国家工科数学教学基地建设系列教材

概率论与数理统计

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICS STATISTICS

栾长福　梁满发　编著

华南理工大学出版社

国家工科数学教学基地建设系列教材

概率论与数理统计

栾长福　梁满发　编著

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/栾长福，梁满发编著. —广州：华南理工大学出版社，2004.8
（国家工科数学教学基地建设系列教材）
ISBN 7-5623-2099-3

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①栾…②梁…　Ⅲ. ①概率论②数理统计　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 057586 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020－87113487　87110964　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com
责任编辑：黄丽谊
印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂
开　　本：787×960　1/16　**印张**：16　**字数**：340 千
版　　次：2004 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～3 000 册
定　　价：26.00 元

总　序

自 1995 年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。“国家工科数学教学基地建设系列教材”的出版，就是这些成果的重要部分。

21 世纪是全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务。

大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然，这三种能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学领导与华南理大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004 年 8 月

序　言

概率统计是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科。概率统计是数学的一个有特色的分支。一方面，它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和方法，内容丰富，结果深刻；另一方面，它与其他数学分支又有紧密的联系，是近代数学的重要组成部分。

目前，概率统计的理论和方法已广泛地应用于工业、农业、军事、经济和科学技术中。在理论联系实际方面，概率统计是数学最活跃的分支之一。

概率统计的理论和方法向各个基础学科、工程学科的渗透，是近代科学技术发展的特征之一。概率统计与其他学科相互结合衍生出不少边缘学科，如生物统计、统计物理、数理金融等。同时，概率统计又是许多新的重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论、证券投资理论和人工智能等。

今天，几乎所有的高等学校在教学计划中都设置了概率论与数理统计课程。以使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们解决某些实际问题的能力。编写本书的目的就在于为上述课程提供教材或基本教学参考书。

本书内容分为三大部分：概率论、数理统计和统计软件简介。本书内容的学习，要求读者具有微积分的基础知识，数理统计部分还要求读者懂得线性代数。本书每章后均附有小结和习题，以供老师和同学教学之用。为方便报考研究生的同学，书中附录Ⅱ给出了 2000～2004 年全国考研的概率统计试题及解答。书末还附有名词索引。

标有星（*）号的章、节、段，教师可根据需要选上或跳过此部分内容。

本书的编写得到华南理工大学数学科学学院院长吴敏教授及工程数学首席教授洪毅的关心和支持，在此表示衷心地感谢。

由于水平所限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2004 年 6 月 10 日

目　　录

第 1 章

随机事件与概率

第 1 章　随机事件与概率

1.1　概率论的研究对象

自然界有许多现象，有些我们完全可以预言它在一定的条件下是否会出现，例如："太阳出自东方"，"在标准大气压下，纯水加热到100℃ 时必定沸腾"等等是一定会出现的。这些现象称为确定性现象。

1.1.1　随机现象

自然界还有许多现象，它们在一定的条件下可能出现也可能不出现。例如天气现象，"明天是否下雨"；又如经济现象，"明天股价是否上涨"等等，这些现象称为非确定性现象。如果这些现象会重复呈现，并且人们可以通过试验(观察或记录)去认识其规律性，则称其为随机现象。

随机现象广泛存在，因此，作为研究随机现象规律性的数学分支 —— 概率论与数理统计，就应运而生。

1.1.2　随机试验

随机现象的规律性一般是在相同的条件下，通过大量的重复试验(或观察)而获得的。这种试验在概率统计里称为随机试验。

随机试验的特征如下：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，但明确知道其所有可能会出现的结果；

(3) 在每次试验前，不能确知这次试验的结果，但可以肯定，试验的结果必是所有可能结果中的某一个。

例如：

E_1：抛一枚硬币。

E_2：从一副扑克牌中任取一张牌(图 1 - 1)。

E_3：某电话一天接到呼叫的次数。

E_4：某灯泡的寿命。

E_5：某股票明日的价格(图 1－2)。

以上这些都可以看作是随机试验。其中，E_i 表示第 i 个随机试验。

图 1－1　扑克牌

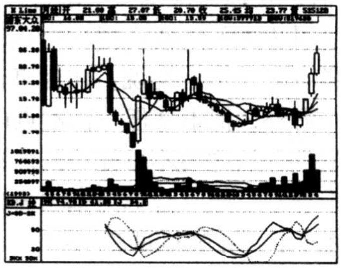


图 1－2　股票走势图

1.2　随机事件

1.2.1　样本空间

在讨论一个随机试验时，试验的所有可能结果的集合是明确知道的，称这个集合为该试验的样本空间，常用 Ω(或 S) 表示，其元素称为样本点，常用 ω 记之，它是试验的一个可能结果。

1.1 节中提到的 5 个随机试验，其样本空间是：

$\Omega_1 = \{$正面，反面$\}$；

$\Omega_2 = \{$黑桃 A，黑桃 2，…，黑桃 K ，…，大王，小王$\}$；

$\Omega_3 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$；

$\Omega_4 = [0,\ \infty) = \{x \in R \mid 0 \leqslant x < +\infty\}$；

$\Omega_5 = \{$上一日收市股价 − 上一日收市股价 × 10%，上一日收市股价 + 上一日收市股价 × 10%$\}$。

例如，上一日收市股价为 10 元，则 $\Omega = [10 - 10 \times 10\%,\ 10 + 10 \times 10\%] = [9,\ 11]$

在大多数情况下，无法确切定出一个试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个(尽可能小的) 范围，这时，就用这个范围作为该试验的样本空间。

1.2.2　随机事件

在实际问题中，面对一个随机试验，我们可能会关心某些特定的事情在重复试验下是否会发生。例如，投资者关心明日收市股价是否上涨，即明日股价 > 今日收市价，它

是样本空间的一部分。因此，称样本空间的一些子集为随机事件，简称事件，通常用大写英文字母 A、B、C 等记之。当一次试验结果出现在这个集合时，即当一次试验结果 $\omega \in A$ 时，就称这次试验中事件 A 发生；当结果 $\omega \notin A$ 时，就称 A 不发生。

为了讨论方便，我们把一个试验的样本空间 Ω 也作为事件，由于每次试验的结果必是某个样本点，这就是说，作为事件，Ω 在每次试验中都是必然要发生的，故称之为必然事件。另外，把不含任一样本点的空集 $\varnothing$ 看作是一事件，由于在每次试验中这个事件都不会发生，故称为不可能事件。有时，也把单个样本点 ω 称作是试验的基本事件，即只含单个样本点的集合称为基本事件。

例 1－1 在随机试验 E_2 中，试用样本空间的子集表示下列事件：

A =“取到黑桃”= {黑桃 A，黑桃 2，…，黑桃 K}

B =“取到 K”= {黑桃 K，红心 K，梅花 K，方块 K}

C =“取到黑牌”= {黑桃，梅花，小王}

D =“取到黑桃 K”= {黑桃 K}

H =“取到红心”= {红心 A，红心 2，…，红心 K}

1.3 事件的关系和运算

一个较为复杂的事件，通过种种关系，可使其与一些较为简单的事件联系起来，这时，我们就可设法利用这种联系，通过简单的事件去研究那些较为复杂的事件，用已知的事件去表示未知的事件。

1.3.1 事件的关系

1. 事件的蕴含与包含

若当事件 A 发生时 B 必发生，则称 A 蕴含 B，或者说 B 包含 A，记作 $A \subset B$。

作为样本空间的子集，事件 A 蕴含事件 B，即集合 A 是 B 的一个子集。

显然，任一事件 A 都蕴含必然事件 Ω。在例 1－1 中，明显地有“取到黑桃”蕴含“取到黑牌”，即 $A \subset C$。

通常可用文氏图(Venn diagram)帮助说明事件的关系和运算。如图 1－3 所示，将试验设想成是向一方框内投点，方形图表示必然事件 Ω，而事件 A、B 分别表示“所投的点落在图中所示封闭曲线内部”的事件。如果点落在 A 内，当然也是落在 B 内的，这就是 A 蕴含 B。由图可知，A 蕴含 B 当然也就是 B 包含 A。

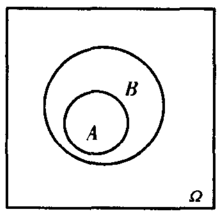


图 1－3 $A \subset B$

2. 事件的相等

若 A 与 B 互相蕴含，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相

等，记为 $A = B$。

两事件 A、B 相等，即它们是样本空间的同一个子集，充其量不过是代表着同一事件的不同说法而已。

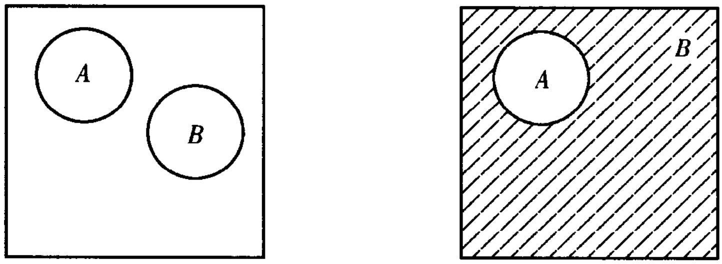
3. 事件的互斥(或称互不相容)

若事件 A、B 不能在同一次试验中都发生(但可以都不发生)，则称它们是互不相容或互斥的。

若一些事件中的任意两个事件都互不相容，则称这些事件是两两互不相容的，或简称互不相容的。

互不相容事件作为样本空间的子集，其交集是空集，如图 1 - 4a 所示。

在例 1 - 1 中，事件 $A = \{$取到黑桃$\}$ 与 $H = \{$取到红心$\}$，显然是互不相容事件。



(a) 互斥　　(b) 对立

图 1 - 4

4. 事件的对立(或称逆)

互不相容的一个重要特例是"对立"。称事件

$$B = \{A \text{ 不发生}\}$$

为 A 的对立事件或逆事件，常记作 $\bar{A}$。换言之，A 不发生就是 $\bar{A}$ 发生。

作为样本空间的子集，逆事件 $\bar{A}$ 是 A 相对于全集 Ω 的余集(或补集)，如图 1 - 4b 所示。

例 1 - 1 所示的事件 A 与 H 是互不相容的，但不是互逆事件。

由图 1 - 4b 可直接看出，若 A 与 B 互不相容，则

$$B \subset \bar{A} \text{ 及 } A \subset \bar{B} \tag{1 - 1}$$

1.3.2　事件的运算

1. 事件的并(或称和)

对给定的事件 A、B，定义一个称为并或和的事件，以 $A \cup B$ 记之。

$$A \cup B = \{A \text{ 发生或 } B \text{ 发生}\}$$

$$= \{A、B 至少有一个发生\} \quad (1-2)$$

作为样本空间的子集，集合 $A \cup B$ 正是集合 A、B 之并。当已知 A、B 互不相容时，常将 $A \cup B$ 记成 $A + B$。

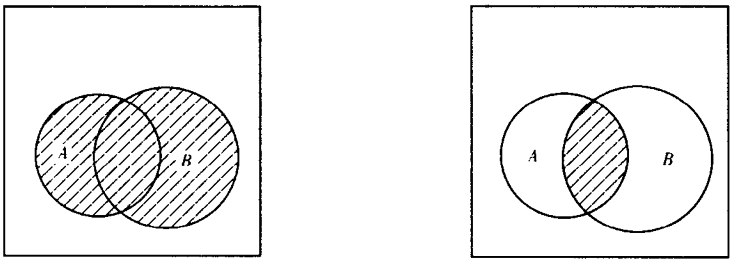
如图 1－5a 所示，$A \cup B$ 表示“投点落入由 A、B 外缘所围成的区域”的事件，这个区域比 A、B 都大(至少不会小)，由 A、B 两部分合并而成。当然，作为集合，重复部分只计入一次。在例 1－1 中，事件“取到黑牌”＝“黑桃”∪“梅花”∪“小王”。

一般地，若 $A \subset B$，则必有 $A \cup B = B$，称之为并的“吸收律”。

事件的并，可自然地推广到多个事件的情形，如 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{A_1 发生或 A_2 发生 \cdots 或 A_n 发生\}$$
$$= \{A_1，A_2，\cdots，A_n 中至少有一个发生\}$$

类似地，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为一列事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 中至少有一个发生的事件。



(a)$A \cup B$ (b)AB

图 1－5 事件的运算

2.事件的交(或称积)

对给定事件 A、B，定义一个交或积的事件，以 AB 记之。

$$AB = \{A 发生且 B 发生\}$$
$$= \{A、B 同时发生\} \quad (1-3)$$

作为样本空间的子集，集合 AB 是 A、B 的交集，故也常将交事件 AB 记作 $A \cap B$。

如图 1－5b 所示，AB 表示“投点落入 A、B 交叠部分区域(图中斜线部分)”的事件。显然，AB 既蕴含 A 也蕴含 B。

$$AB \subset A，AB \subset B$$

若事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 互不相容，则

$$A_iA_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

若 A、B 互为对立事件，则

$$A \cup B = \Omega,\ A \cap B = \varnothing$$

事件的交也可自然地推广到多个事件的情形，如 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，是

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \text{ 同时发生}\}$$

类似地，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 则是一系列事件 A_1，A_2，…，A_n，… 全都发生的事件。

例 1－2　设 A、B、C 是事件，则

(1)“A、B 都发生，但 C 不发生”可表示为 $AB\overline{C}$；

(2)“A、B、C 都发生”可表示为 ABC；

(3)“A、B、C 中恰有两个发生”可表示为 $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$；

(4)“A、B、C 中至少有两个发生”可表示为 $AB \cup BC \cup AC$；

(5)“A、B、C 中有不多于一个事件发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$；

(6)“C 发生，但 A、B 均不发生”可表示为 $C\overline{A}\,\overline{B}$。

若将(4) 的“A、B、C 中至少有两个发生”表示为

$$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$

也是可以的。

例 1－3　在射击比赛中，一选手连续向目标射击 3 次，若令

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 次射击命中目标}\}\quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

试用这 3 个事件 A_1、A_2、A_3 表示出下面的事件：

(1)$B = \{$3 次射击都命中目标$\}$；

(2)$C = \{$3 次射击至少有 2 次命中目标$\}$；

(3)$D = \{$至少有 1 次未命中目标$\}$。

解　(1) 当且仅当 A_1、A_2、A_3 都发生时，事件 B 发生，故有

$$B = A_1A_2A_3$$

(2) 当且仅当“3次射击中恰有2次命中目标”(E)或“三次射击皆命中目标”(B)发生时，事件 C 发生，即 $C = B + E$。

其中：E_1 是第 2、3 次射击命中目标，而第 1 次未命中，即 $E_1 = \overline{A}_1A_2A_3$；

E_2 是第 1、3 次射击命中目标，而第 2 次未命中，即 $E_2 = A_1\overline{A}_2A_3$；

E_3 是第 1、2 次射击命中目标，而第 3 次未命中，即 $E_3 = A_1A_2\overline{A}_3$。

于是有

$$C = B \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 = A_1A_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3$$

由上式可看出，B、E_1、E_2、E_3 是互不相容事件。

另外，将 C 写成

$$C = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$$

也是正确的，而且不难利用事件相等的规律证明这两个表达式是相等的。但这里各“加项”并不互不相容。

将一个“复杂事件”表示成若干个简单事件的运算结果，其途径并不是惟一确定的，在讨论问题时要选择有利于解决具体问题的途径去处理。

(3) 事件 D 可用文字表述为

“至少有一次未命中目标” = “恰有一次命中” + “恰有两次命中” + “三次皆不命中”

由此可写出 D 的表达式为

$D = \bar{A}_1A_2A_3 + A_1\bar{A}_2A_3 + A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_2\bar{A}_2\bar{A}_3$

但更为直接的是利用“至少”这一表述而写出的表达式：

$$D = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$$

可以证明，D 的这两个表达式是相等的。

3. 事件的差

两个事件 A、B 之差，记为 $A - B$，其定义是

$$A - B = \{A\text{ 发生但 }B\text{ 不发生}\} = \{A\text{ 发生且 }\bar{B}\text{ 发生}\}$$

从定义可看出：

$$A - B = A\bar{B}$$

根据差的定义，也可将例 1 - 2 中(6) 的事件表示为 $C - (A \cup B)$。

作为样本空间的子集，事件 A 与 B 的差正是差集集合 $A - B$，有

$$A - B = A - AB \tag{1-4}$$

一般来说，$(A - B) + B \neq A$，而是

$$(A - B) + B = A \cup B \tag{1-5}$$

式中，$(A - B)$ 与 B 是互不相容的。

在例 1 - 1 中，$C - A$ 表示“取到的是黑牌但不是黑桃”的事件。

例 1 - 4 图1 - 6是一个开关电路图，设 A_i 表示事件“第 i 只开关闭合”，$i = 1, 2, 3, 4$。试问如何表示“灯亮”这一事件 B。

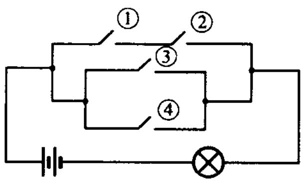


图 1 - 6 开关电路图

解 要“灯亮”必须要电路接通，而电路只有当开关 ①、② 同时闭合或开关 ③、④ 至少有一个闭合时，才能接通，即当 A_1A_2、A_3、A_4 这三个事件中至少有一个出现时，灯才亮，故 $A_1A_2 \cup A_3 \cup A_4$ 表示“灯亮”，即

$$B = A_1A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

1.3.3　运算法则

前面对事件引进了和(并)、积(交)、差的运算，虽然借用了算术运算的名称，但要注意的是，算术运算的法则在此并不全都成立。如 $A+A=A$，而不是 $2A$；$AA=A$，而不是 A^2，等等。事件的运算具有集合运算的特征，因此有着类同的运算法则。

对并、交的运算有

$$\left.\begin{array}{ll} A\cup B=B\cup A,\ AB=BA & (\text{交换律}) \\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\ (AB)C=A(BC) & (\text{结合律}) \\ A(B\cup C)=AB\cup AC & (\text{分配律}) \end{array}\right\} \quad (1-6)$$

对逆事件的运算有

$$\overline{\overline{A}}=A \qquad (1-7)$$

事件的运算还有如下的对偶律：

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B} \qquad (1-8a)$$

$$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B} \qquad (1-8b)$$

式(1－8a)为"和的逆等于逆的积"，而式(1－8b)则是"积的逆等于逆的和"。由式(1－6)、式(1－8a)、式(1－8b)表示的事件运算法则，对多个事件也是成立的，此处不再一一赘述。将式(1－7)与式(1－8a)、式(1－8b)或其推广形式结合起来运用，常有助于解决问题。

*1.3.4　事件域

在1.2.2中，称样本空间的一些子集为随机事件，这一些子集是哪些呢?因此，需要界定之。

此工作必须满足两个要求：

① 人们所感兴趣的 Ω 的子集应在其中。因为需要知道它发生可能性的大小。

② 该范围不应过宽，以免对其处理(度量其发生可能性的大小)有困难。

定义　称样本空间 Ω 的一些子集所组成的集合 $\mathscr{F}$ 为事件域。

如果满足以下 3 个条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$；

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$；

称 $\mathscr{F}$ 中的元素为事件。

不可能事件在 $\mathscr{F}$ 中。不难证明，$\mathscr{F}$ 中的元素对事件的各种有限(及可列)运算封闭。从而保证了事件域的够用性。事实上，它是为概率的定义做准备的。