

**Linear
Algebra
and
Its
Applications**

(Third Edition)

线性代数及其应用

(原书第3版)

(美) David C. Lay 著

刘深泉 洪毅 马东魁 郭国雄 刘勇平 译

陆启韶 审校



机械工业出版社
China Machine Press

Linear Algebra and Its Applications

(Third Edition)

线性代数及其应用

(原书第3版)

(美) David C. Lay 著

刘深泉 洪毅 马东魁 郭国雄 刘勇平 译

陆启韶 审校



机械工业出版社
China Machine Press

线性代数是处理矩阵和向量空间的数学分支,在现代科学的各个领域都有应用.本书是一本优秀的现代教材,给出最新的线性代数基本介绍和一些有趣应用,目的是帮助学生掌握线性代数的基本概念及应用技巧,为后续课程的学习和工作实践奠定基础.主要内容包括线性方程组、矩阵代数、行列式、向量空间、特征值与特征向量、正交性和最小二乘法、对称矩阵和二次型等.此外,本书包含大量的练习题、习题、例题等,便于读者参考.

本书内容深入浅出,论述清晰,适合作为高等院校理工科线性代数课程的教材,还可作为相关研究人员的参考书.

Simplified Chinese edition copyright © 2005 by Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Original English language title: *Linear Algebra and Its Applications, Third Edition* (ISBN 0-201-70970-8) by David C. Lay, Copyright © 2003.

All rights reserved.

Published by arrangement with the original publisher, Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley.

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号: 图字: 01-2004-3687

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用(原书第3版) / (美)莱(Lay, D. C.)著;刘深泉等译. -北京:机械工业出版社, 2005. 8

(华章数学译丛)

书名原文: *Linear Algebra and Its Applications, Third Edition*

ISBN 7-111-16709-0

I. 线… II. ①莱… ②刘… III. 线性代数-高等学校-教材 IV. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第059097号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:宋燕红 迟振春

北京慧美印刷有限公司·新华书店北京发行所发行

2005年8月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·32印张

印数:0001-4000册

定价:59.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线:(010)68326294

译者序

线性代数课程在大学数学中占有重要地位，线性代数的教学内容和方向一直是数学工作者十分关心的问题。传统的线性代数教学偏重自身的理论体系，强调线性代数的基本定义、定理及其证明，对线性代数的方法和应用重视不够，几乎不涉及数值计算。这种做法在我国大学数学教学中有一定的代表性。但互联网和计算机技术的迅速发展极大地改变了科学技术和社会生活的面貌。在这样的形势下，数学教学也需要与时俱进，现有的线性代数课程的教学体系、内容和方式同样需要进行深刻的改革。但是改革的方向在哪里，如何把握当前线性代数教学发展的潮流，国际上的先进经验值得我们学习和借鉴。

David C. Lay 教授是美国著名数学教育家、美国国家“线性代数课程研究小组”的核心成员，也是数学课程现代化的一位主要倡导者。他所编著的本书是一本线性代数的优秀现代教材，很值得我们参考学习。该书的主要目的是帮助学生熟练掌握线性代数的基本概念及应用技巧，为后续课程的学习和工作实践奠定基础，教材的选材基于不同专业对线性代数知识的需求共同点。本书结合应用数学软件，强调了计算机对科学和工程学中线性代数的发展和实践的影响。登录 David C. Lay 教授的网页，可以链接到琳琅满目的学习指导、数据库、应用实例等材料。无论是学生还是研究人员，阅读这本教材后，一定会被线性代数的理论和应用材料所吸引，并从中找到学习线性代数的乐趣，体会到线性代数教学改革的世界潮流和方向。

在我国高等教育双语教学的大环境下，从 2002 年起，华南理工大学计算机学院就开始使用英文教材《Linear Algebra and Its Applications》进行教学。但是由于课程学时和硬件条件的限制，未能将原书的技术特点、网络优势完全发挥出来，我们一直希望能让更多的学生一起分享这本教材。可喜的是，机械工业出版社引进了该书的中文版权，使我国高等学校的师生有机会学习这本线性代数著作，这必将有力地推动我国线性代数教学的改革。

值此翻译工作完成之际，译者非常感谢华南理工大学数学科学学院领导的鼓励和支持，教务处支持了书稿的打印工作。使用英文教材教学的黄凤辉博士、吴洪武博士仔细阅读了中译本初稿并提出了宝贵意见。此外，原书作者 David C. Lay 教授获悉我们准备翻译工作，给予了我们极大的鼓励和支持，在此表示衷心的感谢。由于译者水平和时间的限制，该译本存在的不足之处，敬请各位同行批评指正。

译者

2005 年 1 月

华南理工大学数学科学学院

关于作者

David C. Lay 在奥罗拉大学（伊利诺伊州）获得学士学位，在加利福尼亚大学（洛杉矶）获得硕士和博士学位。自 1966 年以来，Lay 一直从事数学研究和数学教育工作，大部分时间是在马里兰大学帕克学院工作。他还是阿姆斯特丹大学、阿姆斯特丹自由大学和德国凯泽斯劳滕大学的访问教授。在泛函分析和线性代数方面，他已经发表的论文超过 30 篇。

作为美国 NSF 资助项目“线性代数课程研究小组”的核心成员，目前，Lay 是线性代数课程现代化的领导人。此外，他还是几本数学教材的合著者，包括与 Angus E. Taylor 合著的《Introduction to Functional Analysis》、与 L. J. Goldstein 和 D. I. Schneider 合著的《Calculus and Its Applications》以及与 D. Carlson, C. R. Johnson 和 A. D. Porter 合著的《Linear Algebra Gems—Assets for Undergraduate Mathematics》。

作为顶尖的教育家，Lay 教授获得过四所大学的杰出教学奖，包括 1996 年获得马里兰大学著名学者-教师称号。1994 年，他获得美国数学联盟授予的著名大学数学教学奖。他被大学生选为 Alpha-Lambda-Delta 国家荣誉专家协会和国家金钥匙荣誉协会的成员。1989 年，奥罗拉大学授予他杰出校友荣誉。Lay 是美国数学会、加拿大数学会、国际线性代数协会、美国数学联盟、Sigma Xi 以及美国工业和应用数学学会成员。自从 1992 年以来，他成为多届数学科学基督联盟全国委员会成员。

前 言

学生和教师对本书前两个版本的反响十分令人满意. 第 3 版中概念更加形象化, 而且在网上为学生和教师提供了进一步的技术支持. 像以前一样, 本书给出最新的线性代数基本介绍和一些有趣应用, 使得已完成大学第二学期数学课程 (如学完微积分) 的学生容易接受.

本书的主要目的是帮助学生掌握以后课程学习所需要的基本概念和基本技能, 教材的选题是根据“线性代数课程研究小组”的建议, 该建议基于认真分析学生的实际需要和许多不同专业使用线性代数知识的共同点而提出. 希望这门课能够成为对大学生最有用和最有趣的数学课程之一.

鲜明的特色

提前介绍重要概念

许多建立在 \mathbb{R}^n 上的线性代数基本概念, 包含在本书每章开始的“介绍性实例”中, 然后从不同的观点逐步深入讨论. 接下来, 用第 1 章给出的熟悉思想的自然扩展来泛化这些概念. 我认为, 本教材的主要特色是全书的难度一样.

矩阵乘法的现代观点

好的记号是关键, 且教材反映科学家和工程师实际应用线性代数的方式. 本书在定义和证明中处理的是矩阵的列, 而不是矩阵的元素, 核心课题是将矩阵向量乘积 Ax 作为关于 A 的列的一个线性组合. 这种现代方法简化了许多论述, 且将向量空间思想和线性系统的研究联系在一起.

线性变换

用线性变换作为线索贯穿整本教材, 这增强了本书的几何趣味. 例如, 在第 1 章, 线性变换给出一个动态的和几何观点下的矩阵向量乘法.

特征值和动力系统

特征值的概念出现在第 5 章和第 7 章. 由于这一内容分散在数周的教学, 学生会比平常更容易吸收和复习这些关键概念. 特征值来源并应用于离散动力系统和连续动力系统, 相关内容出现在 1.10 节、4.8 节、4.9 节和第 5 章的五节中. 在授课时可以选择不讲授第 4 章, 而是在

讲完 2.8 节和 2.9 节的内容以后直接进入第 5 章的学习. 这两节可选的学习内容给出了第 4 章中出现的向量空间的概念, 为第 5 章的学习奠定了基础.

正交性和最小二乘法

与普通入门教材相比, 本书对这些主题的讨论更全面. “线性代数课程研究小组”强调需要正交性和最小二乘法问题的内容, 这是由于正交性在计算机计算和线性代数的数值计算中起着重要作用, 且实际工作中经常会出现不相容的线性方程组.

教学的特色

应用

广泛选取的应用说明了线性代数的作用, 可以用于在工程学、计算机科学、数学、物理学、生物学、经济学和统计学中解释基本原理和简化计算. 一些应用出现在单独的章节中; 其他的应用是作为例题和习题而引入的. 此外, 每一章的开头给出一个线性代数应用的简短介绍, 由此引出数学理论的发展. 然后, 在该章结束的部分又回到开始提到的应用.

重点强调几何特点

由于许多学生更容易接受形象化的概念, 所以对书中的每个主要概念都给出几何解释. 本书包含有较多的几何图形, 且一些图形是以前的线性代数教材中没有出现过的.

例题

与大多数线性代数教材相比, 本书有更多的例题, 比平常课堂上更多. 由于例题清晰, 步骤详细, 因此学生可以自学.

定理和证明

重要的结果以定理的形式给出, 其他有用的事实放在方框中, 便于参考. 大多数定理有正式证明, 写法易于理解. 在少数情形中, 仔细选取的例题证明中展示了基本计算过程. 一些常规的验证保留在习题中, 这对学生是有益的.

练习题

在习题之前有几个仔细选取的练习题, 其解答在习题之后给出. 这些练习题或者集中于习题中的潜在难点, 或者给出做习题前的“热身”, 且解答常包含有用的提示.

习题

提供的大量习题包含平常的计算题和需要深入思考的概念题, 一些习题针对多年来我在学生作业中发现的概念难点. 每一个习题都按照课本中内容的顺序仔细排列; 这样当每节的一部分内容讲授之后, 就可以安排家庭作业. 习题的一个显著特色是数值计算不复杂, 问题很快被

“展开”，学生在数值计算上花费时间很少，习题主要是为了让学生理解教学内容而不是进行机械计算。

判断题

为鼓励学生阅读全部课本内容且深入思考，本书设计了 300 个简单的判断题，出现在 33 节内容之中，并放在计算题之后。可以通过阅读课本内容来回答这些问题，从而使学生可以准备好回答随后的概念题。学生在习惯了仔细阅读课本内容之后，会喜欢这类题目。基于课堂测验以及与学生进行探讨，我决定不将答案放在课本中。补充的 150 道判断题（大部分在每章末尾）用于检验学生对内容的理解程度。对大部分这类问题，教材中提供了简单的正确/错误回答，但是省略了答案的验证（通常需要进一步思考才可完成）。

写作题

写出严谨的数学论述，不仅对那些希望成为数学系研究生的学生，而且对所有学习线性代数的学生都十分必要。本书包含的证明大多是习题答案的一部分。需要简短证明的概念题，常包含可以帮助学生开始解题的提示。对所有奇数的写作题，或者在课本的后面给出一个解答或提示，或者在后面描述的“学习指导”（Study Guide）中给出一个解答。

计算主题

本书强调计算机对科学和工程中线性代数的发展和实践的影响，书中有许多“数值计算的注解”指出数值计算中出现的问题，以及理论概念（如矩阵求逆）和计算机实现（如 LU 分解）之间的区别。

网上支持

学习指导

网站 www.laylinalg.com 包含了学习本课程所需要的所有内容：教材的第 1 章，含有奇数习题的答案；习题的数据文件；复习资料和练习试卷；“学习指导”的第 1 章。

复习资料和练习试卷

多份附有解答的试卷覆盖了教材的所有主要内容。它们直接来自于近年来我所教授的课程。每份复习资料给出了教材指定部分中重要的定义、定理和计算技巧。

案例研究和应用项目

七个案例研究扩展了每章开始所介绍的主题，增加了现实世界的的数据，提供了进一步探索的机会。学生将会发现这些阅读材料很有趣。教师可以给学生安排其中所包含的项目。20 多个应用项目或者扩展了教材中的主题，或者介绍了新的应用，例如立方体样条、交通流量、飞机

VIII

航线、运动比赛中的优势矩阵以及纠错码. 一些新的数学应用是积分方法、多项式根的求解、圆锥曲线、二次曲面和二元函数的极值. 线性代数的数值计算主题, 如条件数、矩阵因式分解和求特征值的 QR 方法也包含在内. 在每个项目中都编有涉及大数据集的习题 (因此需要使用计算机技术来求解).

数据文件

对教材中的 900 道数值计算题、案例研究和应用项目, 网站上提供了数百个相应的数据文件. 这些数据以多种格式存储, 分别用于 MATLAB、Maple、Mathematica 以及 TI-83+/86/89 和 HP48G 图形计算器. 对一道特定的题目, 访问矩阵和向量只需要几次键击, 从而减少了输入数据的错误, 并可节省做作业的时间.

补充内容

学习指导

平装本的“学习指导”(ISBN 0-201-77013-X)作为完整课程的一部分, 通过几种方式补充教材: 1) 它指导学生如何学习线性代数, 包含学习和讨论各类定理和证明的逻辑结构的建议; 2) 它给出每第三个奇数习题的详细解答 (包括大多数关键习题) 和课本答案仅有“提示”的每一个奇数写作题的答案; 3) 它为课本中使用的技术提供了“实验手册”, 为带有[M]的习题增加了提示, 对 MATLAB、Maple、Mathematica 和图形计算器中初次使用的命令给出了适当描述.

教师版

为方便教师, 这个特殊版本包含所有习题的简单答案, 课本开始在“给教师的注释”中给出了有关课程内容设计和组织的解释, 以帮助教师安排课程. 该版本还提供了专为教师准备的其他支持材料.

教师技术手册

每一本手册给出了详细指导, 集成了全书的特定软件包或图形计算器, 由使用过该教材中的技术的教师编写而成.

致谢

我真诚地感谢多年来以各种方式帮助我的许多人.

感谢 Israel Gohberg 和 Robert Ellis 长达 15 年的线性代数合作研究, 他们帮助我形成了线性代数的观点.

与 David Carlson、Charles Johnson 和 Duane Porter 共同工作在“线性代数课程研究小组”是我的荣幸，在几个重要方面，他们关于线性代数教学的思想影响着本教材。

对每章开始的例题和接下来的讨论，感谢以下人员的帮助：温思罗普大学的 Thomas Polaski 教授；纽约大学经济分析研究所的 Wassily Leontief 教授；马里兰大学的 Clopper Almon；波音公司幻影工作室的 David P.Young；洪堡州立大学的 Roland Lamberson；地球卫星公司的 Russell Hardie 和 Chris Peterson。

感谢提供技术支持的专家，是他们不辞劳苦地为第 3 版准备数据、给教师编写笔记、在“学习指导”中为学生编写技术笔记、将他们的项目和大家一起分享，他们是：泰勒大学的 Jeremy Case (MATLAB)；南卡罗来纳大学的 Douglas B. Meade (Maple)；惠氏学院的 Lyle Cochran (Mathematica)；西方浸信会学院的 Michael Miller (TI 计算器)；温思罗普大学的 Thomas Polaski (HP-48G)。同时还要感谢近几年我最好的两个本科生——Barker French 和 Ariel Weinberger，他们更新了第 2 版的 MATLAB 数据，检验了习题解答中的全部计算，并写了一些附加解答的草稿。最后，感谢圣何塞州立大学的 Jane Day 和德雷克大学的 Luz DeAlba，他们允许我继续使用他们十年来为这本教材开发的杰出项目。他们的支持、鼓励和友谊对我是十分重要的。

我真诚感谢下面审稿者的仔细分析和有创意的建议。

第 3 版审稿者和课堂检验者

David Austin, 葛朗德谷州立大学; G. Barbanson, 得克萨斯大学奥斯汀分校; Kenneth Brown, 康奈尔大学; David Carlson, 圣迭戈州立大学; Greg Conner, 伯明翰扬大学; Casey T. Cremins, 马里兰大学; Sylvie DesJardins, 奥卡纳甘大学学院; Daniel Flath, 南亚拉巴马大学; Yuval Flicker, 俄亥俄州立大学; Scott Fulton, 卡拉科森大学; Herman Gollwitzer, 爵硕大学; Jeremy Haefner, 科罗拉多大学斯普林斯分校; William Hager, 佛罗里达大学; John Hagood, 北亚利桑那大学; Willy Hereman, 科罗拉多矿物学校; Alexander Hulpke, 科罗拉多州立大学; Doug Hundley, 韦特曼学院; James F. Hurley, 康涅狄格大学; Jurgen Hurrelbrink, 路易斯安那州立大学; Jerry G. Ianni, 拉瓜底亚社区学院; Hank Kuiper, 亚利桑那州立大学; Ashok Kumar, 南佐治亚州立大学; Earl Kymala, 加州州立大学萨克拉门托分校; Kathryn Lenz, 明尼苏达大学德卢斯分校; Jaques Lewin, 锡拉丘兹大学; En-Bing Lin, 托莱多大学; Andrei Maltsev, 马里兰大学; Abraham Mantell, 拿骚社区学院; Madhu Nayakkankuppam, 马里兰大学巴尔的摩镇分校; Lei Ni, 斯坦福大学; Gleb Novitchkov, 宾夕法尼亚州立大学; Ralph Oberste-Vorth, 南佛罗里达大学; Dev Sinha, 布朗大学; Wasin So, 圣迭戈州立大学; Ron Solomon, 俄亥俄州立大学; Eugene Spiegel, 康涅狄格大学; Alan Stein, 康涅狄格大学; James Thomas, 科罗拉多州立大学; Brian Turnquist, 柏斯尔学院; Michael Ward, 西俄勒冈大学; Bruno Welfert, 亚利桑那州立大学; Jack Xin, 得克萨斯大学奥斯汀分校。

我真诚地感谢温思罗普大学的 Thomas Polaski，他编写了网站上提供的案例研究和项目，

帮助编写习题答案和解答，提供 HP-48G 计算器的技术支持，在需要咨询时总是可以获得他的建议。我很感谢 Thomas Wegleitner、Deanna Richmond 和 Paul Lorczak，他们检查了教材中计算的正确性，而 Georgia K. Mederer 校对了定理证明的数学推导。另一位帮助改善最终手稿质量的是出版商 Jane Hoover，她监督了教材的编辑和排版印刷，十分感谢她的帮助。

最后，我真诚感谢 Addison-Wesley 出版公司的职员在第 3 版的制作中提供的帮助。项目经理 Rachel S. Reeve 是这一版本面世的重要人物，他管理超过 50 人的团队从事于这个项目的各个方面的工作，频繁调整工作进度，耐心地帮助我完成相应的工作。其他重要的职员是：助理编辑 Stefanie Borge；图像美工 Beth Anderson；制作总监 Karen Wernholm；市场经理 Michael Boezi；市场协调员 Weslie Lewis；媒体制作 Marlene Thom 和 Jennifer Kerber。最后特别感谢两位朋友——出版商 Greg Tobin 和项目编辑 Laurie Rosatone，他们从一开始就给予了明智的建议和鼓励，帮助解决了出版过程中的每一个问题，非常感谢他们。

David C. Lay

给学生的注释

这门课程是最有趣、最有价值的大学数学课程。事实上，一些学生在毕业以后告诉我们他们在大公司的工作中或工程研究生院的学习中还使用本教材作为参考书。下面的注释给出一些建议和消息，有助于你掌握课本内容并且从中得到乐趣。

在线性代数中，概念和计算同样重要。每个习题集开始的简单数值练习仅仅帮助你检查对基本步骤的理解。以后，虽然计算机会进行数值计算，但你必须选取计算方法，知道如何解释结果，并且向其他人解释结果。由于这个原因，课本中的许多习题要求你解释或验证计算。书面解释经常是习题答案的一部分，对奇数习题，会有一个期望的解释或者好的提示。在独立写出答案之前应尽量避免查阅这些答案，否则，你会认为你已理解实际上并不懂的问题。

为掌握线性代数的概念，你必须仔细地反复阅读本书。新的术语用黑体标示，有时写在定义框中。书的最后给出一个术语表，便于参考。重要的命题以定理的形式给出或放在方框中。最好阅读一下前言中对本书结构的介绍，以对课程的框架有初步的理解。

实际上，线性代数是一种语言，必须用学习外语的方法每天学习这种语言。理解每一节的内容并不容易，除非你已透彻地学习教材且全部做出该节前面的练习，跟上课程的进度会帮助你节约很多时间和解决很多困惑！

数值计算的注解

希望你阅读课本中的“数值计算的注解”，即使你现在没有在学习过程中使用计算机或图形计算器。在实际生活中，线性代数的大多数应用涉及一定数值误差限制下的数值计算，即使误差相当小。“数值计算的注解”会指出你以后工作中使用线性代数的潜在困难，如果现在学习了这些注释，你以后就会容易记起这些内容。

如果你对“数值计算的注解”有兴趣，以后可以学习一门线性代数的数值计算课程。由于对计算机处理能力的更高需求，需要计算机科学家和数学家给出更快、更可靠的线性代数的数值算法，需要电子工程师设计出更快和更小的计算机去运行这些算法。这是一个令人激动的领域，线性代数的第一堂课有助于你做好准备。

学习指导

为帮助你成功学习这门课程，我写了一本配合本书的“学习指导”。它不仅有助于你学习线性代数，而且说明了如何学习数学。它包含每第三个奇数习题的详细解答，以及课本答案仅

XII

有提示的奇数写作题的附加答案。“学习指导”还给出常见错误的警告、重点习题的有用提示和潜在考试题，且有一个单独的各章术语表（考试复习时很有用）。此外，“学习指导”还介绍了如何使用 MATLAB、Maple、Mathematica 和 TI、HP 图形计算器，使用这些技术可以节约完成作业的时间。

需要注意的是，之所以将“学习指导”与教材分开，是因为你必须在没有太多的帮助下独立完成作业。多年的经验使我知道太容易查到（如教材后面的）解答会妨碍学生数学能力的开发。前几周的学习会培养出整个学期的学习习惯，并影响到学习效果。我将“学习指导”的第 1 章放在网上，你可以在获得“学习指导”（ISBN 0-201-77013-X）之前就开始学习。请先阅读“如何学习线性代数”，在学习 1.4 节和 1.7 节时，再按照“掌握线性代数概念”的指导去做。我的学生认为这些建议很有帮助，希望你也有同感。献上最好的祝愿。

目 录

译者序	
关于作者	
前言	
给学生的注释	
第 1 章 线性代数中的线性方程组	1
介绍性实例 经济学与工程中的线性模型	1
1.1 线性方程组	2
1.2 行化简与梯形矩阵	12
1.3 向量方程	23
1.4 矩阵方程 $Ax = b$	34
1.5 线性方程组的解集	42
1.6 线性方程组的应用	49
1.7 线性无关	55
1.8 线性变换介绍	62
1.9 线性变换的矩阵	71
1.10 经济学、科学和工程中的线性模型	81
第 1 章补充习题	90
第 2 章 矩阵代数	93
介绍性实例 飞机设计中的计算机模型	93
2.1 矩阵运算	94
2.2 矩阵的逆	103
2.3 可逆矩阵的特征	112
2.4 分块矩阵	117
2.5 矩阵因式分解	123
2.6 列昂惕夫投入产出模型	132
2.7 计算机图形学中的应用	137
2.8 \mathbb{R}^n 的子空间	145
2.9 维数与秩	153
第 2 章补充习题	160
第 3 章 行列式	163
介绍性实例 解析几何中的行列式	163
3.1 行列式介绍	164
3.2 行列式的性质	169
3.3 克拉默法则、体积和线性变换	177
第 3 章补充习题	185
第 4 章 向量空间	189
介绍性实例 空间飞行与控制系统	189
4.1 向量空间与子空间	190
4.2 零空间、列空间和线性变换	199
4.3 线性无关集和基	208
4.4 坐标系	216
4.5 向量空间的维数	225
4.6 秩	231
4.7 基的变换	238
4.8 差分方程中的应用	244
4.9 马尔可夫链中的应用	253
第 4 章补充习题	262
第 5 章 特征值与特征向量	265
介绍性实例 动力系统与斑点猫头鹰	265
5.1 特征向量与特征值	266
5.2 特征方程	273
5.3 对角化	280
5.4 特征向量与线性变换	287
5.5 复特征值	294
5.6 离散动力系统	300
5.7 微分方程中的应用	309
5.8 特征值的迭代估计	317
第 5 章补充习题	323
第 6 章 正交性和最小二乘法	327
介绍性实例 重新整理北美地质数据	327
6.1 内积、长度和正交性	328

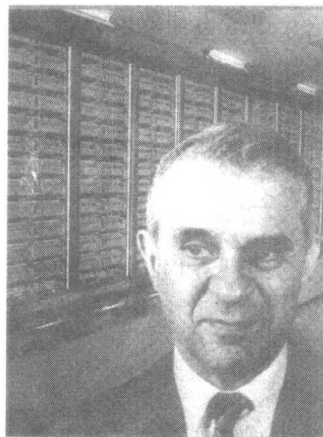
6.2 正交集	336	7.1 对称矩阵的对角化	394
6.3 正交投影	345	7.2 二次型	400
6.4 格拉姆-施密特方法	352	7.3 条件优化	407
6.5 最小二乘问题	358	7.4 奇异值分解	414
6.6 线性模型中的应用	367	7.5 图像处理和统计学中的应用	423
6.7 内积空间	375	第7章补充习题	431
6.8 内积空间的应用	383	附录A 简化形阶梯矩阵的惟一性	433
第6章补充习题	389	附录B 复数	435
第7章 对称矩阵和二次型	393	术语表	441
介绍性实例 多波段的图像处理	393	奇数习题答案	457

第 1 章 线性代数中的线性方程组

介绍性实例 经济学与工程中的线性模型

1949 年夏末, 哈佛大学教授列昂惕夫 (Wassily Leontief) 正在小心地将最后一部分穿孔卡片插入大学的 Mark II 计算机. 这些卡片包含了美国经济的信息, 包括了美国劳动统计局两年紧张工作所得到的总共 25 万多条信息. 列昂惕夫把美国经济分解为 500 个部门, 例如煤炭工业、汽车工业、交通系统等等. 对每个部门, 他写出了描述该部门的产出如何分配给其他经济部门的线性方程. 由于当时最大的计算机之一的 Mark II 还不能处理所得到的包含 500 个未知数的 500 个方程的方程组, 列昂惕夫只好把问题简化为包含 42 个未知数的 42 个方程的方程组.

为解列昂惕夫的 42 个方程, 编写 Mark II 计算机上的程序需要几个月的工作, 他急于知道计算机解这个问题需要多长时间. Mark II 计算机运算了 56 个小时, 才得到最后的答案. 我们将在 1.5 节和 2.7 节中讨论这个解的性质.



列昂惕夫获得了 1973 年诺贝尔经济学奖, 他打开了研究经济数学模型的新时代的大门. 1949 年在哈佛的工作标志着应用计算机分析大规模数学模型的开始. 从那以后, 许多其他领域中的研究者应用计算机来分析数学模型. 由于所涉及的数据数量庞大, 这些模型通常是线性的, 即它们是用线性方程组描述的.

线性代数在应用中的重要性随着计算机功能的增大而迅速增加, 而每一代新的硬件和软件引发了对计算机能力的更大需求. 因此, 计算机科学就通过并行处理和大规模计算的爆炸性增长与线性代数密切联系在一起.

科学家和工程师正在研究大量极其复杂的问题, 这在几十年前是不可想象的. 今天, 线性代数对许多科学技术和工商领域中的学生的重要性可说超过了大学其他数学课程. 本书中的材料是在许多有趣领域中进一步研究的基础. 这里举出几个例子, 以后将列举其他一些领域.

- 石油探测. 当勘探船寻找海底石油储藏时, 它的计算机每天要解几千个线性方程组. 方程组的地震数据从气喷枪的爆炸引起水下冲击波获得. 这些冲击波引起海底岩石的震动, 并用几英里长的电缆拖在船后的地震测波器采集数据.
- 线性规划. 许多重要的管理决策是在线性规划模型的基础上作出的, 这些模型包含几百个变量, 例如, 航运业使用线性规划调度航班, 监视飞机的飞行位置, 或计划维修和机场运作.
- 电路. 工程师使用仿真软件来设计电路和微芯片, 它们包含数百万的晶体管. 这样的软件技术依赖于线性代数与线性方程组的方法.

>>>>>>>

线性方程组是线性代数的核心，本章使用它来引入线性代数的许多重要概念. 1.1 节和 1.2 节介绍求解线性方程组的一个系统方法，这个算法在全书的计算中都用到. 1.3 节和 1.4 节指出线性方程组等价于一个向量方程与矩阵方程. 这种等价性把向量的线性组合问题化为线性方程组的问题. 线性表示，线性无关和线性变换的基本概念将在本章后半部分研究，它们在整个本书中起着关键的作用，并使我们体会到线性代数的魅力和威力.

1.1 线性方程组

包含未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个线性方程是形如

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

的方程，其中 b 与系数 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数或复数，通常是已知数. 下标 n 可以是任意正整数. 在本书的例题中， n 通常是在 2 与 5 之间. 在实际问题中， n 可以是 50, 5000 或更大.

方程

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \text{ 和 } x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

都是线性方程，因为它们可以化为

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \text{ 和 } 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

方程

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \text{ 和 } x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

都不是线性方程，因为第一个方程中包含 x_1x_2 第二个方程中包含 $\sqrt{x_1}$.

线性方程组是由一个或几个包含相同变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组成的. 例如，

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned} \quad (2)$$

线性方程组的一组解是一组数 (s_1, s_2, \dots, s_n) ，用这组数分别代替 x_1, x_2, \dots, x_n 时所有方程的两边相等. 例如，方程组 (2) 有一组解 $(5, 6.5, 3)$ ，这是因为，在 (2) 中用这些值代替 x_1, x_2, x_3 时，方程组变成等式 $8=8$ 和 $-7=-7$.

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集. 两个线性方程组称为等价的. 若它们有相同的解集. 就是说，第一个方程组的每个解都是第二个方程组的解，第二个方程组的每个解都是第一个方程组的解.

求包含两个未知数的两个方程组成的方程组的解，等价于求两条直线的交点. 一个典型的例子是

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

这两个方程的图形都是直线，用 l_1 和 l_2 表示，数对 (x_1, x_2) 满足这两个方程当且仅当点 (x_1, x_2) 是这两条直线的交点. 容易验证，这个方程组有惟一的解 $(3, 2)$ ，如图 1-1 所示.

当然，两条直线不一定交于一个点，它们可能平行，也可能重合，重合的两条直线上的每个点都是交点. 图 1-2 是与下面两个方程组对应的图形：