大学数学名师导学丛书

线性代数

名师导学

（文科）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

线性代数

名师导学

文　科

《大学数学名师导学丛书》编写组　编
本册编写　　刘文学

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学文科的《线性代数》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《线性代数》的大学文科学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数名师导学（文科）/《大学数学名师导学丛书》编写组编. —北京：中国水利水电出版社，2004

（大学数学名师导学丛书）

ISBN 7-5084-2255-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. 大… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 071619 号

书　　名	大学数学名师导学丛书 **线性代数（文科）**
编　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组
出版、发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044）
	网址：www.waterpub.com.cn
	E-mail：sales@waterpub.com.cn
	电话：(010)63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　销	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国人民大学出版社印刷厂
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787×1092mm　16 开本　13.75 印张　229 千字
版　　次	2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月北京第 1 次印刷
印　　数	0001-6000 册
定　　价	**18.00**

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利
郑素文　刘文学　陈建华

前言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而能够协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）集中知识要点“导”学。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）典型例题与习题“导”讲。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）知识点学习和自测紧密“导”练。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况 。

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

目　录

第一章 行列式

一、知识要点

排列与逆序　n 阶行列式定义　行列式的性质　行列式按行（列）展开　克莱姆法则

二、知识要点分析

1. 排列及其逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，称作这 n 个元素的全排列（排列）.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序，若在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同，就称有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总和称作这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数或零的排列称为偶排列.

一般情况下，若 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，规定由小到大为标准次序. 设 p_1，$p_2 \cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 p_i（$i=1, 2, \cdots, n$）若比 p_i 大的且排在 p_i 前的元素有 t_i 个，就称 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数总和：

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

称为这个排列的逆序数记为 $N(p_1, p_2, \cdots, p_n)$.

2. n 阶行列式定义

n^2 个元素 a_{ij}（$i, j=1, 2, \cdots, n$）组成的特定符号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

表示由这 n^2 个数确定的一个数

$$D_n = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)} \quad a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 这 n 个数的一个排列，N（$p_1p_2\cdots p_n$）是该排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项前的符号是：当该项元素的行标按自然顺排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取"正"号，是奇排列就取"负"号.

3. 行列式性质

(1) 行列式与其转置行列式的值相等.

(2) 互换行列式的两个行（列），行列式变号.

(3) 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值为零.

(4) 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用 k 乘以此行列式.

(5) 行列式中如果有两行（列）元素成比列，则此行列式的值为零.

(6) 若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(7) 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变.

4. 行列式按行（列）展开

(1) 行列式按某一行（列）展开

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，并记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1.1 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

①按 D 的第 i 行展开有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n).$$

②按 D 的第 j 列展开有

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\cdots,n).$$

推论 1.1 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

①D 中某一行所有元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的和，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j).$$

②D 中某一列所有元素与另一列对应元素的代数余子式乘积的和，有

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

（2）行列式按某 k 行（列）展开

在一个 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列（$k\leqslant n$）. 位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的位置组成一个 k 阶行列式 M，称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的位置组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 k 阶子式 M 的余子式.

设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 i_1，i_2，…，i_k，j_1，j_2，…，j_k. 则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots i_k)+(j_1+j_2+\cdots j_k)}$ 称做 M 的代数余子式.

定理 1.2（拉普拉斯定理） 设在行列式 D 中任意取定 k（$1\leqslant k\leqslant n-1$）行（列），由这 k 行（列）元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D 的值.

5. 克莱姆（Cramer）法则

定理 1.3（克莱姆法则） 如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则方程组有且仅有唯一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1,2,\cdots,n),$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D_j 为 D 的第 j 列元素 a_{1j}，a_{2j}，$\cdots$，a_{nj} 对应地换为方程组的常数项 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 所构成的行列式.

三、学习要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义.

(2) 掌握行列式的性质，并会灵活运用行列式的性质计算行列式.

(3) 掌握利用行列式解有关线性方程组的克莱姆法则.

四、典型例题与方法解析

1. 关于行列式的定义

例 1 求排列 1397082 的逆序数.

分析 会求排列逆序数是对行列式概念深入理解的前提，对于本题来说只需求出排列中每个元素的逆序数，然后求和.

解 在排列 1397082 中

1 排在首位，逆序数为 0；

3 的前面只有 1 且比 3 小，逆序数为 0；

9 是最大数，逆序数为 0；

7 前面只有 9 大于 7，逆序数为 1；

0 最小前面有 4 个数，逆序数为 4；

8 前面只有 9 大于 8，逆序数为 1；

2 前面有 3、9、7、8 大于 2，逆序数为 4；

所以给定排列的逆序数为

$$N(1\,3\,9\,7\,0\,8\,2) = 0+0+0+1+4+1+4 = 10.$$

例 2 求排列 n $(n-1)$ $(n-2)$ $\cdots 3\ 2\ 1$ 的逆序数，并判断奇偶性.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解 $N[n(n-1)(n-2)\cdots 3\,2\,1]=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k$，$4k+1$ 时为偶排列，

当 $n=4k+2$，$4k+3$ 时为奇排列（$k=0$，1，2，…）.

例 3 判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$是否为 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$（i，$j=1$，2，3，4，5，6）中的项.

分析 显然 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$是 D_6 中不同行不同列的项，要判断它是不是 D_6 的项，关键是看它是否满足行列式定义的符号规律.

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$的各个因子的第一个下标为标准排列，第二个下标排列为 4 3 1 2 6 5，其逆序数为 6 是偶数，故在 D_6 中含上述 6 因子的项为正，所以给定数是 D_6 中的项.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析 由定义知 n 阶行列式中共有 $n!$ 项，其一般形式为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零，给定行列式中零元素较多，故只需找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

解 第一列除了元素 $a_{1\,n-1}$（$j_1=n-1$）以外皆为零，第二行除元素 $a_{2\,n-2}$（$j_2=n-2$）以外皆为零，继续分析第三行…第 n 行. 可知 D_n 中只有 $a_{1\,n-1}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,1}a_{n\,n}$项不为零. 其列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$，逆序数为$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$于是

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_{1\,n-1}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,1}a_{n\,n}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

例 5 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2x & 1 & 4 \\ 3 & 2 & x & -3 \\ 1 & 5 & 2x & 1 \end{vmatrix},$$

求 x^3 的系数.

分析 由行列式定义 $f(x)$是关于 x 的一个多项式，而给定行列式中有一

列不含 x，故最高次数3，只需对只含 x^3 的项求代数和，便能确定 $f(x)$ 中 x^3 的系数.

解 含 x^3 的项只有两项：$(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^3$ 及 $(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-12x^3$，所以 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -10.

2. 关于行列式的性质

例6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

分析 考察行列式特点，每一行的元素都与第一行各对应元素有相同的部分，故可利用行列式性质先将其简化再进行分析计算.

解 当 $n=1$ 时，$D_1=a_1+b_1$.

当 $n=2$ 时，$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$.

当 $n\geqslant 3$ 时，

$$D_n\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0.$$

例7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

分析 该行列式的特点是每行（列）元素的和相等. 可把第2，…，n 列（行）都加到第1列上去.

解

$$D_n \xrightarrow[j=2,\cdots,n]{c_1-c_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

注 对一些特殊的行列式、对角行列式、次对角行列式、三角形行列式，可利用定义求出它们的值．而在求行列式的时候，也常常利用行列式的性质将其化成上述特殊形式再进行计算．为方便起见，将其结果表示如下：

$$① \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \times & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & \times & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

$$② \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & \times & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & \times & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 8 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

分析 若将第一行第 1 个元素后面的元素化为零，则行列式变为下三角行列式．

解

$$D_n \xrightarrow[j=2,\cdots,n]{r_1-\frac{1}{j}r_j} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}, b_i \neq a_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

分析 第一行后的每一行减去第一行对应元素后即变成与例 8 相类似的行列式.

解

$$D_n \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-b_1 & b_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-b_1 & 0 & b_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-b_1 & 0 & 0 & \cdots & b_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\begin{vmatrix} \dfrac{b_1}{b_1-a_1} & \dfrac{a_2}{b_2-a_2} & \dfrac{a_3}{b_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{b_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[j=2,\cdots,n]{c_1+c_j} \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{b_k-a_k} & \dfrac{a_2}{b_2-a_2} & \cdots & \dfrac{a_n}{b_n-a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k - a_k}\right) \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

例 10 若 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 的元素满足 $a_{ji} = -a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称 D_n 为反对称行列式. 证明：奇数阶反对称行列式的值为零.

分析 由反对称定义，若提出系数 -1，得到的行列式为原行列式转置行列式，再利用转置行列式性质可得结论.

证 每一行提出 -1 后得

$$D_n = (-1)^n |-a_{ij}| = (-1)^n |a_{ji}| = (-1)^n D_n^T.$$

又 n 为奇数，且 $D_n^T = D_n$，故

$$D_n = -D_n, \text{即 } D_n = 0.$$

所以奇数阶反对称行列式的值为零.

3. 关于行列式按某 k 行（列）展开

例 11 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式虽只为 5 阶，但直接计算很麻烦，若先将其化为三角形行列式再计算，工作量也相当大. 考虑到第三行和第五行各对应元素的特点，可将第三行加到第五行上去，这样得到的行列式经五行只有一个非零元素，可以按这一行展开，使计算 5 阶行列式转化为对 4 阶行列式的计算.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_5 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 - 2r_4]{r_1 - r_4} -5 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } C_4 \text{ 展开}} -5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -125.$$

注 选择零元素较多的行（列）按公式展开，将原行列式化为一个或几个降了一阶的行列式的代数和，也可先用行列式的性质，将选定的行（列）化为只有一个非零元素，将原行列式化为只有一个降了一阶的行列式．这种计算行列式的方法称为降阶法．使用降阶法时要特别注意展开式各项的符号．

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & & & & \\ x & y & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & x & y & \\ & & & x & y \end{vmatrix} = x^n-(-1)^n y^n.$$

4. 按拉普拉斯定理展开

例 12 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

分析 对于此行列式可以按某一行（列）展开或将其化为三角行列式再进行计算．考虑到行列式中零元素对应的位置，应用拉普拉斯定理则相对简便些．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com