全国数学教学法专家李建才指导推荐用书

修订版

Zouxiang
YouDengSheng

走向优等生

同步讲解与测试

高中 二年级（上）数学

指导专家/李建才
本册主编/童嘉森

给你带得走的能力，
不是背不动的书包

- 权威专家指导推荐
- 梳理知识精讲巧练
- 方法诀窍轻松把握
- 学习应试有机结合
- 同步教材视野开阔
- 教辅图书创新力作

北京教育出版社

全国数学教学法专家李建才指导推荐用书

修订版

Zouxiang
YouDengSheng

同步讲解与测试

走向优等生

高中 数学
二年级（上）

指导专家/李建才
本册主编/童嘉森

给你带得走的能力，
不是背不动的书包

● 权威专家指导推荐 ● 梳理知识精讲巧练 ● 方法诀窍轻松把握
● 学习应试有机结合 ● 同步教材视野开阔 ● 教辅图书创新力作

北京教育出版社

本册编者：

童嘉森　丁　平　吴万辉　索云旺
孙惠清　王　海　张月英　张启华
童兆昕　白天琦

走向优等生·同步讲解与测试

数学·高中二年级(上)

(修订版)

指导专家　李建才

本册主编　童嘉森

*

北 京 教 育 出 版 社 出 版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网　址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新　华　书　店　经　销

北 京 世 图 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092　16开本　10.25印张

2004年5月第2版　2004年5月第3次印刷

本次印数10 000册

ISBN 7-5303-2859-X

G·2792　定价:13.00元

写在前面

首先感谢你选择了《走向优等生》丛书!《走向优等生》修订版在保持丛书原有内容与体例的新颖性、方法及练习的多样性和知识视野的开阔性的基础上，进一步体现了素质教育所倡导的对学生自主学习能力和创新意识的培养。在走向优等生的道路上，她将教给你一种带得走的能力，使你信心百倍，拾级而上!

权威专家指导推荐

丛书是在多位权威教学法专家的指导、把关和直接参与下，以北京教学一线教师为主体，精心打造而成，是全国唯一一套教学法专家指导推荐用书。

梳理知识精讲巧练

丛书从便于学生理解和掌握的角度安排体例，以方法、能力为编写主线，梳理知识，搭建知识网络，精讲巧练，让学生在掌握知识要点的过程中自觉地举一反三、触类旁通。

方法诀窍轻松把握

学习的本质是学会概括与迁移。丛书的几大版块从不同角度帮助学生掌握知识中蕴涵的思维模式，引导学生自觉地概括知识中隐含的学习方法，点拨诀窍之所在，逐步培养科学的学习习惯。

素质教育与应试有机结合

丛书是素质教育与应试技能培养有机结合的一种全新探索，突出对知识的总结和要点归纳，并配以相应练习，希望以“同步讲解＋测试”的形式，更快地提高你的学习水平和应试能力。

同步教材开阔视野

丛书修订版并不仅仅是与学生手中教材被动地配合，而是让教材这个“例子”充分得到发掘，在以人教社教材为主的同时，兼顾其他同类教材，既有配套使用的便捷性，又有独立训练的实用性。

目录

Zouxiang YouDengSheng

第 6 章　不等式 ……………………………………………… (1)

第一单元　不等式的概念和性质 …………………………………… (1)

第二单元　不等式的证明 ………………………………………… (5)

第三单元　不等式的解法 ………………………………………… (9)

第四单元　含有绝对值的不等式 …………………………………… (14)

第六章自测试卷 ………………………………………………… (37)

第 7 章　直线和圆的方程 ……………………………………… (40)

第一单元　直线的倾斜角和斜率 …………………………………… (41)

第二单元　直线的方程 …………………………………………… (44)

第三单元　两条直线的位置关系 …………………………………… (49)

第四单元　简单的线性规划 ……………………………………… (54)

第五单元　曲线和方程 …………………………………………… (58)

第六单元　圆的方程 ……………………………………………… (62)

第七章自测试卷 ………………………………………………… (84)

第 8 章　圆锥曲线方程 ………………………………………… (87)

第一单元　椭　圆 ……………………………………………… (88)

第二单元　双 曲 线 ……………………………………………… (95)

第三单元　抛 物 线 ……………………………………………… (102)

第八章自测试卷 ………………………………………………… (127)

第一学期期中试卷 ……………………………………………… (130)

第一学期期末试卷 ……………………………………………… (132)

答案与提示 …………………………………………………… (135)

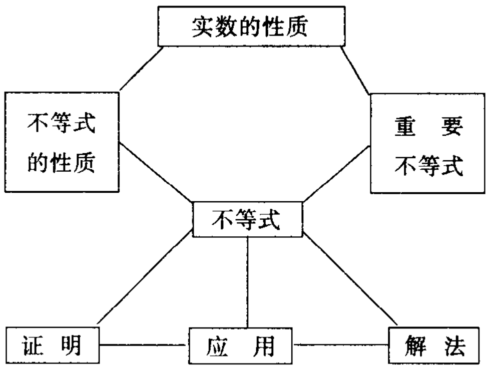
第6章 Diliuzhang

不等式

知识脉络梳理

不等式是高中数学的重要内容，是解决数学问题的有力工具．本章的主要内容有：不等式、不等式的基本性质、不等式的证明、不等式解法和含有绝对值的不等式．不等式的性质是解、证不等式的理论依据，解、证不等式又是研究方程和函数的重要工具．因此，学好这一章的内容无论是对进一步理解和掌握前面所学的数学知识要点或是进一步学好后面的数学知识都是非常重要的．不等式的应用极其广泛，诸如比较大小，研究函数性质（定义域、值域、单调性、有界性、最值），方程解的讨论，在平面解析几何中曲线类型的判定和两曲线交点的讨论等等．尤其要会灵活运用二、三元均值定理求某些函数的最值．

本章的知识网络如下：



第一单元 不等式的概念和性质

知识内容概要

1．不等式的性质

（1）对称性 $a>b \Leftrightarrow b<a$；

（2）传递性 $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$；

（3）不等量加等量

$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

（4）不等量乘正数

$a>b$，且 $c>0 \Rightarrow ac>bc$；

（5）不等量乘负数

$a>b$，且 $c<0 \Rightarrow ac<bc$；

（6）同向不等式相加

$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$；

（7）异向不等式相减

$a>b$，$c<d \Rightarrow a-c>b-d$；

（8）同向不等式相乘

$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；

（9）不等式取倒数

$a>b$，$ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

（10）异向不等式相除

$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$；

（11）不等式的乘方

$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$）；

（12）不等式的开方

$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$）.

不等式的性质为我们解不等式和进行不等式的证明奠定了基础，因此在学习中必须熟记上述不等式的性质及其成立的条件.

2．学习要求

（1）了解不等式的概念,能根据给定的条件,利用不等式的性质,判断不等式是否成立.

（2）掌握不等式的性质和几种常用的证明方法，能利用不等式有关的性质和证明的方法以及函数的性质解决一些具体问题.

（3）判断不等式中条件与结论之间的关系是充分条件或必要条件或充要条件.

重点　不等式的性质及灵活运用.

难点　不等式的性质的合理运用.

在学习不等式的性质时，要重视使每条性质成立的条件，要分清楚性质中条件与结论的充要关系．由于所有性质中大部分是单向箭头，因此它们可以直接作为不等式证明的依据，但不能直接作为解不等式的依据．另外，在学习不等式的性质时，要防止“想当然”和“显然成立”的错误，要以比较准则和实数的运算法则为依据，以严格的逻辑推理论证进行性质的推导.

精要例题解析

【例 1】 给出下面命题：

①$a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

②若$\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则 $a>b$；

③若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$；

④若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$；

⑤若 $a>b$，$n\in\mathbf{N}$，则 $a^n>b^n$；

⑥若 $a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

其中正确的是（　　）

【分析】 若令 $c=0$，则 $ac^2=bc^2$，所以①不正确；若令 $a=-2$，$b=-3$，$c=2$，$d=0$,则 $ac<bd$，$a-c<b-d$，故③④不正确；若 $a=1$，$b=-2$，$n=2$，则 $1=a^2<b^2=4$，故⑤不正确；若令 $a=1$，$b=-1$，则$\frac{1}{a}=1$，$\frac{1}{b}=-1$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故⑥不正确；由不等式的性质知②正确．本题应选②.

【例 2】 求证：若 $a>b>0$，$c>d>0$，则$\sqrt{\frac{a}{b}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

【证明】 因 $c>d>0$，有 $0<\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$.

又 $a>b>0$，故$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0$.

从而$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

【例 3】 设 $56<a<90$，$29<b<45$，求 $a+b$，$a-b$ 与$\frac{a}{b}$的范围.

【解】 $\because$ $56<a<90$，$29<b<45$，

$\therefore$ $85<a+b<135$.

$\because$ $29<b<45$，$\therefore$ $-45<-b<-29$.

又$\because$ $56<a<90$，$\therefore$ $11<a-b<61$.

同样的$\because$ $29<b<45$，$\therefore$ $\frac{1}{45}<\frac{1}{b}<\frac{1}{29}$.

又$\because$ $56<a<90$，$\therefore$ $\frac{56}{45}<\frac{a}{b}<\frac{90}{29}$.

【例 4】 已知 $a>0$，$a^2-2ab+c^2=0$，$bc>a^2$,试比较 a、b、c 的大小.

【分析】 因 $bc>a^2>0$，故 b、c 同号.

依题设有 $b=\frac{a^2+c^2}{2a}>0$，所以 $c>0$.

因为$(a-c)^2=2ab-2ac=2a(b-c)>0$，所以 $b-c>0$，即 $b>c$

又因为 $bc=\dfrac{a^2+c^2}{2a}\cdot c>a^2$，

即 $a^2c+c^3>2a^3$.

$\therefore\ a^3-c^3+a^3-a^2c<0$，

$\therefore\ (a-c)(a^2+ac+c^2)+a^2(a-c)<0$，

$\therefore\ (a-c)(2a^2+ac+c^2)<0$.

而 $2a^2+ac+c^2=\left(a+\dfrac{1}{2}c\right)^2+a^2+\dfrac{3}{4}c^2>0$，

故 $a<c$.

综上可知 $a<c<b$.

【例 5】 已知：$f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$. 求 $f(3)$ 的取值范围.

【解】 $\because\ \begin{cases}f(1)=a-c,\\ f(2)=4a-c,\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\ -c=\dfrac{4}{3}f(1)-\dfrac{1}{3}f(2).\end{cases}$

$\therefore\ f(3)=9a-c=\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)$.

$\because\ -1\leqslant f(2)\leqslant5$，$\therefore\ -\dfrac{8}{3}\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)\leqslant\dfrac{40}{3}$.

$\because\ -4\leqslant f(1)\leqslant-1$，

$\therefore\ \left(-\dfrac{5}{3}\right)\cdot(-1)\leqslant-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant\left(-\dfrac{5}{3}\right)\cdot(-4)$.

于是 $-\dfrac{8}{3}+\dfrac{5}{3}\leqslant\dfrac{8}{3}f(2)-\dfrac{5}{3}f(1)\leqslant\dfrac{40}{3}+\dfrac{20}{3}$.

$\therefore\ -1\leqslant f(3)\leqslant20$.

即 $f(3)$ 的取值范围是 $[-1, 20]$.

注意 解此类问题最易犯的一个错误是：

由 $\quad -4\leqslant a-c\leqslant-1$， ①

$\quad -1\leqslant4a-c\leqslant5$. ②

用①②进行加减消元，得

$\quad 0\leqslant a\leqslant3$，$1\leqslant c\leqslant7$. ③

由 $f(3)=9a-c$，得 $-7\leqslant f(3)\leqslant26$

其错误的原因是将 a 与 c 看成了彼此独立的变量，实际上 a 与 c 是有内在联系的. 虽说由①②能导出③，但由③却不能导出 $-7\leqslant9a-c\leqslant26$. 例如：$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，$-1\leqslant\cos x\leqslant1$ 是正确的，但不能说 $\sin x+\cos x$ 的取值范围是 $[-2, 2]$.

基本训练(一)

一、选择题

1. 已知 $a<b<0$，那么下列不等关系中不能成立的是 (　　)

A. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

B. $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

C. $a^2>b^2$

D. $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$

2. 若 $a<0$，$b>0$，且 $a^2>b^2$，则下列不等式成立的是 (　　)

A. $a>-b>b>-a$

B. $-a>b>-b>a$

C. $b>-a>a>-b$

D. $-b>a>-a>b$

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，那么下列不等式成立的是 (　　)

A. $|a+b|<|a-b|$

B. $|a+b|<|a|+|b|$

C. $|a+b|>|a|$

D. $|a+b|<|b|$

4. 设 x、$y\in\mathbf{R}$，那么 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 (　　)

A. $xy>0$　　B. $xy\geqslant0$

C. $xy=0$　　D. $xy\leqslant0$

5. 有以下五个不等式：

①$a>b$；②$a^2>b^2$；③$|a|>|b|$；

④$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$；

⑤$\lg a>\lg b$．那么一定有　（　　）

A．①与②等价　　B．②与③等价

C．①与③等价　　D．④与⑤等价

6．已知实数 a、b，满足 $0<a<1<b$，则有　（　　）

A．$\log_b a>a^b>b^a$　　B．$a^b>\log_b a>b^a$

C．$a^b>b^a>\log_b a$　　D．$b^a>a^b>\log_b a$

7．若 a、$b\in\mathbf{R}$，那么$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立的一个充分非必要条件是　（　　）

A．$a>b$　　B．$ab(a-b)<0$

C．$a<b<0$　　D．$a<b$

8　设 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则　（　　）

A．$a^2>b^2$　　B．$\frac{b}{a}<1$

C．$\lg(a-b)>0$　　D．$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

二、填空题

9．已知 $a>b>c>1$，那么$\sqrt{ab}$、$\sqrt{bc}$、$\sqrt{ca}$与$\sqrt{abc}$的大小关系是__________．

10．设 $|x|\neq1$，那么 $(x^2+1)^2$ 与 $x^2(x^2+1)+2$的大小关系是__________．

11．“$a+b>2$，且 $ab>1$”是“$a>1$，且 $b>1$”的__________条件．

12．设 $s>p>0$，则 $\lg\frac{p}{s}$与 $\lg\frac{1+p}{1+s}$的大小关系是__________．

三、解答题

13．设 $m>n>0$，比较$\sqrt{m+n}-\sqrt{m}$与$\sqrt{m}-\sqrt{m-n}$的大小．

14．已知：$\varepsilon>0$，且$|x|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|y|<\frac{\varepsilon}{4}$．求证：$|x+2y|<\varepsilon$．

15．已知：a、b、c 是不全相等的正数．求证：$a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$．

第二单元　不等式的证明

知识内容概要

1. 本单元的内容包括：6.1 算术平均数和几何平均数；6.2 不等式的证明两部分. 本单元从算术平均数和几何平均数入手，首先根据不等式的性质介绍了不等式证明中的几个重要的基本不等式，并在此基础上介绍了不等式证明的基本方法. 本单元重点是要体会比较两个实数或代数式的大小的方法，一般都是用比较法. 比较法有差式比较法和商式比较法两种，其步骤是：作差（或作商）→变形→判断. 在这三个步骤中关键是变形，围绕着变形有一系列的方法，如：因式分解的方法、配方的方法等等. 围绕着判断又有一系列的方法，如：分类讨论的方法、利用函数单调性的方法等. 不等式的证明是不等式这一章的难点内容. 其学习要求如下：

(1) 掌握常用的证明不等式的基本方法，如比较法、综合法、分析法以及证明不等式的其他方法，如数学归纳法、反证法、放缩法、变量替换法、构造法等等.

(2) 会利用正数的算术平均数定理，求非二次函数的最值.

重点　不等式证明的基本方法：比较法、综合法、分析法.

难点　不等式证明的放缩法、变量替换法、构造法以及综合运用不等式证明的方法灵活证明不等式.

2. 由于不等式类型的多样性，证明的方法也多有不同. 我们要把学习的重点放在掌握证明不等式的基本方法上，而不要过分追求特殊的技巧和过难的题目，应把“会思考”与“会表达”作为主要目标. 在利用基本不等式进行论证时，要注意以下几点：

(1) 基本不等式 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不相同的，前式要求 a、$b\in\mathbf{R}$，后式要求 a、$b\in(0,+\infty)$；在 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ 和 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$ 中，以及它们的推广式中都要求 $a,b,c,\cdots\in(0,+\infty)$. 以上内容一定要熟记，否则容易在使用中犯错误，甚至得出错误的结论.

(2) 上述不等式都是带有“=”的不等式，一定要弄清楚等号在什么条件下才能成立，并叙述为“当且仅当……”的含义.

(3) 在利用正数的算术平均数不小于几何平均数的定理求非二次函数的最值时，要注意函数式中变量必须满足：一正（即变量取正值），二定（含变量的和或积必须有一个是定值），三相等（等号成立的条件要存在），才能利用该定理求最值.

另外，应该指出：分析法是证不等式的一种常用方法，它的特点是“执果索因”，即由所要证明结论出发，逐步逆找结论成立的充分条件，直至找到明显成立的不等式为止. 以证明“若 A，则 B”为例，其推理模式是：

欲证命题 B 为真，只需证 B_1 为真，从而又只需证 B_2 为真，从而又……只需证 A 为真，今已知 A 为真，所以 B 为真，即：$B\leftarrow B_1\leftarrow B_2\leftarrow\cdots\leftarrow B_n\leftarrow A$. 在这里由 A 到 B 的每个步骤是否成立必须仔细审视，否则就会出现错误.

精要例题解析

【例 1】 若 $x\neq y$，比较 x^4-x^3y 与 xy^3-y^4 的大小.

【解】 $x^4-x^3y-(xy^3-y^4)$

$=x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$=(x-y)(x^3-y^3)$

$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)^2\left[\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2\right]$. （＊）

因 $x\neq y$，故 $(x-y)^2>0$，且 $x+\dfrac{y}{2}$ 与 y 不同时为零，有 $\left[\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2\right]>0$. 由（＊）式可知

$$x^4-x^3y>xy^3-y^4.$$

【例 2】 已知 $a\in\mathbf{R}$，试比较 $\dfrac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

【解】 $\because\ \dfrac{1}{1+a}-(1-a)=\dfrac{1-(1-a^2)}{1+a}$

$=\dfrac{a^2}{1+a}$,

$\therefore$ 当 $a>-1$，且 $a\neq0$ 时，$\dfrac{a^2}{1+a}>0$,

故 $\dfrac{1}{1+a}>1-a$；

当 $a<-1$ 时，$\dfrac{a^2}{1+a}<0$,

故 $\dfrac{1}{1+a}<1-a$；

当 $a=0$ 时，$\dfrac{a^2}{1+a}=0$，故 $\dfrac{1}{1+a}=1-a$.

【例 3】 如果 a、$b\in(0,+\infty)$，且 $a\neq b$，比较 $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

解法一：（作差法）

$\because\ \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$=\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$=\dfrac{a-b}{\sqrt{b}}+\dfrac{b-a}{\sqrt{a}}=\dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$,

又 $\because\ a$、$b\in(0,+\infty)$，且 $a\neq b$,

$\therefore\ |a-b|>0$，$|\sqrt{a}-\sqrt{b}|>0$,

又 $\because\ (a-b)$ 与 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 同号.

$\therefore\ (a-b)\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$，而 $\sqrt{ab}>0$,

$\therefore\ \dfrac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}>0$.

即 $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})>0$.

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

解法二：（作商法）

$\because\ \dfrac{\sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\dfrac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

$=1+\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}>1$,

$\therefore\ \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

【例 4】 已知：$a+b+c=1$. 求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

证法一：因 $a+b+c=1$，由基本不等式可知

$a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\geqslant1-2(a^2+b^2+c^2)$,

故 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant1$,

即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

证法二：因 $a+b+c=1$,

故欲证 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$，

只需证 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$，

即证 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.

因 $(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0$，故上式成立.

【点评】 本题证法一采用了综合法，证法二则采用了分析法．综合法和分析法是两种思路截然相反的证明方法，其中分析法如果表达清楚，它既可以寻找解题思路，也是一个完整的证明过程．在解题中应注意综合法与分析法的联合运用.

【例5】 设 a、b、c、d 都是正数，求证下列三个不等式

$a+b<c+d$，　①

$(a+b)(c+d)<ab+cd$，　②

$(a+b)cd<ab(c+d)$　③

中至少有一个不正确.

【分析】 本题应该用反证法.

【证明】 假设不等式①②③都成立，因为 a、b、c、d 都是正数，所以不等式①与不等式②相乘，得

$(a+b)^2<ab+cd$，　④

由不等式③得

$$(a+b)cd<ab(c+d)\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d).\quad ⑤$$

$\because a+b>0$，

$\therefore$ 由⑤式得 $4cd<(a+b)(c+d)$，

结合②式，得 $4cd<ab+cd$.

$\therefore 3cd<ab$，即 $cd<\frac{1}{3}ab$.

由④式得 $(a+b)^2<ab+cd<\frac{4}{3}ab$，

即 $a^2+b^2<-\frac{2}{3}ab$，矛盾.

所以，不等式①②③中至少有一个不正确.

【点评】 上述证法的基本思想是通过不等变形，减少变量个数，最后推出矛盾.

【例6】 设 $0<\theta<\pi$，求函数 $y=(1+\cos\theta)\cdot\sin\frac{\theta}{2}$ 的最大值.

解法一： $y=(1+\cos\theta)\cdot\sin\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}$，由三元均值不等式，得

$$y=\sqrt{y^2}=\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{2\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

当 $2\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $\theta=2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$y_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

解法二： 令 $\sin\frac{\theta}{2}=x$，$x\in(0,1)$，则

$y=2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=2x(1-x^2)$，

$\therefore\frac{y}{2x}=1-x^2$.

故有 $1=x^2+\frac{y}{2x}=x^2+\frac{y}{4x}+\frac{y}{4x}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{16}}$.

$\therefore y^2\leqslant\frac{16}{27}$.

又 $y\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{9}$（定积），

$\therefore$ 当 $x^2=\frac{y}{4x}$，即 $\theta=2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，

$y_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

【例 7】 已知 a g 糖水中含糖为 b g，如果在糖水中再加进 m g 糖，那么糖水更甜，请由此事实推出一个不等式，并证明之.

【分析】 本题变甜的原因是浓度变大.

【解】 加糖前糖水浓度为 $\frac{b}{a}$，加糖后糖水浓度变为 $\frac{b+m}{a+m}$，则有 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$，其中 a、b、$m\in(0,+\infty)$.

【证明】 $\because \frac{b+m}{a+m}-\frac{b}{a}=\frac{m(a-b)}{a(a+m)}>0$，

$\therefore \frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}$.

基本训练(二)

一、选择题

1．已知 a>b>0，则下列不等式中恒成立的是 ( )

A．$\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$

B．$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$

C．$\frac{a+b}{2}<\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$

D $\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

2．已知 $y=x^2+2x+\frac{4}{x^3}$，那么 ( )

A．当 $x\neq0$ 时，y 有最小值 6

B．当 $x>0$ 时，y 有最小值 6

C．当 $x>0$ 时，y 的值大于 6

D．当 $x<0$ 时，y 有最大值 6

3 若 $a>b>0$，则下列不等式中恒成立的是 ( )

A．$\frac{b^2+1}{a^2+1}>\frac{b^2}{a^2}$

B．$\frac{b^2-2}{a^2-2}>\frac{b^2}{a^2}$

C．$a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$

D．$\frac{2a+b}{a+2b}>2$

4．如果 $P=\sqrt{17}$，$Q=1+\sqrt{15}$，$R=\sqrt{5}+\sqrt{7}$，那么 ( )

A．$R<Q<P$

B．$Q<P<R$

C．$P<R<Q$

D．$P<Q<R$

5．已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{8}{y}=1$，则 xy 有 ( )

A．最小值 64　　B．最大值 64

C．最小值 $\frac{1}{64}$　　D．最大值 $\frac{1}{64}$

6．若 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2=10$，则 $x-y$ 的取值范围是 ( )

A．$[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$

B．$[-2\sqrt{10},2\sqrt{10}]$

C．$[-\sqrt{10},\sqrt{10}]$

D．$[0,\sqrt{10}]$

7．若 $0<m<1$，$0<n<1$，则 $m+n$、$2\sqrt{mn}$、m^2+n^2、$2mn$ 中最大的一个是 ( )

A．$m+n$　　B．$2mn$

C．m^2+n^2　　D．$2\sqrt{mn}$

8．设 $0<x<\frac{\pi}{4}$，$a=\log_{\sin x}\cos x$，$b=\log_{\cos x}\sin x$，那么 a、b 的大小关系是 ( )

A．$a\leqslant b$　　B．$a\geqslant b$

C．$a>b$　　D．$a<b$

9．若 $a>2$，$b>2$，且 $a\neq b$，$P=\lg\frac{a+b}{2}$，$Q=\frac{\lg a+\lg b}{2}$，$R=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，则 ( )

A．$R<Q<P$　　B．$Q<P<R$

C．$P<R<Q$　　D．$P<Q<R$

二、填空题

10．若 $x>0$，$y>0$，$a=\dfrac{x+y}{1+x+y}$，$b=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}$，则 a、b 的大小关系是____________.

11．设 $x^2+y^2=1$，则 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}$ 的最小值是____________.

12．若 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$ 成立，则 a、b 必须满足的条件是____________.

13．能使不等式 $a^2>b^2$，$\lg(a-b)>0$，$\dfrac{a}{b}>1$，$2^a>2^b$ 都成立的 a 与 b 的关系式为____________.

三、解答题

14．设 a、b、c 都是正数，求证：$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

15．设 x、$y\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2\leqslant 1$，求证：$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

16．求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

第三单元　不等式的解法

知识内容概要

求一个不等式的解集的过程叫做解不等式．如果两个不等式的解集相等，那么这两个不等式就叫做同解不等式．一个不等式变形为另一个不等式时，如果这两个不等式是同解不等式，那么这种变形叫做不等式的同解变形．解不等式的过程应是不等式同解变形的过程，解不等式的过程中要注意变形的等价性．

解不等式是研究函数的重要工具，解不等式的基本思想是化归、转化，其转化流向趋势是：

- 超越不等式 ↓
- 代数不等式
  - 无理不等式 ↓
  - 有理不等式
    - 分式不等式 ↓
    - 整式不等式
      - 高次不等式 ↓
      - 低次不等式

总之，解不等式的过程就是把复杂的转化成简单的，把不熟悉的转化成熟悉的，而不等式的性质是实现转化的依据．

解不等式应熟练掌握如下解法：

1．一元高次不等式

解一元高次不等式，主要是利用数轴标根法求解．例如：设 $f(x)$为高次多项式，欲解

不等式 $f(x)>0$，首先将 $f(x)$ 分解为

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{k}(x-\alpha_2)^{k}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}$$ 的

形式，于是原不等式化为

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k}\cdots(x-\alpha_n)^{k_n}>0.$$

这里 x 的系数为 1，且 α_1，α_2，α_3，…，α_n 彼此不等. 若有形如 $(x-\alpha_i)^n$，$n\geqslant2$ 的因式，当 n 为奇数时约去 $(x-\alpha_i)^{n-1}$，当 n 为偶数时约去 $(x-\alpha_i)^n$，单独考虑 $x=\alpha_i$ 是否是不等式的解；若有形如 $(x^2+p_ix+q_i)^n$ 的二次不可约式，因为 $p_i^2-4q_i<0$，所以必有 $(x^2+p_ix+q_i)^n>0$，故可直接约去.

然后将 $f(x)=0$ 的 n 个不同的根 α_1，α_2，α_3，…，α_n 标到数轴上，这 n 个不同的根将数轴分成 $n+1$ 个区间. 从右向左，自上而下依次经过 n 个根对应的点画一条波浪线，则在数轴上方的曲线对应的区间为 $f(x)>0$ 的解集，在数轴下方的曲线对应的区间为 $f(x)<0$ 的解集.

2. 分式不等式

先将所有项移至不等式的一侧，然后化归到以下几种形式，再转化为整式不等式（组）求解.

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$；

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$；

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant0,\\g(x)\neq0;\end{cases}$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant0,\\g(x)\neq0.\end{cases}$

3. 三种基本无理不等式

无理不等式的情形较多，但常见的形式主要有以下三种：

(1) $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)>0,\\f(x)<g(x);\end{cases}$

(2) $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)>0,\\f(x)<g^2(x);\end{cases}$

(3) $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)>0,\\f(x)>g^2(x),\end{cases}$

或 $\begin{cases}f(x)\geqslant0,\\g(x)<0.\end{cases}$

4. 指数不等式、对数不等式

当 $0<a<1$ 时，

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$；

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

当 $a>1$ 时，

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

另外，在解指数和对数不等式的时候经常使用换元法，以便把较复杂的指数和对数不等式转化为上面基本的指数和对数不等式，进行求解.

重点　解一元高次不等式、分式不等式、无理不等式、指数不等式、对数不等式.

难点　解含参数的不等式.

精要例题解析

【例 1】　解下列不等式：

(1) $2x^3-x+1<0$；

(2) $x^3(x-2)^2(x+3)\leqslant0$；

(3) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$；

(4) $\dfrac{4x^2+12x-3}{3x^2+11x-4}<1$.

【解】　(1) 将原不等式左边因式分解得

$2x^3-x+1=x^3+1+x^3-x$

$=(x+1)(x^2-x+1)+x(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(2x^2-2x+1)$，

∴ 原不等式化为

$(x+1)(2x^2-2x+1)<0$,

而 $2x^2-2x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$,

故得 $x+1<0$,

∴ 原不等式的解为 $x<-1$.

(2) 原不等式可变为

$x(x+3)\leqslant 0$,或 $x=2$,

∴ 原不等式的解集为

$\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 0$,或 $x=2\}$.

(3) 原不等式

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{3}{x+2}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)>0$.

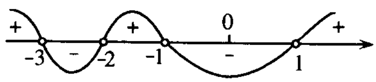


图 6－1

如图 6－1 所示，即得所求不等式的解集为

$(-\infty,-3)\cup(-2,-1)\cup(1,+\infty)$.

(4) 原不等式 $\Leftrightarrow \dfrac{4x^2+12x-3}{3x^2+11x-4}-1<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{(3x-1)(x+4)}<0$. ①

∵ $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$,

∴ ①式等价于 $(x+4)(3x-1)<0$.

故原不等式的解集是 $\left(-4,\dfrac{1}{3}\right)$.

【例 2】 解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$.

解法一：原不等式等价于

$$\begin{cases}2x+5\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\\ 2x+5>(x+1)^2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x+5\geqslant 0,\\ x+1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x+5>(x+1)^2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x+5\geqslant 0,\\ x+1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ -2<x<2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{5}{2},\\ x<-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x<2$，或 $-\dfrac{5}{2}\leqslant x<-1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}\leqslant x<2$.

解法二：设全集为 I，则

$I=\left\{x\mid x\geqslant -\dfrac{5}{2}\right\}$.

∵ $\sqrt{2x+5}\leqslant x+1\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2x+5\geqslant 0,\\ 2x+5\leqslant (x+1)^2.\end{cases}\quad \therefore\ x\geqslant 2.$$

令 $A=\{x\mid x\geqslant 2\}$,

∴ 原不等式的解集为

$\complement_I A=\left\{x\mid -\dfrac{5}{2}\leqslant x<2\right\}$.

解法三：原不等式转化为关于 $\sqrt{2x+5}$ 的一元二次不等式，得

$(\sqrt{2x+5})^2-2(\sqrt{2x+5})-3<0$,

解得 $0\leqslant\sqrt{2x+5}<3$,

平方得 $0\leqslant 2x+5<9$.

得 $-\dfrac{5}{2}\leqslant x<2$,

【说明】 解法三实质上是换元法.

【例 3】 解关于 x 的不等式

$2^{3x}-2^x<\lambda(2^x-2^{-x})$.

【解】 ∵ $2^x>0$，∴ 原不等式两边同乘以 2^x 后，整理为关于 2^{2x} 的一元二次不等式，得

$(2^{2x})^2-(1+\lambda)\cdot 2^{2x}+\lambda<0$,

即 $(2^{2x}-1)(2^{2x}-\lambda)<0$.

(1) 当 $\lambda\leqslant 0$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow 2^{2x}-1<0$,

解得 $x<0$.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，须讨论 λ 与 1 的大小.

①当 $0<\lambda<1$ 时，

原不等式 $\Leftrightarrow \lambda<2^{2x}<1$,

解得$\frac{1}{2}\log_2\lambda<x<0$；

②当 $\lambda=1$ 时，

原不等式$\Leftrightarrow$ $(2^{2x}-1)^2<0$，显然无解；

③当 $\lambda>1$ 时，

原不等式$\Leftrightarrow 1<2^{2x}<\lambda$，

解得 $0<x<\frac{1}{2}\log_2\lambda$.

【说明】 本例对 λ 进行分类讨论时，容易漏掉 $\lambda\leqslant 0$ 的情况，应引起我们注意.

【例 4】 解不等式$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$.

【解】 先求 x 的允许值范围 $x-1\geqslant 0$，

即 $x\geqslant 1$.

原不等式变形为

$\sqrt{x-1}-1>\sqrt[3]{x-2}$.

两边立方得

$\sqrt{(x-1)^3}-3(x-1)+3\sqrt{x-1}-1>x-2$.

化简得$\sqrt{x-1}(x+2)>4(x-1)$，

两边平方得

$(x-1)(x+2)^2>16(x-1)^2$.

即$(x-1)(x-2)(x-10)>0$.

图 6－2

$\therefore$ 原不等式的解集为（如图 6－2）

$(1,2)\cup(10,+\infty)$.

【例 5】 解下列关于 x 的不等式：

(1) $\log_a\left(1-\frac{1}{x}\right)>1$；

(2) $x^{\log_a x}<a^{63}\cdot x^2$ （$a>0$，且 $a\neq 1$）.

【解】 (1) 原不等式$\Leftrightarrow$

$\log_a\left(1-\frac{1}{x}\right)>\log_a a$. ①

当 $a>1$ 时，①等价于

$$\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0,\\1-\frac{1}{x}>a\end{cases}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}>a\Leftrightarrow\frac{1}{x}<1-a,$$

解得$\frac{1}{1-a}<x<0$.

当 $0<a<1$ 时，①等价于

$$\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0,\\1-\frac{1}{x}<a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-1}{x}>0,\\0<x<\frac{1}{1-a}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>1,\text{或 }x<0,\\0<x<\frac{1}{1-a}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{1}{1-a}.$$

综上所述，当 $a>1$ 时，原不等式的解集为$\left(\frac{1}{1-a},0\right)$；

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为$\left(1,\frac{1}{1-a}\right)$.

(2) 当 $a>1$ 时，原不等式的两边取以 a 为底的对数，得

$\log_a^2 x<63+2\log_a x\Leftrightarrow\log_a^2 x-2\log_a x-63<0$

$\Leftrightarrow -7<\log_a x<9$.

解得 $a^{-7}<x<a^9$.

当 $0<a<1$ 时，原不等式的两边取以 a 为底的对数，得

$\log_a^2 x>63+2\log_a x\Leftrightarrow\log_a^2 x-2\log_a x-63>0$

$\Leftrightarrow\log_a x<-7$，或 $\log_a x>9$，

解得 $x<a^9$，或 $x>a^{-7}$.

综上所述，当 $a>1$ 时，原不等式的解集为 (a^{-7},a^9)；

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为$(0,a^9)\cup(a^{-7},+\infty)$.

【注意】 在解含参数的不等式中，应注意字母的讨论，并利用函数的单调性判断不等式的方向.

【例 6】 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其