研究生教材

国防科技大学研究生教材专项经费资助

高普云 编著

非线性动力学

—分叉、混沌与孤立子

国防科技大学出版社

研　究　生　教　材
国防科技大学研究生教材专项经费资助

非线性动力学

——分叉、混沌与孤立子

高普云　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内 容 简 介

本书介绍非线性动力学的三个主要方面:分叉、混沌和孤立子。其中主要包括奇点的稳定性理论、中心流形理论、平面系统奇点和闭轨、同宿轨和异宿轨概念及其应用、Poincare 映射、分叉及其应用、混沌、KAM 环面、Melnikov 方法和反散射方法。

本书可作为力学、物理学、数学、化学和生物学等学科中的高年级本科生、硕士生、博士生以及对非线性动力学感兴趣的其他读者的参考书和教材。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学:分叉、混沌与孤立子/高普云编著.—长沙:国防科技大学出版社,2005.5

ISBN 7-81099-175-2

Ⅰ.非… Ⅱ.高… Ⅲ.非线性动力学:动力学—高等学校—教材 Ⅳ.O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 035777 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@publich.cs.hn.cn

责任编辑:耿 筠 责任校对:肖 滨

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×960 1/16 印张:14.5 字数:276 千

2005 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-1500 册

ISBN 7-81099-175-2/O·22

定价:22.00 元

前　言

非线性问题出现在许多学科之中。随着科学技术的发展,传统的线性化方法已不能满足解决非线性问题的要求。非线性动力学也就由此产生。非线性动力学联系到许多学科,如力学、数学、物理学、化学,甚至某些社会科学等。

本书的特点是在同一书中讲授非线性动力学的三个主要方面:分叉、混沌和孤立子。事实上,这不是三个孤立的方面。混沌是一种分叉过程。孤立子有时也可以和同宿轨或异宿轨相联系,同宿轨和异宿轨是分叉研究中的两种主要对象。

非线性动力学问题的解析解是很难求出的。因此,直接分析非线性动力学问题解的行为(尤其是长时期行为)成为研究非线性动力学问题的一种必然手段。

经过多年的发展,非线性动力学已发展出了许多分支,如分叉、混沌、孤立子和符号动力学等。然而,不同的分支之间又不是完全孤立的。这将在本书中得到一定的体现。

本书的安排如下:第一章介绍非线性动力学的基本概念;第二章介绍非线性动力系统奇点的各种稳定性定义及判别方法;第三章介绍中心流形定理、中心流形的计算和PB规范形的计算;第四章介绍平面系统奇点的几何性质和闭轨的概念;第五章介绍同宿轨和异宿轨的概念、Poincare映射的定义以及它们的应用;第六章介绍分叉的定义和计算方法及其应用;第七章介绍混沌的定义、混沌吸引子的数值计算、

KAM环面和判断Smale马蹄意义下混沌的Melnikov方法;第八章介绍求解孤立子的反散射方法。

感谢国防科技大学宇航科学与工程系和航天与材料工程学院的领导将作者的讲稿推荐出版,感谢研究院的领导将作者的讲稿作为研究生教材资助出版,感谢提出过问题和要求的学生。作者欢迎读者对不当之处提出批评指正。

作　者

2005年3月28日

目　　录

第一章　绪　论

第二章　常微分方程组的奇点稳定性理论及其应用

第三章 中心流形定理

第七章　混　沌

第八章　孤立子

第一章 绪 论

经典力学的基础是一些“实验事实”。所有这些“实验事实”都只是近似为真,而可用更精确的实验修正或实验推翻。从牛顿力学到爱因斯坦的相对论就说明了这一事实。随着科学技术的发展,实验设备变得更为先进,实验方法在不断改进,所得的实验结果也更为贴近实际力学过程。然而,更新更精确的实验结果在许多情况下说明这样两个事实:一个是处理力学模型的线性化方法在许多模型应用中具有很大的局限性,线性化可能导致很大的误差,甚至导致结论与实际情况十分不相符;另一个事实是原来被忽略的一些因素事实上对力学模型影响很大,而这些被忽略的因素表现为往往很难用线性化方法处理,并且还表现为强非线性性。

动力学问题一开始就是非线性的,如用牛顿定律描述的行星运动微分方程(二体问题及三体问题)。大多数力学问题本质就是非线性的,它们一般由非线性方程来描述。自从 17 世纪牛顿奠定了力学的基础(经典力学)之后,到 19 世纪末,力学已形成了相当完整的理论体系。在此期间,力学主要放在定量研究上。对于非线性动力学方程,人们除了直接寻找它们的封闭形式的解析解之外,还经常用线性化方法化为线性近似方程去求解。然而,理论和实验分析都发现,非线性方程在大多数情况下不存在封闭形式的解析解。此外,线性化方法只有在一定的条件下才能给出较为准确的结果。

随着科学技术的发展,许多实用技术问题需要知道系统的长时期行为。例如,估计卫星在轨道上运行寿命问题。这里的寿命问题不是指构成卫星硬件的使用寿命。我们都知道,当卫星发射到预定轨道后,由于各种因素的作用,随着时间的推移,卫星会慢慢地偏离预定轨道,当偏离到一定的程度时,卫星不能完成所要求完成的任务,这时或者废弃该卫星,或者通过变轨方法将其变回到预定轨道附近。但由于卫星所带的燃料有限,我们只能对其进行有限次变轨。因此无论怎样卫星的飞行寿命也会结束。估计卫星在预定轨道飞行的起始时间到废弃该卫星的时间就是要研究描述卫星在轨道飞行运动方程的长时期行为。另外,各类控制问题也属于系统的长时期行为研究问题。控制就是在系统上施加一定的影响,使系统在一段时间内从一个状态达到某一预定的状态。

非线性动力学就是随着力学本身发展的要求和解决各种实际问题的需要而产生的。非线性动力学研究的是系统的定性行为和定量行为,尤其是系统的长

时期行为。其中主要包括系统的各种稳定性，描述轨道的混沌现象，以及描述随参数改变的系统的分叉行为。

为了让学者易于理解本书的内容，作者将在本绪论中首先给出一些最原始的概念。然后，我们将在以后各章中给出这些原始概念对应的严格的数学定义和举例说明。

1.1 什么是动力系统

动力系统是指按时间发展的系统。例如，一个物体在外力的作用下其运动状态随着时间的变化而变化，这就是一个动力系统。描述物体的这种按时间变化的规律就是牛顿运动方程。因此，在数学上就把牛顿运动方程称为一个动力系统。描述流体运动的 Navier-Stokes 方程是一个动力系统。描述虫口变化的递推关系 $x_{n+1}=1-\mu x_n^2$（$\mu\in(0,2)$，$x_n\in[-1,1]$，n 的单位为年）也是一个动力系统。

牛顿运动方程和 Navier-Stokes 方程描述的系统是按连续时间变化的，因此称这种系统为连续动力系统；而虫口模型描述的系统是按离散时间变化的，因此称这种模型为离散动力系统。事实上，连续动力系统的离散化就成为离散动力系统。例如，解常微分方程及偏微分方程的数值方法，就是把连续动力系统化为离散动力系统。

动力系统可按不同的标准进行分类。例如，上面以时间为标准将动力系统分为连续动力系统和离散动力系统；而以维数为标准时可分为有限维动力系统和无限维动力系统等，Navier-Stokes 方程是无限维动力系统。

1.2 什么是非线性动力学

非线性动力学是研究非线性动力系统的各种运动状态的定性和定量变化规律（即动力学特性），尤其是系统的长时期行为。

经典非线性动力学是以摄动（或称为扰动）、渐近分析的方法研究弱非线性弱耦合的系统。而现代非线性动力学与经典非线性动力学不同，研究的是系统的定性和定量变化规律，其使用的方法是精确方法，所研究的系统具有强非线性性，其研究对象主要包括分叉、混沌、分形、孤立子等新的现象，其主要任务是探索非线性力学现象的复杂性。

1.3 奇 点

奇点的概念来自于物理概念“源”和“汇”,以及来自理论力学中平衡的概念。太阳是光源,其光线从太阳出发射向各个方向。电灯也是如此。“源”有其数学对应概念,也就是数学上一种不稳定奇点。“汇”也有实际模型,试想像一下“漩涡”,在“漩涡”附近放一小纸片,小纸片将流入“漩涡”中心,这个中心就是“汇”;再试想像一下如在地势低洼处有一个洞,其四周的水将流入洞中 ,这个洞就是“汇”。“汇”对应数学上稳定“奇点”。

下面回忆一下理论力学中物体处于平衡的概念:在惯性系中,一个物体处于平衡是该物体相对该惯性系处于静止或做匀速直线运动。众所周知,一个质量为 m 的质点,若其运动速度为 v,在外力 $F=F(v)$作用下的运动满足牛顿运动方程 $m\dot{v}=F$。从这个方程知,当物体处于平衡时,有 $\dot{v}=0$,从而此时 $F(v)=0$。从这个思想出发,我们可以定义动力系统的奇点(或平衡态)。

动力系统的奇点(或平衡态):它是动力系统变量的一组值,关于这组值,系统不随时间变化而变化,即奇点是系统不随时间而变化的解。

① 对于连续动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$$

若 $\boldsymbol{x}^*$ 是它的一个奇点,因 $\boldsymbol{x}^*$ 与时间无关,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*/\mathrm{d}t=0$,因而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)=\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*/\mathrm{d}t=0$,即奇点是代数方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$ 的解。反之也成立。

② 同理可证,对于离散动力系统

$$\boldsymbol{u}_{n+1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_n) \qquad \boldsymbol{u}_{n+1},\boldsymbol{u}_n\in\mathbf{R}^n$$

它的奇点是代数方程 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$的解,因此也叫不动点。

下面我们将给出奇点的几何分类。动力系统的奇点是微分方程的一组解。其分类方式受到“汇”与“源”的概念的启发,即考虑奇点附近的轨线随着时间无限增加时是进入奇点,还是远离奇点。

奇点的稳定性:若奇点在受一小扰动后,当时间无限增加时返回该奇点,则称该奇点是稳定的,也把这种奇点称为“汇”。以此为标准,将奇点分为稳定奇点和不稳定奇点。进一步,我们可以把不稳定奇点再分为两类:一类与“源”的概念相对应,即奇点附近的任一轨线随着时间无限增加时,总是远离奇点;另一类是介于“汇”与“源”之间的奇点叫做“鞍”,在“鞍”的附近,当时间无限增加时,有轨线进入奇点,也有轨线远离奇点。

我们可以用奇点附近的轨线分布图(即奇点的局部相图)来描述奇点与其附近轨线的关系。各种奇点的相图如图 1.1 ~ 图 1.4:

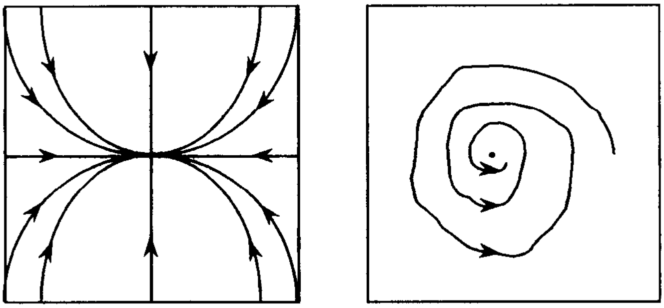

图 1.1　平面上“汇”的相图

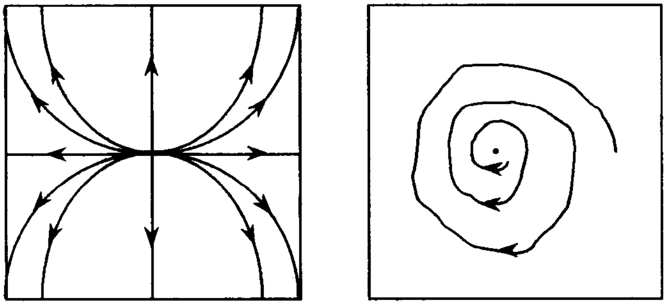

图 1.2　平面上“源”的相图

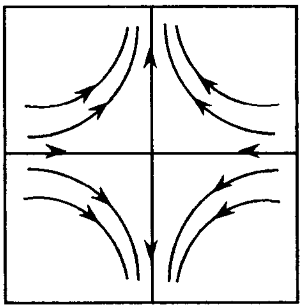

图 1.3　平面上“鞍”的相图

考虑单摆运动,其牛顿运动方程为 $\ddot{\varphi} = a\sin\varphi$。这个方程有两个奇点 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi$。如果考虑实际情况,即有空气阻力的情况下,在 $\varphi = 0$ 附近将单摆放下后,在时间无限增加时,单摆的振幅越来越小,最后停在奇点位置(平衡位置),因此 $\varphi = 0$ 是稳定奇点(如图 1.5)。但在 $\varphi = \pi$ 附近处放下单摆后,单摆向下摆,

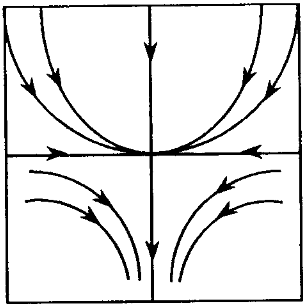

图 1.4 平面上“半鞍”的相图

不会回到 $\varphi=\pi$ 的位置，因而 $\varphi=\pi$ 是不稳定奇点(如图 1.6)。

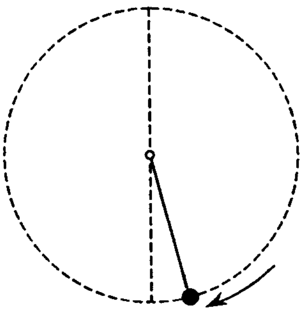

图 1.5 $\varphi=0$ 是稳定奇点

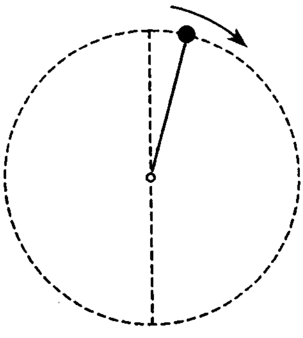

图 1.6 $\varphi=\pi$ 是不稳定奇点

1.4 闭 轨

闭轨也称为周期轨。对于这种轨道的研究有十分重要的意义。对于闭轨的稳定性研究，能解释地球为什么总是围绕太阳转，人造卫星能在其轨道运行若干年。1926 年 Van der Pol 在研究三极管等幅振荡时，研究了微分方程 $\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$，证明该方程存在孤立的闭轨。这一结论在无线电发报发明过程中起了重要作用。这结论说明在孤立的闭轨附近发出的无线电波在其传播过程中保持一定波形，不会使其从一个地方传到另一个地方后变得不能辨别、或完全消失。

闭轨：它是动力系统过某一点的一根轨线，从该轨线上任一点出发，当时间增加时，在有限时间内返回该点。

与奇点的几何分类类似，我们也可以把闭轨分为两类。一类是稳定的闭轨，另一类是不稳定的闭轨。

稳定闭轨：若在闭轨附近出发的轨线，当时间无限增加时，无限接近该闭轨，称这种闭轨为稳定闭轨。

地球围绕太阳作周期运动，由于其运行轨道是稳定的闭轨，所以虽然有许多因素的干扰，但地球总能回复其原运行轨道。

不稳定闭轨也可以分为两类：一类是闭轨附近的所有轨线随着时间无限增加时，都远离该闭轨；另一类是既有远离该闭轨的轨线，也有无限接近该闭轨的轨线。在平面上可以画出它们的相图(即闭轨附近的轨线分布图)，如图 1.7，1.8，1.9 所示。不稳定轨道的性质可以用来解释卫星为什么在运行若干年后会坠毁。

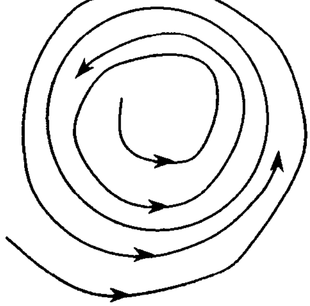

图 1.7 平面上“稳定闭轨”相图

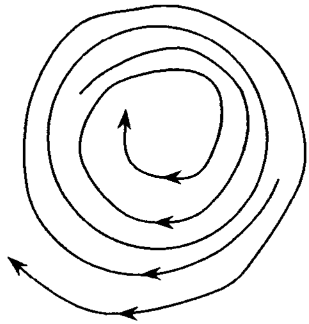

图 1.8 平面上“不稳定闭轨”相图

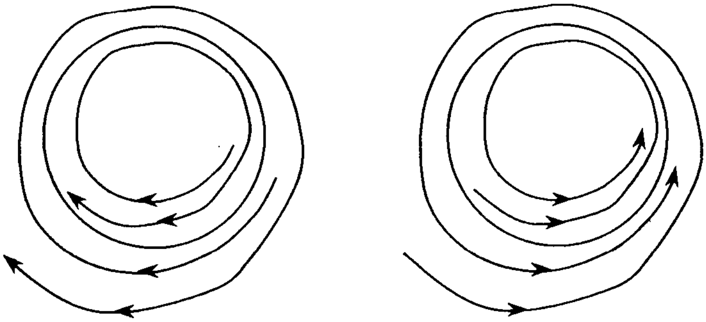

图 1.9 平面上“半稳定闭轨”相图

1.5 同宿轨和异宿轨

同宿轨和异宿轨在非线性动力学中是一个十分重要的研究对象。它和奇点及闭轨一起是分叉与混沌理论中起关键作用的因素。

同宿轨：当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时，进入同一奇点的轨线称为同宿轨（见图 1.10）。

异宿轨：当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时，进入不同奇点的轨线称为异宿轨（见图 1.11）。

同宿轨或异宿圈的破裂是通向混沌的一条途径。

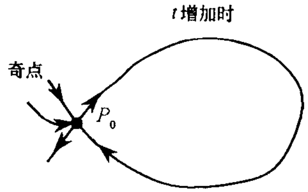

图 1.10 “同宿轨”图像

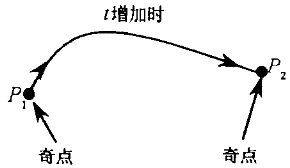

图 1.11 “异宿轨”图像

1.6 分 叉

分叉是研究带有参数的动力系统随着参数的改变，系统的定性行为和定量行为的改变。

这里的定性行为主要是指奇点和闭轨的稳定性及同宿轨与异宿轨的破裂。而定量行为主要是指系统的奇点与闭轨的个数的变化。

在这里我们不用数学上的结构稳定性来定义分叉，它是一种拓扑上的定义，对于工科学生难以理解。本书中采用比较直观的定义。

1.7 混 沌

到目前为止，还没有一个很好的关于混沌的操作定义。在数学上有一种Smale马蹄意义下的混沌定义，这个定义对于工科学生来讲难于理解。但当它联系到同宿轨与异宿轨时，它是一个有效的可操作的定义。还有许多其他的混沌定义方式，在这里不一一指出。

然而，不论哪一种混沌定义，都有一个共同的特点：在参数空间的一定范围内，确定性的非线性系统出现长期行为对初值的敏感依赖性。混沌系统是终极端敏感地依赖于初始状态的系统。在混沌运动中，初始值非常靠近的两条轨道，随着时间的发展会指数分离。这也就是说，对轨道的长时期行为不可能做出准

确的预测。

对于保守系统，满足不同初始条件的解不会同时趋于同一点集；而对于耗散系统，满足不同初始条件的解可能趋于同一点集，这种点集被称为吸引子。混沌运动的吸引子通常具有非整数维，因而也称为奇怪吸引子。

1.8 孤立子

它是动力系统的一种特殊解，这种解在运动过程中保持能量守恒，保持一定的波形。描述浅水波运动的 KdV 方程 $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$ 是一非线性偏微分方程，要求出它的一般解是十分困难的。然而它的孤立子解能很好地解释浅水波的运动。

思考题

1. 试找出在你所从事的专业范围内的一些非线性动力系统。
2. 你能找出一些非动力系统吗？