

数学题误解分析

(高中)

主 编	杨浩清	
副主编	郭长风	陆月明
	王正林	周敏泽
编 写	王刻铭	王惠琴
	范咏南	徐淮源
	嵇国平	尤菊兰
	孙福明	

东南大学出版社

序

华东师范大学出版社委托北京特级教师，负责本丛书高、初中的语文、数学、英语、物理、化学各分册的编写工作。

丛书的作者都是具有丰富教学经验的优秀教师，他们运用多年的教学经验，围绕正课的教学内容，力图使各分册有助于领会这些内容，使中学生能更好地掌握所学的知识，从而提高同学的素质与能力。书中还穿插了较多的例题与练习。

丛书各分册对中学老师的备课与讲授，对中学同学的学习与复习，均会起到良好的作用。



1997年5月于北京

前 言

《特级教师帮你学》丛书初中数学，是根据人民教育出版社出版的“九年制义务教育初级中学教育课本”的内容编写的。

编写时，我们本着“优质、适量”的精神，遵循“突出重点、拓宽知识、解释疑难、指明思路、介绍方法”的原则，着眼于提高广大初中学生的整体素质，力求使本书成为广大初中学生的具有针对性、实用性、启发性、思想性的课外读物，并可供教师备课时参考。

本书参照知识的系统与结构，每单元选取三至五个专题，以分析思路、讲解数学思想方法为主线，这些专题基本覆盖了初中代数、几何知识的重点、难点和关键点。

对编写过程中的错误与不妥之处，望批评指正。

数学特级教师 王建民

1997年5月

于中国科技大学附中(北京)

出版说明

为了让全国中学生都能拥有特级教师，使他们能得到名师的指导和启迪，我们特地编辑出版了《特级教师帮你学》丛书。

丛书根据国家教委“变应试教育为素质教育”的精神，以全日制中学教学大纲和中考要求、高考考纲为依据，结合全国统编新教材和各地新编教材进行编写，普遍适用于全国各地中学。

丛书融汇了作者丰富的教学经验，展现了作者独特的教学方法和教学风格。丛书各册内容安排，既注重基础知识的巩固和基本技能的掌握，又注意思维方法的培养和解题能力的提高。全书力求阐释简明，重点突出，范例典型，习题精要。因此，此书可读性较强，对中学生打好基础，发展智力，提高能力和素质，能起到有效的学习指导作用。

著名数学家杨乐教授十分关心中学基础教育和丛书的编写，欣然应允担任《特级教师帮你学》丛书名誉主编，并为其撰写序言，在此深表敬意。

《初中数学》由北京大学附中、中国科技大学附中(北京)等校教师编写，北大附中数学教研组长、高级教师、中国数学奥林匹克高级教练、曾参与全国和北京教材编写的董世奎，协同主编审定书稿。

书中若有不当之处，期望专家和广大师生提出宝贵意见，以便进一步修订，使这套丛书真正成为中学生的良师益友。

华东师范大学出版社

1997年7月1日

目 录

代 数 部 分

第一单元 实数	(3)
一 数的分类及其有关概念.....	(3)
二 数轴.....	(7)
三 绝对值、相反数和倒数	(7)
四 实数大小的比较.....	(8)
五 实数的运算.....	(9)
六 统计初步	(25)
单元练习一	(30)
第二单元 代数式	(33)
一 代数式的分类	(33)
二 整式的运算	(37)
三 因式分解	(53)
四 分式的概念及其基本性质	(61)
五 分式的运算	(64)
六 二次根式的概念和性质	(71)
七 二次根式的运算	(72)
八 代数式求值的几种方法	(76)
单元练习二	(79)
第三单元 一元一次不等式	(82)
一 不等式的概念和性质	(82)
二 不等式的解和解不等式	(82)
三 一元一次不等式组及其解法	(87)

单元练习三	(90)
第四单元 方程和方程组	(92)
一 基本概念	(92)
二 一元一次方程的概念和解法	(92)
三 一元二次方程	(95)
四 某些特殊高次方程的解法	(107)
五 解分式方程和无理方程	(109)
六 二(三)元一次方程组解法举例	(114)
七 二元二次方程组解法举例	(115)
八 列方程(组)解应用题	(119)
单元练习四	(123)
第五单元 函数	(126)
一 平面直角坐标系的概念及点的坐标	(126)
二 函数	(128)
三 一次函数	(131)
四 反比例函数	(135)
五 二次函数	(138)
单元练习五	(149)

几 何 部 分

第一单元 几何的基础知识	(155)
一 线段的中点与角的平分线	(155)
二 互余互补的角与对顶角	(161)
三 平行线的判定与性质	(165)
单元练习一	(172)
第二单元 三角形	(176)
一 三角形的边角与全等三角形	(176)
二 三角形的角与角度计算	(189)

三	三角形的主要线段与构造全等三角形·····	(196)
四	特殊三角形的性质与判定·····	(204)
五	几何题的若干类型与证法·····	(215)
	单元练习二·····	(224)
第三单元	四边形 ·····	(228)
一	四边形与特殊四边形——平行四边形·····	(228)
二	特殊平行四边形的性质与判定·····	(236)
三	梯形与平移法·····	(247)
四	三角形中位线与梯形中位线·····	(256)
五	一题多解与一题多变·····	(264)
	单元练习三·····	(274)
第四单元	相似形 ·····	(278)
一	如何证明线段成比例·····	(278)
二	比例的应用·····	(288)
三	一个重要比例图形的应用·····	(298)
四	题目条件中有比值条件时常用的处理方法·····	(305)
五	结论为线段比值的和差积的处理方法·····	(314)
	单元练习四·····	(324)
第五单元	解直角三角形 ·····	(329)
一	三角函数值的求法·····	(329)
二	三角函数值的处理方法·····	(338)
三	可解三角形在解题中的应用·····	(348)
	单元练习五·····	(360)
第六单元	圆 ·····	(364)
一	圆中的常用辅助线·····	(364)
二	圆中弧与圆周角互相转换·····	(373)
三	圆的切线的证明·····	(381)
四	圆幂定理的应用·····	(390)

五 常见题形图在解题中的应用.....	(399)
单元练习六.....	(411)
数学中考模拟试题(一).....	(415)
数学中考模拟试题(二).....	(420)
数学中考模拟试题(三).....	(425)
数学中考模拟试题(四).....	(429)
提示与参考答案.....	(433)

代数部分

第一单元 实数

一 数的分类及其有关概念

1. 自然数 用以表示事物的个数或者给事物编序的数, 即 $1, 2, 3, \dots$, 叫做自然数. 自然数又叫做正整数. 由全体自然数组成的集合, 叫做自然数集.

在自然数的前面加上表示相反意义的量的性质符号“ $-$ ”, 就得到负整数.

正整数、零、负整数统称整数. 由全体数组成的集合, 叫做整数集.

零记作 0 , 它是介于正数与负数之间的唯一的整数. 它具有以下特性:

$$(1) a + 0 = a, 0 + a = a;$$

$$(2) a \cdot 0 = 0, 0 \cdot a = 0.$$

式中 a 表示任何数.

2. 整除 设 a, b 为二整数, 且 $b \neq 0$, 若有一整数 q , 使得 $a = bq$, 则称 b 整除 a , 或称 a 被 b 整除, a 叫 b 的倍数, b 叫 a 的约数.

能被 2 整除的整数叫做偶数, 不能被 2 整除的整数叫做奇数.

因为 0 能被 2 整除, 所以 0 是偶数.

每一个大于 1 的自然数, 至少有两个约数, 就是 1 和它本身, 如果它的正整约数只有这两个, 它就叫素数. 大于 1 的自然数, 除

掉 1 和它本身还有别的正整约数的数,叫做复合数.

素数又叫质数,复合数简称合数.

这样,自然数可以分成三类:1、质数、合数.

3. 分数 把一个单位分成若干等份,表示其中的一份或几份的数称为分数.如 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{7}$. 分数的一般形式是 $\frac{m}{n}$ (m, n 为正整数). 当 $n > 0$ 而 $m < 0$ 时, $\frac{m}{n}$ 叫做负分数.

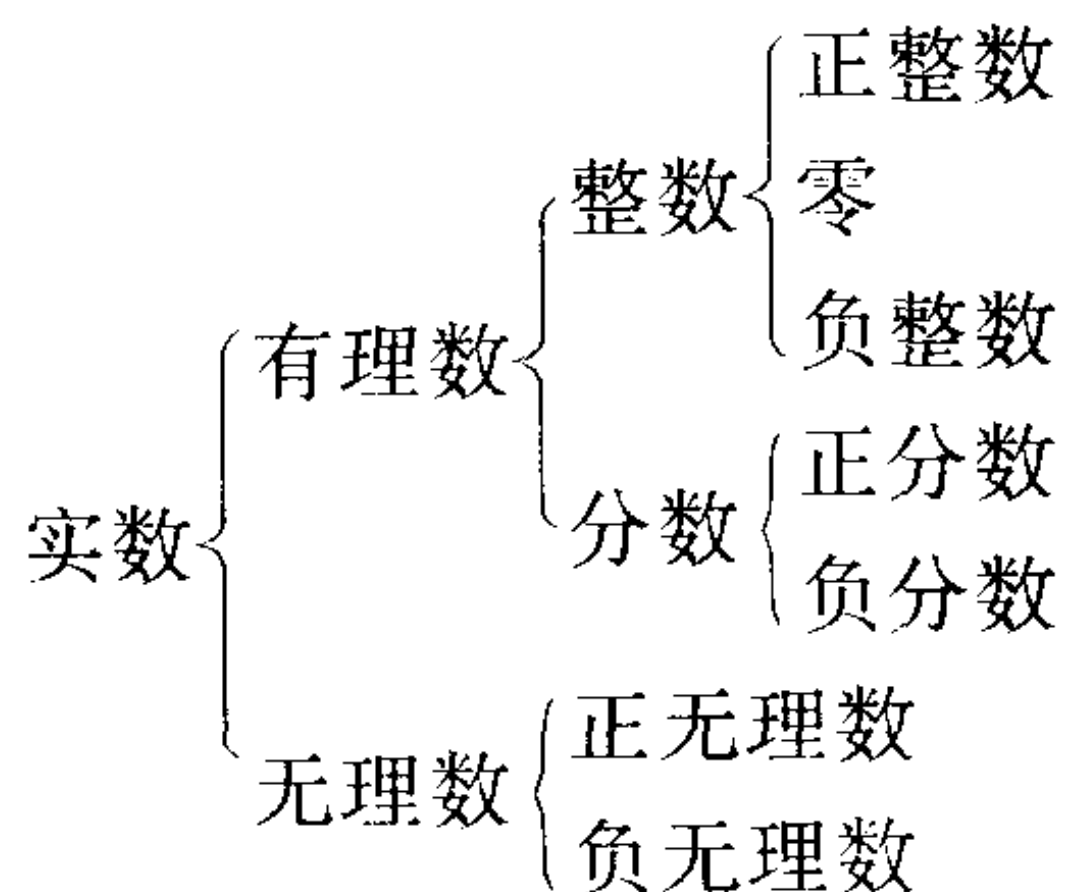
4. 有理数和无理数 整数和分数统称有理数;无限不循环小数叫做无理数.

显然,任何一个无理数都不能表示成两个整数之比.

需要注意的是,带有根号的数不一定是无理数;无理数也不一定带有根号.例如 $\sqrt{4} = 2$, 它是有理数,而圆周率 π 是无理数.

有理数和无理数统称实数.

总结初中阶段所学过的数,有下面的数系表:



上面的数系表,实际上是对实数的一种分类.按照要求把已知数归类,是常见的问题.

例 1. 已知下列各数:

-2 , $\sqrt{9}$, $0.333\cdots$, $-\frac{4}{7}$, $0.1\dot{2}\dot{3}$, 3.1416 , 0.1010010001

…(每两个 1 之间 0 的个数依次为 1, 2, 3, …).

这些数中

(1) 属于自然数集的是_____;

(2) 属于整数集的是_____;

(3) 属于有理数集的是_____;

(4) 属于无理数集的是_____.

解: $\sqrt{9} = 3$, 属于自然数集;

-2 、 $\sqrt{9}$ 属于整数集;

3.1416 是有限小数, $-\frac{4}{7}$ 是分数, $0.333\cdots$ 和 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 是循环小数, 所以它们属于有理数集;

$0.1010010001\cdots$ 是无限不循环小数, 属于无理数集.

例 2. 已知下列各数:

0.1020030004 , $0.5\dot{6}\dot{7}$, $\sqrt{625}$, π , $-\frac{3}{17}$.

其中无理数的个数是().

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

解: 上述各数除 π 以外, 都是有理数, 故应选(B).

例 3. 有以下四个命题:

(1) 自然数就是正整数.

(2) 0 是最小的正整数.

(3) 有理数可以分成正有理数和负有理数.

(4) 自然数可以分成质数与合数.

其中正确命题的个数是().

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

解: 引进负数的概念以后, 自然数也叫正整数, 所以命题(1)是正确的.

0 虽然是整数, 但它既不是正整数, 也不是负整数, 所以命

题(2)是错误的.

0 是整数, 因此是有理数, 但 0 既不是正有理数, 也不是负有理数, 所以命题(3)是错误的.

1 不是质数也不是合数, 因此自然数可以分成三类: 1、质数、合数. 所以命题(4)也是错误的.

综上所述, 应选(A).

说明: 解选择题只需做出选择, 即把正确的编号填入题中的括号内, 无需说明理由. 上述两例的“解”只是为了说明怎样做出选择.

例 4. 求证 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

证明: 假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}$ 可以表示成一个分数, 不妨设

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \text{①}$$

其中 m, n 都是正整数, 且 m, n 的最大公约数是 1.

①式两边分别平方, 得

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

即 $2n^2 = m^2$. 这表明 m^2 是 2 的倍数, 因而 m 是 2 的倍数. 设 $m = 2k$, k 为正整数, 代入上式, 得

$$2n^2 = 4k^2,$$

$$n^2 = 2k^2.$$

因而 n 也是 2 的倍数, 这与假设 m, n 的最大公约数是 1 相矛盾.

由此可见, $\sqrt{2}$ 不是有理数.

说明: 本例采用的证明方法是反证法. 应用反证法证题的一般步骤是:

- (1) 否定结论, 假设结论的反面成立;
- (2) 进行一系列推理;

(3) 在推理过程中出现了下列情况中的一种：

- ① 与已知条件矛盾；
- ② 与公理矛盾；
- ③ 与已知定理矛盾；
- ④ 与临时的假定矛盾；
- ⑤ 自相矛盾；

(4) 由上述矛盾的出现可以断言，“否定结论”是错误的；

(5) 肯定原来的结论是正确的。

例 4 是通过一系列推理，出现了与临时假定的矛盾。

二 数 轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反之，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。因此，数轴做为点的集合，与实数集之间可以建立起一一对应的关系，在某些场合，实数和数轴上表示这个数的点可以不加区别。

三 绝对值、相反数和倒数

1. 绝对值 实数 a 的绝对值记作 $|a|$ 。并规定：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

实数 a 的绝对值的几何意义是：数轴上表示 a 的点到原点的距离。

2. 相反数 设 a 为一实数，则称 $-a$ 是 a 的相反数。显然 a 与 $-a$ 互为相反数。

若二实数 a, b 互为相反数, 则 $a+b=0$; 若 a, b 为二实数, 且 $a+b=0$, 则 a, b 互为相反数. 0 的相反数就是 0.

3. 倒数 设 a 为一实数, 且 $a \neq 0$, 则称 $\frac{1}{a}$ 是 a 的倒数. 显然, 对于任意的非零实数 a , a 与 $\frac{1}{a}$ 互为倒数.

若二实数 a, b 互为倒数, 则 $ab=1$; 若二实数 a, b 满足条件 $ab=1$, 则 a, b 互为倒数.

四 实数大小的比较

方法 1: 利用数轴上的点的位置比较.

设数轴上表示两个实数 a, b 的点分别是 A, B .

如果 A 点在 B 点的右边, 那么 $a > b$;

如果 A 点与 B 点重合, 那么 $a = b$;

如果 A 点在 B 点的左边, 那么 $a < b$.

方法 2: 正数大于零, 零大于负数, 两个负数, 绝对值大的反而小; 若 $a > b, b > c$, 则 $a > c$.

例 1. 比较下列各组数的大小:

(1) 0 与 -0.1 ,

(2) $-\frac{3}{5}$ 与 $-\frac{4}{7}$,

(3) $-|-0.42|$ 与 -0.42 .

解: (1) $\because$ 零大于负数, $\therefore 0 > -0.1$.

(2) $\because \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} = \frac{21}{35}, \left| -\frac{4}{7} \right| = \frac{4}{7} = \frac{20}{35},$

而 $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}, \therefore -\frac{3}{5} < -\frac{4}{7}.$

(3) $\because -|-0.42| = -0.42, \therefore -|-0.42| = -0.42.$

例 2. 比较下列各组数的大小:

- (1) π 与 3.1416,
- (2) $\sqrt{2}$ 与 1.414,
- (3) $-2\sqrt{7}$ 与 $-4\sqrt{2}$.

解: (1) $\because \pi \approx 3.14159\cdots, \therefore \pi < 3.1416$.

(2) $\because \sqrt{2} \approx 1.4142\cdots, \therefore \sqrt{2} > 1.414$.

(3) $\because 2\sqrt{7} = \sqrt{28}, 4\sqrt{2} = \sqrt{32},$

而 $\sqrt{28} < \sqrt{32},$

$\therefore -2\sqrt{7} > -4\sqrt{2}.$

五 实数的运算

初中阶段涉及到的实数运算有: 加法、减法、乘法、除法、乘方和开方. 运算时必须按照运算顺序、运算律和运算法则进行.

1. 实数的运算顺序

(1) 先进行第三级运算(乘方或开方), 再进行第二级运算(乘法或除法), 最后进行第一级运算(加法或减法);

(2) 对于同一级运算, 应从左到右依次进行;

(3) 若有括号, 一般地先进行括号里的运算, 先小括号, 后中括号, 再大括号.

2. 实数的运算律

(1) 交换律

$$a+b=b+a, ab=ba;$$

(2) 结合律

$$(a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc);$$

(3) 分配律

$$a(b+c)=ab+ac.$$