

技 工 学 校 教 材

三年制技工学校試用教材

平 面 三 角

全国技工学校教材編审委员会編

0004480

机械工业出版社

三年制技工学校試用教材

平 面 三 角

全国技工学校教材編审委员会編

机械工业出版社

本书是由全国技工学校教材编审委员会組織编写并审定的。

本书主要内容包括：銳角三角函数、解直角三角形，弧与角的弧度制，任意角三角函数，复角三角函数，三角函数对数表、斜三角形的解法，反三角函数，三角方程，相似形等等。全书共分八章，最后附有附录平面三角重要关系式。

本书适用于具有初中毕业程度三年制的技工学校学生。

本书是由刘立十同志编写的。

平 面 三 角

全国技工学校教材编审委员会編

(根据机械工业出版社重印)

*

机械工业出版社出版 (北京蘇州胡同 141 号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 112 号)

天津市第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092\frac{1}{32}$ · 印张 10 · 字数 219 千字

1964 年 12 月北京新一版 · 1965 年 12 月北京第二次印刷

印数 40,001—55,000 · 定价(科二) 0.88 元

(1963 年 9 月北京第一版)

*

統一书号: K 15033 · 3597

目 次

第一章 銳角三角函数 解直角三角形	1
§ 1. 銳角三角函数	1
§ 2. 互为余角的三角函数間的关系	7
§ 3. 角由 0° 变到 90° 的时候三角函数值的变化	8
习题一	14
§ 4. 三角函数表	15
§ 5. 解直角三角形	16
习题二	28
第二章 弧与角的弧度制	32
§ 6. 弧与角的度量	32
§ 7. 度与徑的互化	33
§ 8. 圆心角、半径和弧长的关系	37
习题三	40
第三章 任意角三角函数	43
§ 9. 角的概念的普遍化	43
习题四	47
§ 10. 任意角三角函数	48
§ 11. 三角函数的正負	51
§ 12. 用綫段表示三角函数	56
§ 13. 三角函数值的变化	59
习题五	67
§ 14. 同角三角函数間的关系	70
§ 15. 已知角的一个三角函数值, 求其它各三角函数值	77
习题六	81
§ 16. 誘导公式	83
习题七	96

§ 17. 化任意角的三角函数为锐角的三角函数	99
§ 18. 已知角的一个三角函数值求此角	101
习题八	105
§ 19. 三角函数的周期性	108
§ 20. 正弦、余弦、正切、余切的图象	110
习题九	122
第四章 复角三角函数	124
§ 21. 和角、差角的正弦、余弦和正切	124
习题十	137
§ 22. 倍角、半角的正弦、余弦和正切	141
习题十一	150
§ 23. 三角函数的和差化积	153
习题十二	161
第五章 三角函数对数表 斜三角形的解法	163
§ 24. 三角函数对数表	163
习题十三	167
§ 25. 解斜三角形的四种情形	170
§ 26. 正弦定理	171
§ 27. 已知一边和两角解斜三角形	174
习题十四	177
§ 28. 余弦定理	179
§ 29. 已知两边和它们的夹角解斜三角形	182
习题十五	185
§ 30. 已知三边解斜三角形	187
习题十六	190
§ 31. 已知两边和其中一边的对角解斜三角形	191
习题十七	198
§ 32. 利用解斜三角形的方法解应用问题	198
习题十八	206

第六章 反三角函数	211
§ 33. 反三角函数及其多值性	211
§ 34. 反正弦	214
§ 35. 反余弦	223
§ 36. 反正切与反余切	229
习题十九	235
第七章 三角方程	239
§ 37. 三角函数的恒等变换与三角方程	239
§ 38. 最简单的三角方程	240
§ 39. 一般的三角方程的解法	246
§ 40. 三角方程的几何应用	259
习题二十	261
第八章 相似形 (补充教材)	267
I. 比例线段	267
§ 41. 线段相比的基本概念	267
§ 42. 比例的基本性质	268
§ 43. 关于比例线段的几个定理	273
习题二十一	276
II. 相似三角形	278
§ 44. 相似形	278
§ 45. 相似三角形的判定	279
习题二十二	286
III. 勾股定理	289
§ 46. 射影定理	289
§ 47. 勾股定理	291
§ 48. 任意三角形中一些线段间的数量关系	297
习题二十三	300
附录 平面三角重要关系式	304

第一章 銳角三角函数

解直角三角形

§ 1. 銳角三角函数

在平面几何学里，我們学过勾股定理，并应用它解决了直角三角形中边与边之間的长度关系問題，即已知直角三角形任意两边的长，运用勾股定理，就可计算出它第三边的长，这在实际应用上，是有一定价值的。

但是这个定理，并不能解决直角三角形的边与角之間的数量关系。譬如在直角三角形中，已知某两条边的长，要求銳角的大小；或者是已知一条边的长和一个銳角的大小，要求其他边长等問題。这样，便給我們带来新的研究課題。

1. 直角三角形各边間的比 設 $\angle PAQ$ 是任意銳角，在它的一边 AP 上任取两点 B 、 B' ，作 BC 、 $B'C'$ 垂直于 AQ ；再在 AQ 边上任取一点 B'' ，作 $B''C'' \perp AP$ ，于是得到同一个銳角的三个直角三角形 ABC 、 $AB'C'$ 、 $AB''C''$ 。由相似三角形的判别定理与性质定理可以知道：

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AB'C'.$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}.$$

同理可以証明：

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B''C''}{AB''}$$

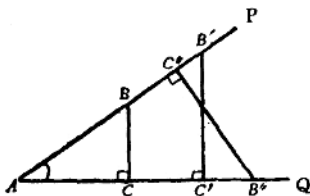


图 1-1

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

由上面的等式，不仅说明有一个公共锐角的几个直角三角形中，这个锐角所对应的直角边与斜边的比相等的问题，并可扩展到任意个具有相等锐角的直角三角形，其各对应边之间的比值都是不变的。譬如我们常用的不等边三角板，都是含有一个 30° 角的直角三角形，它们的对边，永远是斜边长的一半，它们的邻边，是斜边长的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。因此 30° 角对边与斜边的比总是 $\frac{1}{2}$ ，邻边与斜边的比总是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而与三角板的尺寸大小无关。

所以说：如果一个锐角的大小确定了，那末以这个锐角为一个角的所有直角三角形的每两条对应边的比，也就有唯一的确定的值。

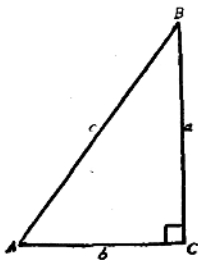


图 1-2

2. 锐角三角函数 在直角三角形中，每两条边相比，能列出六个不同比的式子。如图 1-2 中所示 $\triangle ABC$ ， $\angle C$ 是直角，三条边的长分别是 $BC=a$ ， $AC=b$ ， $AB=c$ ，它的六个比是：

$$\frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}.$$

这些边，我们常以某一锐角的对边、邻边与斜边来称

呼，并且把它們每两边的比，分別給予不同的名称与記号。

$\angle A$ 的对边与斜边的比，叫做 $\angle A$ 的正弦。記为 $\sin A$
 $= \frac{a}{c}$;

$\angle A$ 的邻边与斜边的比，叫做 $\angle A$ 的余弦。記为 $\cos A$
 $= \frac{b}{c}$;

$\angle A$ 的对边与 $\angle A$ 的邻边的比，叫做 $\angle A$ 的正切。記为
 $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$;

$\angle A$ 的邻边与 $\angle A$ 的对边的比，叫做 $\angle A$ 的余切。記为
 $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$;

斜边与 $\angle A$ 的邻边的比，叫做 $\angle A$ 的正割。記为
 $\sec A = \frac{c}{b}$;

斜边与 $\angle A$ 的对边的比，叫做 $\angle A$ 的余割。記为
 $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$ 。

$\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\operatorname{tg} A$ 、 $\operatorname{ctg} A$ 、 $\sec A$ 、 $\operatorname{cosec} A$ ，都叫做 $\angle A$ 的三角函数。同样， $\angle B$ 的三角函数为：

$$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{a}{b};$$

$$\sec B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{c}{b}.$$

这里应该注意： $\sin A$ 、 $\cos B$ 等都是一个完整的符号，它表示某一锐角的正弦或余弦。单写一个“sin”或“cos”是没有意义的；并且还要注意，这些完整的符号，具体表示直角三角形中某两条边长的比值，因此它是个不名数，并不表示锐角的度数大小。例如， $\sin A \neq \angle A$ ， $\cos B \neq \angle B$ 。

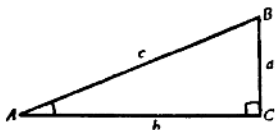


图 1-3

由于正割和余割应用较少，本章只在一些基本概念里引用它。

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $a = 5$ ， $b = 12$ 。求 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的正弦、余弦和正切（图 1-3）。

解 $\because c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$

$$\therefore \sin A = \frac{5}{13}; \quad \sin B = \frac{12}{13};$$

$$\cos A = \frac{12}{13}; \quad \cos B = \frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{12}{5}.$$

例 2. 作 48° 角，并且用度量法求出它的正弦、余弦和正切的近似值（取两位小数）。

解 用量角器作 $\angle PAQ = 48^\circ$ 。

在 AP 上，取 $AB = 100$ 毫米，过 B ，作 $BC \perp AQ$ ，于是量

得:

$$BC = 74 \text{ 毫米}, AC = 67 \text{ 毫米}.$$

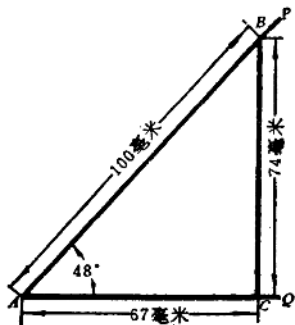


图 1-4

$$\therefore \sin 48^\circ = \frac{BC}{AB} \approx \frac{74}{100} = 0.74;$$

$$\cos 48^\circ = \frac{AC}{AB} \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\operatorname{tg} 48^\circ = \frac{BC}{AC} \approx \frac{74}{67} \approx 1.10.$$

3. 由銳角的一个三角函数确定銳角的大小 在前面第1小节里, 我們研究直角三角形边与角之間的关系时, 已經知道: 如果一个銳角的大小确定了, 那末以这个銳角为一个角的直角三角形的每两条边的比也就确定了。反之, 如果直角三角形某两条边的比确定了, 那末这个直角三角形的銳角大小也会随之确定。

如图 1-5, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都是直角三角形, $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ 。

由平面几何知識:

如果 $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$, 或 $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$,

那末 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. (斜边与一条直角边成比例)

$$\therefore \angle A = \angle A', \angle B = \angle B'.$$

同理如果 $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ 或 $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$,

那末 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. (两直角边成比例)

$$\therefore \angle A = \angle A', \angle B = \angle B'.$$

这不仅说明在两个直角三角形中, 如果有两条对应边的比相等, 那末它们的锐角会

对应相等; 并且还能推知,

在作直角三角形时, 只要知道其中两条边的比, 就可以

作出无数个符合要求的相似的

直角三角形。无疑地, 它

们对应的锐角也是相等的。

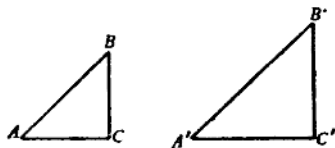


图 1—5

通过这一事实, 使我们能够正确地认识到: 当直角三角形的某两条边的比确定时, 它的锐角也随之确定; 而直角三角形某两条边的比是锐角的三角函数。所以说, 由锐角的一个三角函数, 就能确定这个锐角的大小。

例 1 已知 $\sin \alpha = 0.39$, 求作 $\angle \alpha$ 并求出 $\cos \alpha$ 的近似值。

解 $\because \sin \alpha = 0.39 = \frac{3.9}{10}$, 因此, 要作一个直角三角

形, 使它的斜边为 10 个单位, 一条直角边为 3.9 个单位。

作 AB 等于 10 个单位, 以 AB 为直径作半圆, 再以 B 为

圓心，3.9个单位长为半径画弧，交半圓于C。連結AC、BC，那末 $\angle ACB$ 是直角。

在直角三角形ABC中，由于

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3.9}{10} = 0.39,$$

$\therefore \angle A$ 就是所求的 $\angle \alpha$ 。

又由度量得知 $AC \approx 9.2$ 个单位，

$$\therefore \cos \alpha \approx \frac{9.2}{10} = 0.92.$$



图 1—6

例 2 已知 $\operatorname{tg} \varphi = 1.2$ ，求作 $\angle \varphi$ 并求其正弦与余弦。

解 $\because \operatorname{tg} \varphi = 1.2 = \frac{12}{10}$ ，作 $BC = 10$ 单位，并作 $AC \perp BC$ ，取 $AC = 12$ 单位，連結 AB ，就得直角三角形ABC。

$$\therefore \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{10} = 1.2.$$

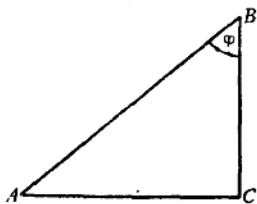


图 1—7

$\therefore \angle B$ 就是所求的 $\angle \varphi$ 。

又由度量得知 $AB \approx 15.6$ 。

$$\therefore \sin \varphi = \frac{12}{15.6} \approx 0.77,$$

$$\cos \varphi = \frac{10}{15.6} \approx 0.64.$$

§ 2. 互为余角的三角函数間的关系

在直角三角形ABC中，如果其中的一个銳角 $\angle BAC = \alpha$ ，那末另一个銳角 $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ （图 1—8）。

由銳角三角函数的定义可知：

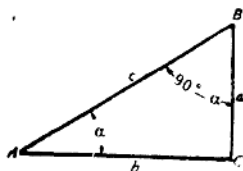


图 1—8

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\sec(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} \alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \frac{c}{b} = \sec \alpha.$$

显然，在互为余角的两个锐角中，一个锐角的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割，分别等于另一个锐角的余弦、正弦、余切、正切、余割和正割。因此我们把正弦和余弦、正切和余切、正割和余割分别叫做互为余函数。也就是说：正弦是余弦的余函数，余弦是正弦的余函数等。那末上面的关系，我们可以总括起来说：

锐角的三角函数，等于它的余角的余函数。

例如， $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ,$

$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ,$

$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}[90^\circ - (45^\circ - \alpha)] = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha)$

$(\alpha < 45^\circ).$

§ 3. 角由 0° 变到 90° 的时候三角函数值的变化

1. 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值 在实际应用中，经常用到 30° 、 45° 、 60° 这些角的正弦、余弦和正切，这些数

值可以由几何关系直接求得,

(1) 30° 和 60° 角的正弦、余弦与正切如图1—9. I, 在直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 设 $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.

由平面几何知识可知:

$$c = 2a,$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{3}a.$$

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

图 1—9. I

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又} \because \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

(2) 45° 角的正弦、余弦与正切如图1—9. II, 在直角三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$ 设 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

由平面几何知识可知:

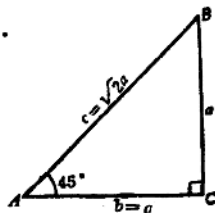


图 1—9. II

$$b=a,$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a.$$

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1.$$

这些特别角的三角函数值，是我們应用較多的，应该記住它，現在我們把这些函数值列成下表，并附以近似数值。

角		30°	45°	60°
函 数				
正	弦	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
余	弦	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$	$\frac{1}{2} = 0.5$
正	切	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$	1	$\sqrt{3} \approx 1.732$

由三角函数的定义可以看出，某一銳角的余切、正割与余割的值，分别是正切、余弦与正弦值的倒数，譬如：

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a},$$

$$\therefore \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

$$\text{同理} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}.$$

因此对于这些特殊角的余切、正割与余割的值，如果需要应用时，即可按这一规律求得，这里不再重复了。

例 1 求下列各式的结果:

$$(1) \quad \sin 30^\circ + \cos 45^\circ - 1;$$

$$(2) \quad \cos 30^\circ \sec 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$$

$$\text{解}(1) \text{原式} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2};$$

$$(2) \quad \because \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又} \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

例 2 求 $\operatorname{tg}^2 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{ctg}^2 45^\circ \cos 60^\circ$

$$+ \frac{\sin 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ} - \cos 30^\circ \sin 60^\circ \text{ 的值}$$

$$\text{解 原式} = (\operatorname{tg} 60^\circ)^2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ - \left(\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} \right)^2 \cos 60^\circ$$

$$+ \sin 60^\circ \div \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} - \cos 30^\circ \sin 60^\circ$$

$$= (\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{1}{1} \right)^2 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$