2005年 会计硕士联考高分突破

数学分册

MPAcc

胡显佑 褚永增 编著

中国人民大学出版社

2005年会计硕士联考高分突破
数学分册

胡显佑　褚永增　编著

中国人民大学出版社

出版说明

为帮助考生在使用《2005 年会计硕士（MPAcc）专业学位联考考试大纲及考试指南》的基础上，全面、系统、有针对性地复习专业课各门课程，我们特邀请各联考院校的专家编写了这套“2005 年会计硕士联考高分突破”系列丛书，包括财务会计、逻辑、数学、语文、经典案例分析和标准化模拟试卷共六个分册。

本丛书具有以下特点：

定位精准。本丛书定位于对考点、重点、难点的精讲精练，内容是《2005 年会计硕士（MPAcc）专业学位联考考试大纲及考试指南》的继续和延伸。书中既注重知识的全面系统，又注重知识在考试中的应用，在内容全面的基础上突出重点，力求将重点、难点和考点讲清讲透，帮助考生在薄弱环节下工夫。

结构实用。各分册均包含考点分析、例题讲解、同步练习等内容，将大纲要求、逻辑结构、考试要点、强化训练等巧妙地结合在一起，知识脉络分明，重点内容突出，帮助考生边学边练，巩固复习成果，提高应试能力。

作者权威。本书的编写者，均为多年从事硕士研究生教学、命题研究和考试辅导的专家学者，他们熟悉专业学位的命题、考试以及考生的需要，深谙命题的原则、思路和最新考试动态。他们结合多年命题研究和经验编写出的各分册，具有很强的权威性、实战性和针对性。

服务贴心。为帮助考生更好地复习，我们将在中国 1 考网（www.1kao.net）上为所有购买本书的读者提供增值服务（含专业课和英语），包括考前自测试题和考前串讲等内容。

由于各专业学位的英语考试统一为“在职攻读硕士学位全国联考英语考试”，所以这套丛书不包含英语部分。为帮助读者复习英语，我们出版了“在职攻读硕士学位全国联考英语考试系列”辅导图书，供读者参考选用。

我们相信，广大考生在认真阅读本套丛书后，一定能够迅速提高专业水平和应试能力，在考试中取得优异成绩。

中国人民大学出版社

2005 年 6 月

编者说明

为了帮助报考会计硕士专业学位联考的广大考生能在较短时间内系统地复习有关的数学内容，提高解题能力，我们根据联考大纲的要求编写了这本辅导教材。

为便于考生在复习时掌握重点，本书在每节都对考试的重点、命题趋势进行了分析，对考试大纲要求的题型进行了归纳分类。各类题型均配有典型例题，并对解题方法及时进行总结。有助于开阔考生的解题思路，提高综合解题能力。每章还附有自测练习。

例题和自测练习既注重循序渐进，又强调数学概念、定理和方法的综合运用。这将使考生的应试能力有较大的提高。

书后的附录系统地总结了与考试内容有关的初等数学基础知识及适量的例题，对于初等数学遗忘较多的考生，可随手查阅常用的概念和公式。

本书是根据编者多年的教学辅导经验编写的，希望能对考生有所帮助。但限于水平，且时间仓促，疏漏及不妥之处恳请读者指正。

目　录

第一章

函数、极限与函数的连续性

第一节 函 数

考点归纳

1. 函数的概念、函数的定义域和值域.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 反函数.
4. 复合函数.
5. 基本初等函数的性质和图形.

考点突破

命题趋势

函数是微积分学的研究对象，有关函数性质的讨论将贯穿整个微积分学. 重点题型为：求函数的定义域；求反函数；求复合函数；判断函数的奇偶性.

难点剖析

1. 分段函数. 分段函数的定义域是各段定义域的并集；其反函数、复合函数应分段求出.

2. 函数的有界性与单调性. 函数的这两个性质可应用导数进行讨论，我们将在第二章讨论这一问题. 一些简单的初等函数的有界性、单调性可根据基本初等函数的性质直接判定.

3. 函数的周期性. 有关三角函数周期的讨论请参阅本书附录.

典型例题

题型 1:求函数的定义域

基本初等函数的定义域可直接得出；分段函数的定义域为各段定义域的并集；复合函数的

定义域,则应根据基本初等函数的定义域,得到一个不等式组,解不等式组可得复合函数的定义域.

例 1(填空题) 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域为________.

解 由已知函数,自变量 x 应满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ x+2>0\\ x+2\neq 1\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\ x>-2\\ x\neq -1\end{cases}$$

在数轴上表示(图 1—1)

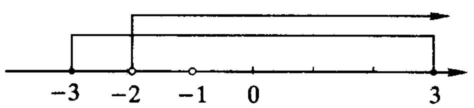

图 1—1

由此可得,定义域

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

例 2(填空题) 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$,则 $f(\ln x)$ 的定义域为________.

解 由例 1. $f(x)$ 的定义域为

$$D(f)=(-2,-1)\cup(-1,3]$$

所以,对于 $f(\ln x)$,有

$$-2<\ln x<-1 \text{ 或 } -1<\ln x\leqslant 3$$

即 $\mathrm{e}^{-2}<x<\mathrm{e}^{-1}$ 或 $\mathrm{e}^{-1}<x\leqslant \mathrm{e}^3$

于是 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e}^{-2},\mathrm{e}^{-1})\cup(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^3]$.

例 3(选择题) 下列各选项中,两个函数相同的是( ).

(A) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}, g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}, g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

解 (A) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$,但是

$$g(x)=|\cos x|$$

即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应规则不同. $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

(B) 两函数有相同的定义域 $(-\infty,0)\cup(0,1)$,当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的两个函数.

故本题应选(B).

小结 1.两个函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域相同，且对应规则相同时，两个函数相同.

2.如果已知函数 $y=f(x)$的解析表达式，求其定义域，应考虑：

(1)分母不能是零；

(2)偶次根式下，被开方数非负；

(3)对数函数中底数大于0，且不等于1，而真数应大于0.

(4)在反正弦、反余弦函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$.

根据这些要求，列出不等式组，即可求出定义域.

例4(填空题) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-4x^2, & -3\leqslant x<0\\ x, & 0<x\leqslant 4\\ \dfrac{x^2}{4}, & x>4\end{cases}$$

则函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域为________.

解 函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域就是函数 $y=f(x)$的值域，故只需求 $f(x)$的值域.

对于 $y=f(x)$，

当 $-3\leqslant x<0$ 时，有 $-36\leqslant f(x)<0$；

当 $0<x\leqslant 4$ 时，有 $0<f(x)\leqslant 4$；

当 $x>4$ 时，有 $f(x)>4$.

由此得 $f(x)$的值域为 $[-36,0)\cup(0,+\infty)$，即 $f^{-1}(x)$的定义域为 $[-36,0)\cup(0,+\infty)$.

小结 求函数的定义域的方法.

1. 根据基本初等函数的定义域，列出不等式组，求出其解集，一般用区间表示. 如例1.

2. 对于分段函数，其定义域是各段定义域的并集，如例4.

3. 对于复合函数 $f(g(x))$的定义域，应先求出 $f(x)$的定义域，再列出关于 $g(x)$的不等式，此不等式的解集就是 $f(g(x))$的定义域，如例2.

题型2:求反函数

求函数 $y=f(x)$的反函数，只需解出 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，需将 x 换为 y，y 换成 x，即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例5(填空题) 函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的反函数为________.

解 由已知函数，得

$$e^x y+y=e^x$$

$$e^x=\frac{y}{1-y}$$

即 $$x=\ln\frac{y}{1-y}$$

所以 $f(x)$的反函数为 $y=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

例6 求函数

$$y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2\\ \ln x-\ln 2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

的反函数.

解 由 $x \leqslant 0$ 和 $y=x-2$,得

$$x=y+2, y \leqslant -2$$

由 $0<x<2$ 和 $y=-\sqrt{4-x^2}$,得

$$x=\sqrt{4-y^2}, -2<y<0$$

由 $x \geqslant 2$ 和 $y=\ln x-\ln 2$,得

$$x=2e^y, y \geqslant 0$$

即

$$x=\begin{cases} y+2, & y \leqslant -2 \\ \sqrt{4-y^2}, & -2<y<0 \\ 2e^y, & y \geqslant 0 \end{cases}$$

故所求反函数

$$y=\begin{cases} x+2, & x \leqslant -2 \\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x<0 \\ 2e^x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

注意 分段函数的反函数应分段求出,再合写在一起.

例 7 求函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$ 的值域.

解 函数的值域为其反函数的定义域.由已知函数,有

$$y=\frac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}$$

可得其反函数为

$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

解不等式$\dfrac{1+x}{1-x}>0$,得 $-1<x<1$.即函数 $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$的值域为 $-1<y<1$.

题型 3:求复合函数的表达式

若已知 $f(x)$和 $g(x)$的解析表达式,求 $f(g(x))$的表达式,只需用 $g(x)$代入 $f(x)$中的 x.

若已知 $f(g(x))$的解析表达式,求 $f(x)$的表达式,可令 $t=g(x)$,并将 $f(g(x))$化为 t 的一个表达式.

例 8(填空题) 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,则 $f'(x)=$________.

解 要求 $f'(x)$,需由已知条件先求出 $f(x)$.

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$,则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$.即

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

所以

$$f(t)=t^2-2$$

即 $f(x)=x^2-2$.由此易得

$f'(x)=2x$

例 9 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0 \\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$,

求 $f(x+1)$.

解 $f(x+1)=\begin{cases}(x+1)-1, & x+1<0 \\ (x+1)^2, & x+1\geqslant 0\end{cases}$

即 $f(x+1)=\begin{cases}x, & x<-1 \\ (x+1)^2, & x\geqslant -1\end{cases}$

例 10 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$,求函数 $g(x)=f(f(x))$及其定义域.

解 由已知条件,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 1$,

所以

$$g(x)=f(f(x))=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1 \\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$$
$$=1$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$

例 11 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & |x|>1\end{cases}\qquad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f(g(x))$和 $g(f(x))$.

解 将 $g(x)$代入 $f(x)$中的 x,得

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1 \\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1 \\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}$$

即

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x>0\end{cases}$$

类似可得

$$g(f(x))=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

例 12(填空题) 设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x+1}$,则 $f(x)=$________.

解 $f(x)$与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$的自变量之间互为倒数,于是用$\frac{1}{x}$代替 x,有等式$\frac{1}{x^2}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x}$,与原方程联立,可解得 $f(x)=\frac{2x-x^2}{3(x+1)}$.

题型 4:判断函数的奇偶性、有界性和单调性

讨论函数 $y=f(x)$的奇偶性时,必须注意函数定义域的对称性.例如,定义在$[0,+\infty)$上的函数 $y=x^2$ 就不是偶函数.

判断函数 $y=f(x)$是否为奇函数或偶函数的基本方法是利用函数奇偶性的定义.

例 13 设 $F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，$f(x)$为奇函数，判断$F(x)$的奇偶性.

解 设 $g(x)=\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}g(-x)&=\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\\&=\frac{2^x}{1+2^x}-\frac{1}{2}\\&=\frac{2^x+1-1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\\&=-g(x)\end{aligned}$$

即 $g(x)$为奇函数，又 $f(x)$为奇函数，故 $F(x)$为偶函数.

例 14(选择题) 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数 $f^{-1}(x)$是(   ).

(A) 奇函数，但非偶函数　　(B) 偶函数，但非奇函数

(C) 既是奇函数，也是偶函数　　(D) 非奇、非偶函数

解法 1 因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数. 而 $f(x)$与 $f^{-1}(x)$的曲线关于 $y=x$ 成轴对称，因此 $f^{-1}(x)$必为奇函数. 故本题应选(A).

解法 2 由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$可得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$

所以 $$e^x=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

由于 $e^x>0$，由上式舍去负号项，有

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

所以 $$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

反函数 $$f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

由于 $$\begin{aligned}f^{-1}(-x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f^{-1}(x)\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(x)$为奇函数.

故本题应选(A).

例 15(选择题) 设 $f(x)=e^{\cos x}$，$g(x)=e^{-\sin x}$，则在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内(   ).

(A) $f(x)$是单调增函数，$g(x)$是单调减函数

(B) $f(x)$是单调减函数，$g(x)$是单调增函数

(C) $f(x),g(x)$都是单调增函数

(D) $f(x),g(x)$都是单调减函数

解 基本初等函数 $y=e^x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内为单调增函数,而 $y=\cos x, y=-\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内均为单调减函数,所以 $f(x),g(x)$都是单调减函数.

故本题应选(D).

例 16(选择题) 设定义在$(-\infty,+\infty)$的偶函数 $f(x)$存在导函数,下列函数可能既非奇函数也非偶函数的是(　　).

(A) $f'(x)$　　(B) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$

(C) $-f(2x)$　　(D) $f(x)x^3$

解 可以验证,$f'(x)$为奇函数,$f(x)x^3$ 也为奇函数,$-f(2x)$为偶函数,仅(B)的奇偶性与 a 的取值有关,即仅当 $a=0$ 时,为偶函数.故本题应选(B).

例 17 设 $F(x)=\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$是连续函数,判断 $F(x)$的奇偶性.

解 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t$,

令 $u=-t$,则 $t=0$ 时,$u=0$;$t=-x$ 时,$u=x$.$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$.于是

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} f(t^2)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^x f(u^2)\mathrm{d}u\\&=-F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$为奇函数.

小结 一些有关奇函数、偶函数的结论可作为定理使用,应熟记.其中较重要的是:

1. 奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.
2. 两个奇(偶)函数的积必为偶函数.
3. 可导奇(偶)函数的导数必为偶(奇)函数.
4. 若 $f(x)$为连续的奇(偶)函数,则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

为偶(奇)函数.

自测练习

(一) 选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$,则(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x\leqslant 0\\ -x^2, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$的值域是(　　).

(A) $-1\leqslant y\leqslant 1$　　(B) $-1\leqslant y<1$

(C) $-1<y\leqslant 1$　　(D) $0\leqslant y\leqslant 1$

3. $f(x)=xe^{-|\sin x|}$, $(-\infty<x<+\infty)$, $f(x)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 奇函数

4. 函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为(　　).

(A) $[-3,-2]\cup[3,4]$　　(B) $(-3,-2)\cup(3,4)$

(C) $(-3,2]\cup[3,4]$　　(D) $[-3,2)\cup(3,4]$

5. 设 $x\in(-1,1)$,则函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$(　　).

(A) 既是奇函数,又是单调减函数　　(B) 既是奇函数,又是单调增函数

(C) 既是偶函数,又是单调减函数　　(D) 既是偶函数,又是单调增函数

6. 下列函数中,非奇非偶的函数是(　　).

(A) $f(x)=3^x-3^{-x}$　　(B) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

(C) $f(x)=x(1-x)$　　(D) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

7. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调减,则下列函数中单调增的是(　　).

(A) $f^2(x)$　　(B) $\dfrac{1}{f(x)}$

(C) $f(-x)$　　(D) $xf(x)$

8. $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x, & -\pi<x<0\\ e^{x^2}+x, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 在其定义域内为(　　).

(A) 无界函数　　(B) 周期函数

(C) 单调函数　　(D) 偶函数

(二) 填空题

1. $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为________;

反函数为________;

值域为________.

2. 如果 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$,且 $f[f(x)]=x$,则 $a=$________.

3. 设 $f(e^{2x})=xe^{-2x}$,则 $f'(x)=$________.

4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,记 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f}_{n\text{次}}(x)))$,则 $f_n(x)=$________.

5. 函数 $y=\dfrac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$的定义域为全体实数,则 k 的取值范围是________.

6. 已知 $f(x)+f(y)=f(z)$,如果 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $z=$________.

7. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,则 $a=$________,$b=$________.

8. 设 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x+1$,则 $f\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

(三) 计算题

1. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t \quad (a>0,a\neq1)$

2. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\ln(1-e^{-x})$ (2) $y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant0 \\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1 \\ \ln x, & 1\leqslant x \end{cases}$

3. 若函数 $f(x)=x^3+x^2+x+1$,证明 $x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

4. 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)>0$.求 $\varphi(x)$,并确定其定义域.

5. 某商品供给量 Q 是价格 P 的函数:

$$Q=Q(P)=a+b\cdot c^P$$

若 $P=2$ 时 $Q=30$;$P=3$ 时 $Q=50$;$P=4$ 时 $Q=90$,求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

参考答案

(一) 选择题

1.D 2.C 3.D 4.A 5.A 6.C 7.C 8.D

(二) 填空题

1. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;$\dfrac{1-x}{1+x}$;$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

2. -3

3. $\dfrac{1}{2x^2}(1-\ln x)$

4. $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

5. 提示,对 $k<0,k=0,k>0$ 分别讨论;$0\leqslant k<\dfrac{3}{4}$

6. $\dfrac{xy}{x+y}$

7. 4; -1

8. $1-\cos x$

(三) 计算题

1.(1) 奇　(2) 偶

2. (1) $y=-\ln(1-e^x)$

(2) $y=\begin{cases} x+1, & x\leqslant -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0 \\ e^x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

3. 提示：直接计算左边的 $x^3 f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$；$(-\infty,0]$

5. $Q=10+5\cdot 2^P$

第二节　极　限

考点归纳

1. 数列的极限、函数的极限.
2. 两个重要的极限.
3. 函数的左、右极限.
4. 洛比达法则.
5. 无穷大量与无穷小量.

考点突破

命题趋势

极限理论是微积分学的基础.有关极限的题目是必考的内容之一.重点题型有：求极限；求分段函数在某点的极限；无穷小量的判断和无穷小量的比较.

难点剖析

1. 极限的计算.求函数极限的方法如下：利用函数的连续性；应用两个重要极限；应用洛比达法则求不定式的极限；应用等价无穷小求极限；应用极限存在准则（夹逼原理）求极限.

解题时，灵活运用上述方法和极限运算法则是求解极限问题的关键.

2. 等价无穷小.在求函数极限的问题中，适当地利用等价无穷小可将问题简化.

3. 常用的一些极限.除两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 外，读者应熟记下述结论：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$；　$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；　$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

这对于提高运算速度和准确性有极大的作用.

典型例题

题型 1:极限的概念和性质

这类问题往往是运用极限的性质和运算法则.

例 1(填空题) 已知函数 $f(x)$满足$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=3$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=$________.

解 由$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot f(x)=3$,可知$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,
故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,更有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=0$.

例 2(选择题) 设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,则( ).

(A) 若 a_n 发散,则 b_n 必发散

(B) 若 a_n 无界,则 b_n 必有界

(C) 若 a_n 有界,则 b_n 必为无穷小量

(D) 若$\dfrac{1}{a_n}$为无穷小量,则 b_n 必为无穷小量

解 (A)不正确.例如取 $a_n=n$,$b_n=\dfrac{1}{n^2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,且 a_n 发散,但 b_n 收敛.

(B) 不正确.例如取 $a_n=[1+(-1)^n]n$,$b_n=[1-(-1)^n]n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,且 a_n 无界,但 b_n 无界.

(C)不正确.例如取 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$,$b_n=n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,且 a_n 有界,但 b_n 不是无穷小量.
故本题只有(D)正确,实际上,

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\dfrac{1}{a_n}}=0$$

由$\dfrac{1}{a_n}$为无穷小量,可得$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

例 3(选择题) 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$( ).

(A) 存在且等于零　　(B)存在但不一定为零

(C)一定不存在　　(D)不一定存在

解 根据函数极限性质.若$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$都存在,则$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]$必存在,但反之未必成立,所以由本题条件不能保证$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$,$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$必存在,也不能利用夹逼原理得到$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在的结论.故本题应选(D).

例 4 设$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,$f(0)=0$,且当 $x\neq 0$ 时,有$(1+x)f(x)=\dfrac{3\sin x}{\ln(1+x)}-2\lim\limits_{x\to 0}f(x)$,求 $f(x)$.

解 因$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，此极限值为一个常数，故可设为 A，于是

$$\lim_{x\to 0}(1+x)f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{\ln(1+x)}-2A$$

所以

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}-2A$$

即

$$3A=3\cdot\frac{1}{\ln e}=3$$

故 $A=1$. 于是，当 $x\neq 0$ 时

$$f(x)=\frac{3\sin x}{(1+x)\ln(1+x)}-\frac{2}{1+x}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin x}{(1+x)\ln(1+x)}-\dfrac{2}{1+x}, & x\neq 0\\ 0\qquad\qquad, & x=0\end{cases}$$

题型 2:利用函数连续性求函数的极限

如果函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

由于初等函数在其定义区间内连续，利用这一性质可直接求得函数的极限.

例 5(填空题) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=$________.

解 $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$是初等函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1-e^{0}}{1+e^{0}}=0$$

故本题应填 0.

例 6 求$\lim\limits_{x\to 1}(x^n+2x^{n-1}+\cdots+2^{n-1}x+2^n)$.

解 $f(x)=x^n+2x^{n-1}+\cdots+2^{n-1}x+2^n$ 为初等函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}(x^n+2x^{n-1}+\cdots+2^{n-1}x+2^n)\\&=1+2+\cdots+2^{n-1}+2^n\\&=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\\&=2^{n+1}-1\end{aligned}$$

题型 3:求不定式的极限

1. 利用有理分式的极限求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & 若\ m>n\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 若\ m=n\\ \infty, & 若\ m<n\end{cases}$$