21 世纪高等院校教材

高等数学典型应用实例与模型

王宪杰　侯仁民　赵旭强 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

高等数学典型应用实例与模型

王宪杰　侯仁民　赵旭强　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为配合高等数学的教学而编写的辅助教材，共由100个应用实例构成，知识面广，涉及物理、力学、天文、气象、环境、控制、通信、机械、材料、电气、电子技术、光学、化学、化工、能源、交通、军事、地理、考古、生命科学、医学、社会学、经济、管理等领域，对各学科大学生学习高等数学课程，更多地了解其应用价值都有很好的帮助.

本书可作为普通高等院校大学生（除文科外）、数学教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型应用实例与模型/王宪杰，侯仁民，赵旭强编著．—北京：科学出版社，2005

（21世纪高等院校教材）

ISBN 7-03-015372-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．①王…②侯…③赵…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第052181号

责任编辑：姚莉丽　祖翠娥/责任校对：朱光光

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2005年6月第 一 版　　开本：B5（720×1000）

2005年9月第二次印刷　　印张：13 1/4

印数：7 001—9 500　　字数：247 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　　言

伟大的物理学家和数学家牛顿（Newton），在研究变速运动时创立了微积分学．他以微积分作为工具，基于开普勒三定律和他自己创立的牛顿第二定律，推导出了万有引力定律．而在此之前，虽然有不少科学家想得到万有引力定律的数学表达式，但是由于在当时还没有计算变速运动的数学方法，缺少数学知识支持的科学家们最终都未得到万有引力定律．因此，没有微积分就不会有万有引力定律，微积分被称为万有引力定律的两大基石之一．

意大利生物学家狄安科纳（D'Ancona）发现，在第一次世界大战期间地中海沿岸港口捕获的几种鱼类占捕获总量百分比的资料中，软骨食肉鱼占总捕获量的百分比有明显的增加．而捕获的各种鱼的比例近似地反映了地中海里各种鱼类的比例．战争期间捕鱼量大幅下降，但捕获量的下降为什么会导致食肉鱼比例的上升呢？为解释这一物种间的竞争、捕食、互利共生关系，1926 年，意大利数学家沃尔泰拉（Volterra）提出了关于“捕食者与被捕食者”的双物种间竞争数学模型，用以解释狄安科纳提出的地中海某些鱼类数量的起伏现象．应该说这是早期具有代表性的数学模型．

数学起源于计数、丈量土地等实际生产活动，因此数学一开始就是从应用中诞生的．在第二次世界大战以前，应用数学的研究对象绝大部分与物理学有关．二战期间促成了数学在力学和其他工程方面的应用．高等数学在高速飞行、核弹设计、火炮控制、物资调运、密码破译及军事运筹等方面发挥了重大作用．恩格斯曾在《自然辩证法》中说：“数学的应用，在刚体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中就已经比较困难了；在物理学中是实验性的和相对的；在化学中是最简单的一次方程式；在生物学中等于零．”现在的数学已远远不是恩格斯所描述的那样了．数学几乎已经拓展到每个学科和领域，而且在其中起着关键的不可替代的重要作用，数学的重要性也已得到广泛的认同．现在的数学已从以往传统的、相对成熟的领域如力学、物理学、天文学及传统工业领域扩展到化学、生物学等其他各门自然科学及高新技术领域．马克思曾说过：“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步．”今天的数学科学与其他科学之间的相互关联、相互依赖、相互作用和相互促进已被实践所证明．

众所周知，高等数学在我们所知道的和所能涉及的领域都有着成功的应用．非常遗憾的是，这些应用目前在国内几乎所有“高等数学”教科书中很少有所体

现，为了说明数学定义、定理的实际背景仍采用古典几何学和物理学的相关知识作为应用实例．学生学习高等数学仅仅根据教材上所举的理想化的例子是不会欣赏到高等数学这门课程的精华和真正魅力．讲授高等数学课的教师欲真正提高教学质量，使学生知道高等数学绝不仅仅在物理学、化学等领域有应用，而是在我们生活周围所涉及的所有方面都能得到成功的应用，要使学生学习高等数学有目的、有兴趣，就应该更多地提供一些应用实例．

现在，高等院校几乎所有专业都要开设高等数学这门课，开设该课程的目的不仅仅是要求学生掌握该课程的基本理论，更重要的是培养运用所学理论知识解决实际问题的能力．因此，编写一本与实际应用背景联系十分密切的高等数学配套书籍是十分必要的．为适应这种需求，结合作者多年从事高等数学教学和实际课题研发工作的经验，特撰写本书．作者希望本书的出版能对从事高等数学教学的教师更多地掌握一些具体应用背景实例有所帮助，能够激发学生学习高等数学的兴趣，明确学习高等数学的目的，能对科研工作者更多地了解数学及其应用起到抛砖引玉的作用．

本书以专题形式给出了 100 个应用实例与模型，内容涉及物理、力学、天文、气象、环境、控制、通信、机械、材料、电气、电子技术、光学、化学、化工、能源、交通、军事、地理、考古、生命科学、医学、社会学、经济、管理等领域．每个专题如不能给出完满的解答或涉及更深更广的知识，我们列出了参考文献．由于水平有限，不足之处在所难免，恳请读者批评指正．

作　者

2005 年 5 月

目　　录

1. 手表的分针与时针何时重合

专题摘要 针对钟表的分针与时针重合问题，定义了每个整点时间段内的时针与 12:00 的时针夹角 ω. 通过建立夹角 ω 与该时间段内的任意时刻 t 的函数关系，分别求出了 12 小时内分针与时针 12 次重合的具体时刻.

从中午 12:00 开始到午夜 00:00 这 12 个小时中，手表的分针和时针要相遇 11 次，相遇的时间应各在何时呢？

我们把手表盘看成是 360°的刻度盘，那么时针每 60 分钟按顺时针方向旋转 30°(每分钟按顺时针方向旋转 0.5°)，而分针每 60 分钟按顺时针方向旋转 360°(每分钟按顺时针方向旋转 6°). 由于分针从指向 12:00 的时刻开始到按顺时针方向旋转一周后再次指向 12:00 所用的时间都是 60 分钟，所以用 $t(0\leqslant t\leqslant 60)$表示分针在任意时间段$[k,k+1](k=0,1,\cdots,11)$内的具体时刻. 在时间段$[k,k+1]$内的 t 时刻，手表时针张开的角度为 ω(图 1.1)，则 ω 是 t 的函数，记为 $\omega=\omega_k(t)(k=0,1,\cdots,11)$.

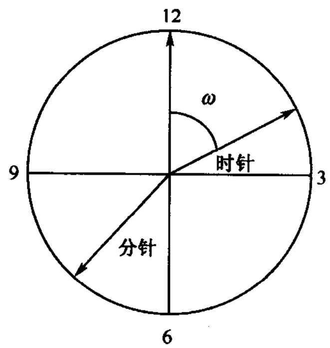

图 1.1 分针时针指示图

以 t 作为横轴，ω 作为纵轴建立平面直角坐标系(图 1.2)，则直线 L 和 l 的方

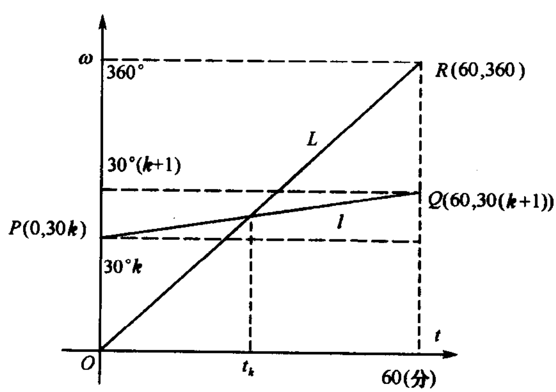

图 1.2 张角 ω 与时间 t 的关系图

程分别为

$$L:\omega(t)=6t, \tag{1}$$

$$l:\omega_k(t)=0.5t+30k, \tag{2}$$

当在时间段$[k, k+1]$分针和时针相遇时,应有 $\omega(t)=\omega_k(t)$,解得

$$t_k = \frac{60}{11}k \text{ 分}, \qquad k = 0,1,\cdots,11. \tag{3}$$

例如,$k=1$ 时,$t_1 \approx 5.4545$ 分,由于 $t_1 \approx 5.4545$ 分等于 5 分 27 秒 27,所以,从 12:00开始分针与时针第一次相遇(重合)的时间是在 01:5 分 27 秒 27. 完全类似地可得另外 10 次相遇时间如表 1.1 列出.

表 1.1 分针与时针重合时间表

重合次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
重合时刻	5.45 分	10.90 分	16.36 分	21.81 分	27.27 分	32.73 分	38.18 分	43.64 分	49.09 分	54.55 分	54.55 分
重合时间	1 点 5 分 27 秒	2 点 10 分 54 秒	3 点 16 分 21 秒	4 点 21 分 49 秒	5 点 27 分 16 秒	6 点 32 分 43 秒	7 点 38 分 10 秒	8 点 43 分 38 秒	9 点 49 分 5 秒	10 点 54 分 32 秒	12 点 0 分 0 秒

注:本问题还可以通过级数求和方法解决,读者可参阅文献[1].

2. 典型分段函数——我国工薪人员的纳税额是多少

专题摘要 根据中华人民共和国个人所得税法对月薪、薪金所得税率之规定,建立了月薪、薪金所得额与税率和纳税额的函数关系. 得出了月薪、薪金所得额与税率的函数关系是一个具有第一类间断点的不连续函数,月薪、薪金所得额与纳税额的函数关系为一连续的分段函数.

1980 年 9 月第五届全国人民代表大会第三次会议通过了中华人民共和国个人所得税法,1993 年第八届全国人民代表大会常务委员会第四次会议对个人所得税法进行了第一次修正,1999 年第九届全国人民代表大会常务委员会第十一次会议进行了第二次修正[2]. 修正后的个人所得税法规定:在中国境内有住所,或者无住所而在境内居住满一年的个人,从中国境内和境外取得的所得,应缴纳个人所得税;在中国境内无住所又不居住或者无住所而在境内居住不满一年的个人,从中国境内取得的所得,应缴纳个人所得税. 个人所得税的税种包括个人月薪、薪金所得等 11 项.

个人所得税的税率按月薪、薪金所得额度的大小而变化,因此纳税额也在变化. 个人所得税税率表如表 2.1:

表 2.1 个人所得税税率表(月薪、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20 000 元的部分	20
5	超过 20 000 元至 40 000 元的部分	25
6	超过 40 000 元至 60 000 元的部分	30
7	超过 60 000 元至 80 000 元的部分	35
8	超过 80 000 元至 100 000 元的部分	40
9	超过 100 000 元的部分	45

若某人的月薪、薪金所得为 x 元,所得税税率为 y,纳税额为 z 元,根据个人所得税税率表 2.1,x 与 y 的函数关系是一个具有第一类间断点的不连续函数,而 x 与 z 的函数关系为一典型的分段函数,在分段点处是连续的.

按税法规定,当 $x \leqslant 800$ 元时,不必纳税,此时,税率 $y=0$,纳税额 $z=0$;当 $800<x\leqslant 1300$ 元时,纳税部分为 $x-800$,税率 $y=5\%$,$z=(x-800)\times\frac{5}{100}$;当 $1300<x\leqslant 2800$ 元时,其中有 800 元不纳税,500 元应纳 5% 的税,剩余部分 $(x-1300)$ 应按 10% 的税率纳税,所以 $z=25+(x-1300)\times\frac{10}{100}$. 以此类推得函数关系 $y=f(x)$ 和 $z=g(x)$:

$$y=\begin{cases}0.00, & x\in[0,800],\\ 0.05, & x\in(800,1300],\\ 0.10, & x\in(1300,2800],\\ 0.15, & x\in(2800,5800],\\ 0.20, & x\in(5800,20800],\\ 0.25, & x\in(20800,40800],\\ 0.30, & x\in(40800,60800],\\ 0.35, & x\in(60800,80800],\\ 0.40, & x\in(80800,100800],\\ 0.45, & x\in(100800,+\infty),\end{cases}$$

税率函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.1 所示.

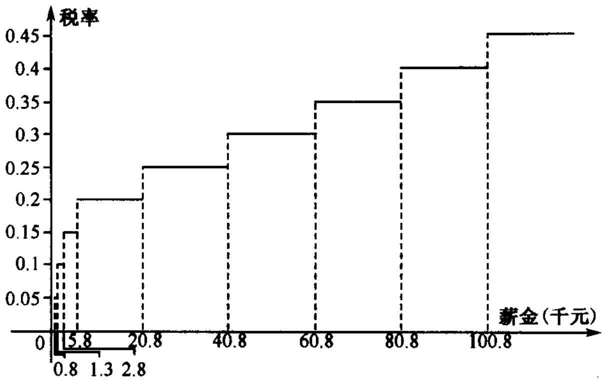

图 2.1　税率函数图

$$z=\begin{cases}0, & x\in[0,800],\\(x-800)\times 0.05, & x\in(800,1300],\\25+(x-1300)\times 0.10, & x\in(1300,2800],\\25+150+(x-2800)\times 0.15, & x\in(2800,5800],\\175+450+(x-5800)\times 0.20, & x\in(5800,20800],\\625+3000+(x-20800)\times 0.25, & x\in(20800,40800],\\3625+5000+(x-40800)\times 0.30, & x\in(40800,60800],\\8625+6000+(x-60800)\times 0.35, & x\in(60800,80800],\\14625+7000+(x-80800)\times 0.40, & x\in(80800,100800],\\21625+8000+(x-100800)\times 0.45, & x\in(100800,+\infty).\end{cases}$$

3．斐波那契数列与黄金分割问题

专题摘要　根据斐波那契(Fibonacci)所著《算法之术》提出的兔子繁衍问题,给出了描述该问题的斐波那契数列.通过求解该数列的极限得 0.618 黄金分割点,阐述了优选法的优点.文后列举了斐波那契数列在自然科学的其他分支中的应用.

斐波那契是欧洲中世纪颇具影响的数学家,公元 1170 年出生于意大利的比萨,早年曾就读于阿尔及尔东部的小港布日,后来又以商人的身份游历了埃及、希腊、叙利亚等地,掌握了当时较为先进的阿拉伯算术、代数和古希腊的数学成果,经过整理研究和发展之后,把它们介绍到欧洲.公元 1202 年,斐波那契的传世之作《算法之术》出版.在这部名著中,斐波那契提出了以下饶有趣味的问题.

有人想知道在一年中一对兔子可以繁殖多少对小兔子,就筑了墙把一对兔子圈了进去.如果这对大兔一个月生一对小兔子,每产一对子兔必为一雌一雄,而每

对小兔子生长一个月就成为大兔子，并且所有的兔子全部存活，那么一年后围墙内有多少对兔子. 这个问题就是斐波那契于 1202 年在他的《算法之术》中提出来的.

假设在 1 月 1 日将一对小兔子放进围墙内，用○表示一对小兔子，用●表示一对大兔子. 每对大兔子经过一个月后又繁殖出一对小兔子○，一对小兔子经一个月变成一对大兔子●，不过还未生小兔子. 于是可画出兔子繁衍图(图 3.1).

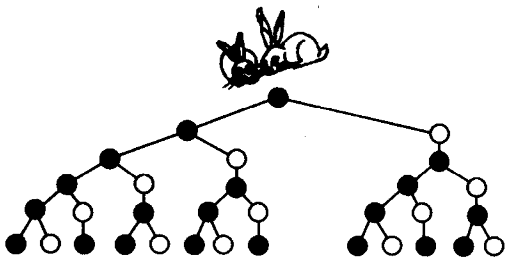

图 3.1　兔子繁衍图

由图 3.1 可知，6 月份共有 13 对兔子，从 3 月份开始每月的兔子总数恰好等于它前两个月兔子数的总和. 按此规律可写出数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots,$$

该数列称为斐波那契数列. 设其通项为 x_n，则该数列具有下述递推关系：

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

法国数学家比内(Binet)求出了通项 x_n 为

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

令人惊奇的是，比内公式中的 x_n 是用无理数的幂表示的，然而它所得的结果却是整数.

与斐波那契数列密切相关的有两个重要极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618. \tag{2}$$

下面证明(1)，(2)两式. 设 $u_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$，则

$$u_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{u_{n-1}}, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

数列 $\{u_{2n}\}$ 是单调减少的，数列 $\{u_{2n+1}\}$ 是单调增加的. 对一切 $n \geqslant 2$，$1 \leqslant u_n \leqslant 2$，即

数列$\{u_{2n}\}$, $\{u_{2n+1}\}$都是有界数列. 根据单调有界原理, 数列$\{u_{2n}\}$, $\{u_{2n+1}\}$都有极限. 设$\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}=u$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=v$, 分别对 $u_{2n}=1+\dfrac{1}{u_{2n-1}}$和 $u_{2n+1}=1+\dfrac{1}{u_{2n}}$取极限得

$$u=1+\frac{1}{v},\qquad v=1+\frac{1}{u}.$$

以上两式相减得

$$u-v=\frac{u-v}{uv},$$

从而得 $u-v=0$, 即$\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}$. 否则 $uv=1$. 因为 $u_{2n+1}>1$, 而由 $uv=u+1$ 得 $u=0$, 这是不可能的. 所以$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$存在, 记为 u^*, 从而有 $u^*=1+\dfrac{1}{u^*}$. 解方程得 $u^*=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为 $u_{2n+1}>1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=u^*=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$$

由于$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty} u_n-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

由此可见, 多月后兔子的总对数, 成年兔子对数和仔兔的对数均以 61.8%的数率增加.

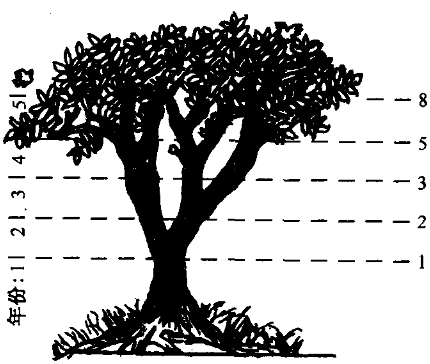

图 3.2　树木生长的斐波那契性质

生物学家也对此产生兴趣. 例如, 树木的生长, 由于新生的枝条往往需要一段"休息"时间, 供自身生长, 而后才能萌发新枝. 所以, 一株树苗在一段间隔(图 3.2), 例如, 一年以后长出一条新枝, 第二年新枝"休息", 老枝依旧萌发, 此后, 老枝与"休息"过一年的枝同时萌发, 当年生的新枝则次年"休息". 这样, 一株树木各个

年份的枝丫数,便构成斐波那契数列.这个规律,就是生物学上著名的"鲁德维格定律".

数列$\{x_n\}$有许多性质[3,4],美国有一份专门期刊——《斐波那契季刊》,专门刊登有关斐波那契数列的最新性质.

由上述推导知,n 越大,数 x_n/x_{n+1}越接近$(\sqrt{5}-1)/2$.这就是说,一个所有的项都是有理数的数列,却与$(\sqrt{5}-1)/2$ 这样一个无理数有着密切的关系.这个数就是**黄金分割**的值.

有趣的是,这个数字在自然界和人们生活中到处可见.如:(1)人的肚脐是人体总长的黄金分割点;(2)大多数门窗的长宽之比是 0.618…;(3)多数植物茎上,两张相邻叶柄的夹角为 137°28″,这恰好是把圆周分成 1:0.618…的两条半径的夹角,已经证明,这种角度对植物的通风和采光效果是最佳的.

黄金分割数 0.618…在求解最优化问题时起了重要作用,使优选法成为可能.如在炼钢时需要加入某些化学元素来增加钢材的强度.假设已知在每吨钢中需加某种化学元素的量在 1000~2000 克之间,为了求得最恰当的加入量,需要在区间[1000,2000]进行实验.如采用"对分法"进行实验(在区间的中点取值的实验结果与两端点取值的实验结果进行比较,选出最佳的元素加入量的方法),其实验次数远远超过采用 0.618…点处作为实验点的实验次数,这种方法称为**优选法**,也称 0.618 法.实验证明,用 0.618 法做 16 次实验,就可以完成"对分法"做 2600 次实验所达到的效果.

4. 复利问题

专题摘要 针对顾客向银行贷款付利息问题,建立了复利情况下的还贷款的本利和数列.利用二项式公式和重要极限理论,分析了复利次数的多少与还款额的关系.

顾客向银行贷款要付利息,顾客往银行存款银行要给顾客付利息.利息是按规定的利率和期限来付息.假设贷款本金为 p,年利率为 r,贷款期限为 x 年,则银行计息方式有两种,即按单利和复利.

按单利的本利和 $S=p(1+rx)$.

按复利的本利和 $S=p(1+r)^x$.

如果每月计息一次,则每月的复利率为 $r/12$,x 年后向银行还贷款的本利和为

$$S=p\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12x}.$$

如果将一年均分为 t 次计算复利,那么每个结算周期的复利率为 r/t,x 年共结算 rt 次,x 年后向银行还贷款的本利和为

$$S = p\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx},$$

注意到$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n$,所以$\left(1+\frac{r}{t}\right)^t > 1 + r$,因此有

$$p\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx} > p(1+r)^x.$$

上式说明一年计算 t 次复利的本利和要比一年计算一次复利的本利和要大,且复利计算次数越多,计算所得的本利和就越大,也就是顾客向银行还贷款的数额就越多.但是还款额也不是无限增加,还款额最多为

$$\lim_{t\to\infty} p\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx} = pe^{rx},$$

所以,本金为 p,年利率为 r 不断计算复利,x 年后的本利和为

$$S = pe^{rx}.$$

上述极限称为连续复利公式,x 视为连续变量.这一公式仅仅是一理论公式,在实际中银行绝不可能按该公式来计算顾客的还款额,它仅作为贷款期相对较长情况下的一种近似估计.

以下讨论上述问题的反问题.欲使 x 年年末得到本利和S,则目前存入银行的本金 p 应为多少?

当年利率为 r 时,一年计算复利一次,则

$$p = \frac{S}{(1+r)^x};$$

若每年计算复利 t 次,则

$$p = \frac{S}{\left(1+\frac{r}{t}\right)^{tx}};$$

若按连续复利计算,则

$$p = Se^{-rx}.$$

由上述讨论可知,存入银行的一笔款 p,若干年后能折合成现值的多少与利率 r 及计算复利的次数有关.利率越高,复利次数越多,则折合的现值就越少[5].

5. 双层玻璃的好处

专题摘要 根据热传导定律,建立了热量穿过双层玻璃的热量损失模型,分析了玻璃厚度及双层玻璃中间的间距大小对保暖效果的影响,当玻璃厚度已知时,给出了热量损失少的玻璃间距.

在北方地区,例如,我国的东北,多数建筑物的窗户是双层,即窗户上装两层玻璃且中间留有一定的空间(图 5.1).设双层玻璃厚均为 d,双层玻璃中间的间距为 l.这样做的目的是为了保暖,据说这种方式的保暖效果要比使用同样材质做成的