallel OA$ 且分别交 OB 、 OC 于 D 、 E .

则 $\triangle DOE$ 是等腰三角形.

即: $\angle 1 = \angle 2, DE \parallel OA \Rightarrow DO = DE$.

在上述三个性质中,只要出现其中任意两个,则第三个性质必定成立.

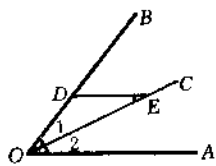


图 1·9

图形的基本特征:出现了角平分线和角的边的平行线的组合关系.

当几何问题中出现了角平分线和角的一边的平行线的组合关系,或者出现了角平分线、角的一边的平行线、等腰三角形这三个性质中的任意两个时,就可以应用或添加由角的一边的平行线与角平分线相交得到的等腰三角形的基本图形进行分析.

应用的方法是将角的一边的平行线与角的另一边以及角平分线相交组成等腰三角形.

ii) 由角平分线的平行线与角的边相交得到的等腰三角形.

图形的基本性质:(如图 1·10)

OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线, $DE \parallel OC$ 且分别交 BO 的延长线、 OA 于 D 、 E .

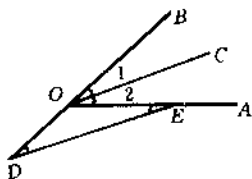


图 1·10

则 $\triangle ODE$ 是等腰三角形.

即: $\angle 1 = \angle 2, DE \parallel OC \Rightarrow OD = OE$.

在上述三个性质中,只要出现其中任意两个,则第三个性质必定成立.

图形的基本特征:出现了角平分线和角平分线的平行线的组合关系.

当几何问题中出现了角平分线和它的平行线的组合关系,或者出现了角平分线、角平分线的平行线、等腰三角形这三个性质中的任意两个时,就可以应用或添加由角平分线的平行线与角的边相交得到的等腰三角形的基本图形进行分析.

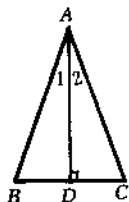
应用的方法是将角平分线的平行线与角的一边以及另一边的反向延长线或平行线相交组成等腰三角形.

4. 具有重要线段的等腰三角形.

图形的基本性质:(如图 1·11)

$AB = AC, AD \perp BC \iff \angle 1 = \angle 2, BD = CD$.

在上述四个性质中,只要任意取其中的两个作为条件,那么另两个性质必定成立.且图中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 是一对轴对称型的全等三角形.



在等腰三角形中,底边上的高就是底边上的中线和顶角的角平分线,这条线段就称为等腰三角形中的重要线段. 图 1·11

图形的基本特征:出现了等腰三角形中的重要线段或者是出现了三角形一边上的中线、高、角平分线这三条线段中有两条重合在一起.

当几何问题中出现了下列情况之一时:(1)等腰三角形中的重要线段;(2)三角形(在已知图形中,这个三角形可以出现得尚不完整)的一边上的高、中线和角平分线这三条线中的两条重合;(3)角平分线和向角平分线所作的垂线.就可以应用或添加具有重要线

段的等腰三角形的基本图形进行分析。

应用的方法是：(如图 1·12~1·15)

(1)在出现等腰三角形和它的底边上的高时，可直接应用基本图形的性质进行分析。

(2)在出现等腰三角形和它的底边的中点时，应将这条底边上的中线添上。

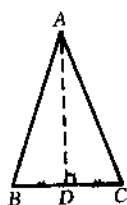


图 1·12



图 1·13



图 1·14



图 1·15

(3)在出现等腰三角形和它的顶角平分线时，应将这条角平分线与底边相交，如尚未相交的则应延长到相交。

(4)在出现三角形一边上的高和中线重合，或者也就是出现一条线段的垂直平分线时，则应将等腰三角形的两腰添上，或者也就是将线段中垂线上的一点与线段的两个端点连接起来，构成等腰三角形。

(5)在出现三角形一边上的中线和它所对的角的角平分线重合时，可直接应用基本图形的性质。

(6)在出现三角形一边上的高和它所对的角的角平分线重合，也就是出现角平分线和向角平分线所作的垂线时，可将角平分线的垂线延长到与角的两边相交，构成等腰三角形。

当几何问题中出现了垂直于弦的直径时，也可以应用具有重要线段的等腰三角形的性质进行分析，应用方法和上述介绍的应用方法相同。

5. 出现斜边上的中线的直角三角形。

图形的基本性质:(如图 1·16)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$,则

$$AD=BD \iff CD=AD=\frac{1}{2}AB$$

$$AD=BD \iff \angle A=\angle DCA,$$

$$\angle BDC=2\angle A$$

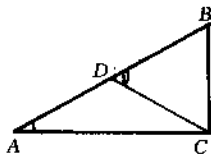


图 1·16

出现斜边上的中线的直角三角形实质上是两个顶角互补的等腰三角形的组合图形。

图形的基本特征:出现了直角三角形斜边的中点,线段之间的倍半关系和角之间的倍半关系。

当几何问题中出现了:(1)直角三角形斜边的中点;(2)两条线段之间的倍半关系,而其中的倍线段是一个直角三角形的斜边;(3)两个角之间的倍半关系,而其中的半角是一个直角三角形的内角这三种情况之一时,就可以应用或添加出现斜边上的中线的直角三角形进行分析。应用的方法是将直角三角形斜边上的中线添上。

三、与圆有关的角。

1. 圆周角。

图形的基本性质:(如图 1·17)

四边形 $ABCD$ 中, CE 是 BC 的延长线

$$A、B、C、D \text{ 四点共圆} \iff \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

$$A、B、C、D \text{ 四点共圆} \iff \angle DCE = \angle BAD$$

$$A、B、C、D \text{ 四点共圆} \iff \angle BAC = \angle BDC$$

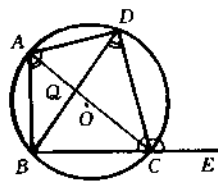


图 1·17

图形的基本特征:出现了同一个圆上有四点,也就是四点共