技工学校教材

三年制技工学校試用教材

平面三角

全国技工学校教材編审委員会編

机械工业出版社

三年制技工学校試用教材

平面三角

全国技工学校教材編审委員会編

机械工业出版社

本书是由全国技工学校教材編审委員会組織編写并审定的。

本书主要內容包括：銳角三角函数、解直角三角形，弧与角的弧度制，任意角三角函数，复角三角函数，三角函数对数表、斜三角形的解法，反三角函数，三角方程，相似形等等。全书共分八章，最后附有附录平面三角重要关系式。

本书适用于具有初中毕业程度三年制的技工学校学生。

本书是由刘立十同志編写的。

平　面　三　角

全国技工学校教材編审委員会編

（根据中国工业出版社紙型重印）

*

机械工业出版社出版（北京苏州胡同141号）

（北京市书刊出版业营业许可証出字第117号）

天津市第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店經售

*

开本$787\times1092^{1}/_{32}$・印张10・字数219千字

1964年12月北京新一版・1965年12月北京第二次印刷

印数　40,001—55,000・定价(科二)0.88元

(1963年9月北京第一版)

*

統一书号：K 15033・3597

目　次

第一章　銳角三角函数

解直角三角形

§1.　銳角三角函数

在平面几何学里，我們学过勾股定理，幷应用它解决了直角三角形中边与边之間的长度关系問題，即已知直角三角形任意两边的长，运用勾股定理，就可計算出它第三边的长，这在实际应用上，是有一定价値的。

但是这个定理，幷不能解决直角三角形的边与角之間的数量关系。譬如在直角三角形中，已知某两条边的长，要求銳角的大小；或者是已知一条边的长和一个銳角的大小，要求其他边长等問題。这样，便給我們带来新的研究課題。

1．直角三角形各边間的比　設$\angle PAQ$是任意銳角，在它的一边AP上任取两点B、B'，作BC、$B'C'$垂直于AQ；再在AQ边上任取一点B''，作$B''C''\perp AP$，于是得到同一个銳角的三个直角三角形ABC、$AB'C'$、$AB''C''$。由相似三角形的判別定理与性质定理可以知道：

$$\because\quad \triangle ABC\backsim\triangle AB'C'.$$

$$\therefore\quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}.$$

同理可以証明：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B''C''}{AB''}$$

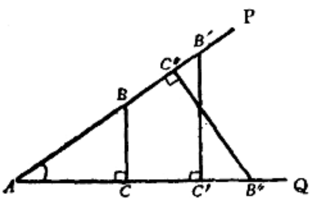

图 1—1

$$\therefore \qquad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

由上面的等式，不仅説明有一个公共銳角的几个直角三角形中，这个銳角所对应的直角边与斜边的比相等的問題，并可扩展到任意个具有相等銳角的直角三角形，其各对应边之間的比值都是不变的。譬如我們常用的不等边三角板，都是含有一个 30° 角的直角三角形，它們的对边，永远是斜边长的一半，它們的邻边，是斜边长的$\frac{\sqrt{3}}{2}$。因此30°角对边与斜边的比总是$\frac{1}{2}$，邻边与斜边的比总是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，而与三角板的尺寸大小无关。

所以説：**如果一个銳角的大小确定了，那末以这个銳角为一个角的所有直角三角形的每两条对应边的比，也就有唯一的确定的值。**

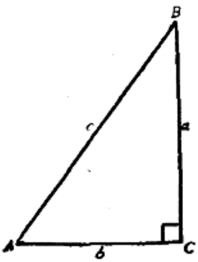

图 1—2

2. **銳角三角函数** 在直角三角形中，每两条边相比，能列出六个不同比的式子。如图1—2中所示$\triangle ABC$，$\angle C$是直角，三条边的长分别是$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，它的六个比是：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c},\quad \frac{AC}{AB}=\frac{b}{c},\quad \frac{BC}{AC}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a},\quad \frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},\quad \frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}.$$

这些边，我們常以某一銳角的对边、邻边与斜边来称

呼，并且把它們每两边的比，分别給予不同的名称与記号。

$\angle A$ 的对边与斜边的比，叫做$\angle A$ **的正弦**。記为 $\sin A = \frac{a}{c}$；

$\angle A$ 的邻边与斜边的比，叫做$\angle A$ **的余弦**。記为 $\cos A = \frac{b}{c}$；

$\angle A$ 的对边与$\angle A$ 的邻边的比，叫做$\angle A$**的正切**。記为 $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$；

$\angle A$ 的邻边与$\angle A$ 的对边的比，叫做$\angle A$ **的余切**。記为 $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$；

斜边与$\angle A$ 的邻边的比，叫做$\angle A$ **的正割**。記为 $\sec A = \frac{c}{b}$；

斜边与$\angle A$ 的对边的比，叫做$\angle A$ **的余割**。記为 $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$。

$\sin A$、$\cos A$、$\operatorname{tg} A$、$\operatorname{ctg} A$、$\sec A$、$\operatorname{cosec} A$，都叫做$\angle A$ **的三角函数**。同样，$\angle B$ 的三角函数为：

$$\sin B = \frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}} = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\angle B\text{ 的对边}} = \frac{a}{b};$$

$$\sec B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{的邻边}}=\frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{的对边}}=\frac{c}{b}.$$

这里应该注意：$\sin A$、$\cos B$ 等都是一个完整的符号，它表示某一銳角的正弦或余弦。单写一个“sin”或“cos”是没有意义的；并且还要注意，这些完整的符号，具体表示直角三角形中某两条边长的比值，因此它是个不名数，并不表示銳角的度数大小。例如，$\sin A \neq \angle A$，$\cos B \neq \angle B$。

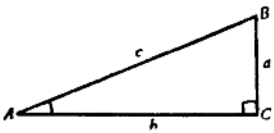

图 1—3

由于正割和余割应用較少，本章只在一些基本概念里引用它。

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$，$a=5$，$b=12$。求 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的正弦、余弦和正切（图 1—3）。

解 ∵ $c=\sqrt{5^2+12^2}=13$,

∴ $$\sin A=\frac{5}{13};\quad \sin B=\frac{12}{13};$$

$$\cos A=\frac{12}{13};\quad \cos B=\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{5}{12};\quad \operatorname{tg} B=\frac{12}{5}.$$

例 2. 作48°角，并且用度量法求出它的正弦、余弦和正切的近似值（取两位小数）。

解 用量角器作$\angle PAQ=48^\circ$。

在AP上，取 $AB=100$毫米，过B，作 $BC\perp AQ$，于是量

得：

$$BC=74\text{毫米}，\quad AC=67\text{毫米}。$$

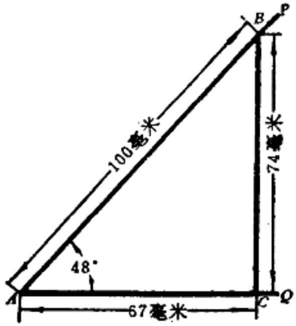

图 1—4

$$\therefore\qquad \sin 48^\circ=\frac{BC}{AB}\approx\frac{74}{100}=0.74;$$

$$\cos 48^\circ=\frac{AC}{AB}\approx\frac{67}{100}=0.67;$$

$$\operatorname{tg}48^\circ=\frac{BC}{AC}\approx\frac{74}{67}\approx1.10.$$

3. **由銳角的一个三角函数确定銳角的大小** 在前面第1小节里，我們研究直角三角形边与角之間的关系时，已經知道：如果一个銳角的大小确定了，那末以这个銳角为一个角的直角三角形的每两条边的比也就确定了。反之，如果直角三角形某两条边的比确定了，那末这个直角三角形的銳角大小也会随之确定。

如图 1 — 5，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$都是直角三角形，$\angle C=\angle C'=90^\circ$。

由平面几何知識：

如果 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'}$，或 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'}$，

那末 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$。（斜边与一条直角边成比例）

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

同理如果 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{B'C'}{A'C'}$ 或 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A'C'}{B'C'}$，

那末 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.（两直角边成比例）

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

这不仅說明在两个直角三角形中，如果有两条对应边的比相等，那末它們的銳角会对应相等；并且还能推知，在作直角三角形时，只要知道其中两条边的比，就可以作出无数个符合要求的相似的直角三角形。无疑地，它們对应的銳角也是相等的。

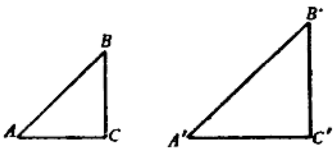

图 1—5

通过这一事实，使我們能够正确地認識到：当直角三角形的某两条边的比确定时，它的銳角也随之确定；而直角三角形某两条边的比是銳角的三角函数。所以說，由銳角的一个三角函数，就能确定这个銳角的大小。

例 1 已知 $\sin\alpha=0.39$，求作 $\angle\alpha$ 并求出 $\cos\alpha$ 的近似值。

解 $\because$ $\sin\alpha=0.39=\dfrac{3.9}{10}$，因此，要作一个直角三角形，使它的斜边为10个单位，一条直角边为 3.9 个单位。

作 AB 等于10 个单位，以 AB 为直径作半圓，再以 B 为

圆心， 3.9 个单位长为半径画弧，交半 圆于 C 。連結 AC、BC，那末 $\angle ACB$ 是直角。

在直角三角形ABC中，由于

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3.9}{10}=0.39,$$

图 1—6

$\therefore$ $\angle A$就是所求的$\angle\alpha$.

又由度量得知$AC\approx 9.2$个单位，

$$\therefore \qquad \cos\alpha\approx\frac{9.2}{10}=0.92.$$

例 2　已知 $\operatorname{tg}\varphi=1.2$，求作$\angle\varphi$并求其正弦与余弦。

解　$\because$　$\operatorname{tg}\varphi=1.2=\frac{12}{10}$，作$BC=10$单位，并作$AC\perp BC$，取 $AC=12$单位，連結AB，就得直角三角形ABC。

$$\because \qquad \operatorname{tg}B=\frac{AC}{BC}=\frac{12}{10}=1.2.$$

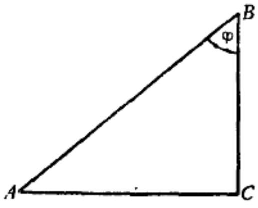

图 1—7

$\therefore$　$\angle B$ 就是所求的 $\angle\varphi$.

又由度量得知　$AB\approx 15.6$.

$$\therefore \quad \sin\varphi=\frac{12}{15.6}\approx 0.77,$$

$$\cos\varphi=\frac{10}{15.6}\approx 0.64.$$

§2.　互为余角的三角函数間的关系

在直角三角形ABC中，如果其中的一个銳角$\angle BAC=\alpha$，那末另一个銳角$\angle ABC=90°-\alpha$（图 1 — 8 ）。

由銳角三角函数的定义可知：

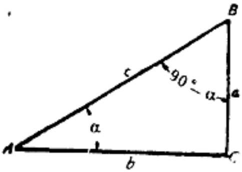

图 1—8

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha;$$

$$\cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\frac{b}{a}=\mathrm{ctg}\,\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\sec(90°-\alpha)=\frac{c}{a}=\mathrm{cosec}\,\alpha;$$

$$\mathrm{cosec}(90°-\alpha)=\frac{c}{b}=\sec\alpha.$$

显然，在互为余角的两个銳角中，一个銳角的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割，分别等于另一个銳角的余弦、正弦、余切、正切、余割和正割。因此我們把正弦和余弦、正切和余切、正割和余割分别叫做**互为余函数**。也就是說：正弦是余弦的余函数，余弦是正弦的余函数等。那末上面的关系，我們可以总括起来說：

銳角的三角函数，等于它的余角的余函数。

例如，　$\sin 30°=\sin(90°-60°)=\cos 60°$，

$\cos 30°=\cos(90°-60°)=\sin 60°$，

$\mathrm{tg}(45°+\alpha)=\mathrm{tg}[90°-(45°-\alpha)]=\mathrm{ctg}(45°-\alpha)$

$(\alpha<45°)$．

§3. 角由0°变到90°的时候三角函数值的变化

1. 30°、45°、60°角的三角函数值　在实际应用中，經常用到30°、45°、60°这些角的正弦、余弦和正切，这些数

值可以由几何关系直接求得：

（1）30°和60°角的正弦、余弦与正切如图1—9.Ⅰ，在直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，設$BC=a$，$AB=c$，$AC=b$。

由平面几何知識可知：

$c=2a$,

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}$

$=\sqrt{3}\,a$.

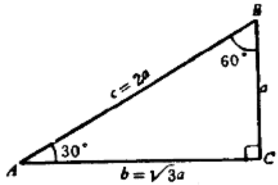

图 1—9.Ⅰ

$$\therefore\quad \sin 30°=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

又∵ $\angle B=90°-30°=60°$,

$$\therefore\quad \sin 60°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60°=\frac{a}{c}=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60°=\frac{b}{a}=\sqrt{3}.$$

（2）45° 角的正弦、余弦与正切如图1—9.Ⅱ，在直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=45°$設$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。

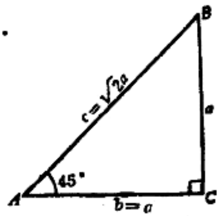

图 1—9.Ⅱ

由平面几何知識可知：

$$b=a,$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a.$$

$$\therefore \quad \sin45^\circ=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos45^\circ=\frac{b}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}45^\circ=\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=1.$$

这些特别角的三角函数值，是我們应用較多的，应該記住它，現在我們把这些函数值列成下表，并附以近似数值。

函数 \ 角	30°	45°	60°
正　　弦	$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866$
余　　弦	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$	$\frac{1}{2}=0.5$
正　　切	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0.577$	1	$\sqrt{3}\approx1.732$

由三角函数的定义可以看出，某一銳角的余切、正割与余割的値，分別是正切、余弦与正弦値的倒数，譬如：

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \operatorname{cosec}A=\frac{c}{a},$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}A=\frac{1}{\sin A}.$$

同理　　$$\sec A=\frac{1}{\cos A},\quad \operatorname{ctg}A=\frac{1}{\operatorname{tg}A}.$$

因此对于这些特殊角的余切、正割与余割的值，如果需要应用时，即可按这一規律求得，这里不再重复了。

例 1 求下列各式的结果：

（1）$$\sin 30^\circ+\cos 45^\circ-1;$$

（2）$$\cos 30^\circ \sec 30^\circ-\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$$

解（1）原式$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{1+\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}-1}{2};$

（2）$$\because \quad \sec 30^\circ=\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又} \quad \operatorname{ctg} 60^\circ=\frac{1}{\operatorname{tg} 60^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \quad \text{原式}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=1-1=0.$$

例 2 求 $\operatorname{tg}^2 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ-\operatorname{ctg}^2 45^\circ \cos 60^\circ$

$+\frac{\sin 60^\circ}{\operatorname{ctg} 30^\circ}-\cos 30^\circ \sin 60^\circ$的值

解 $$\text{原式}=(\operatorname{tg} 60^\circ)^2\cdot \operatorname{tg} 30^\circ-\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ}\right)^2\cos 60^\circ$$

$$+\sin 60^\circ \div \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}-\cos 30^\circ \sin 60^\circ$$

$$=(\sqrt{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{1}{1}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-1\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$