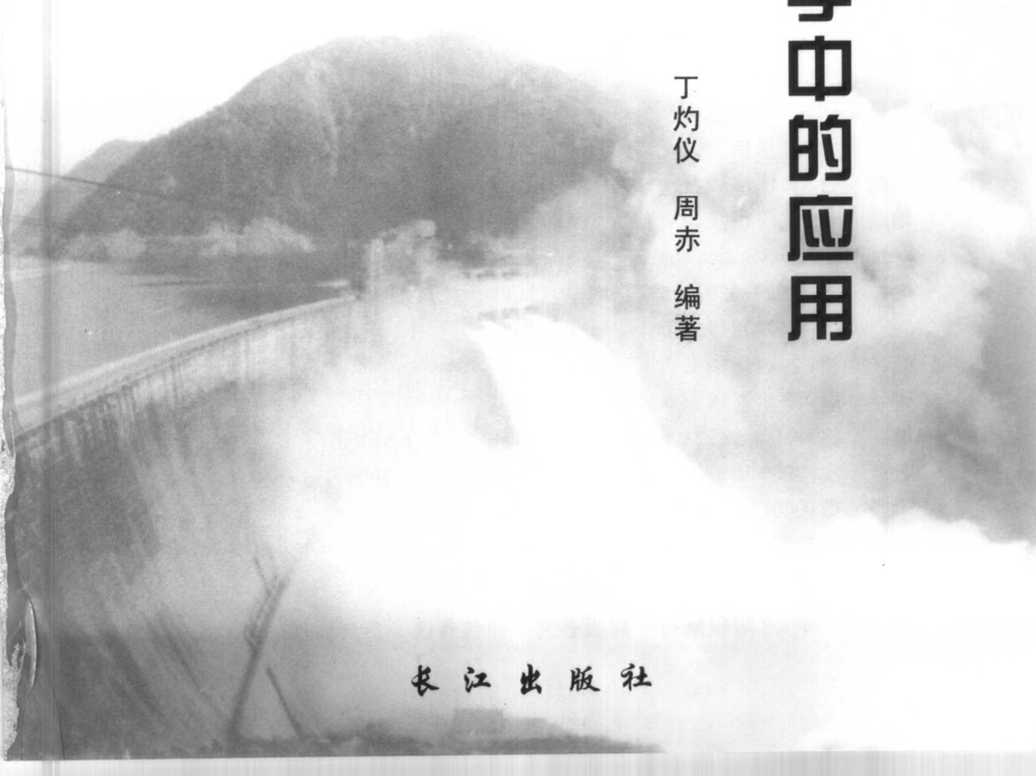
随机分析方法基础及其在水工水力学中的应用

丁灼仪 周赤 编著

长江出版社

随机分析方法基础及其在水工水力学中的应用

丁灼仪　周赤　编著



长江出版社

图书在版编目(CIP)数据

随机分析方法基础及其在水工水力学中的应用/丁灼仪，周赤编著. —武汉：长江出版社，2004.12

ISBN 7-80708-019-1

Ⅰ.随… Ⅱ.①丁…②周… Ⅲ.随机分析—应用—水利工程—水力学 Ⅳ.TV13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 117803 号

随机分析方法基础及其在水工水力学中的应用　　丁灼仪，周赤编著

责任编辑：赵冕　　**技术编辑**：王秀忠

装帧设计：刘斯佳　　**责任校对**：李海振

出版发行：长江出版社

地　　址：武汉市汉口解放大道 1863 号　　**邮　　编**：430010

E-mail：cjpub@vip.sina.com

电　　话：(027)82927763(总编室)

(027)82926806(市场营销部)

经　　销：各地新华书店

印　　刷：湖北省通山九宫印务有限公司

规　　格：880mm×1230mm　1/32　6.5 印张　155 千字

版　　次：2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷

印　　数：0001—1000 册

ISBN 7-80708-019-1/TV · 6

定　　价：26.00 元

随机分析方法基础
及其在水工水力学中的应用

编纂人员

编　　著　丁灼仪　周　赤

参　　编　(按姓氏笔画排列)

王才欢　江耀祖　姜伯乐

段文刚　郭均立　韩继斌

曾　祥

前　　言

目前，随机分析方法在无线电、地震、石油勘探等领域的应用已相当广泛。随机分析方法用于水力学问题的研究，虽然只是近 30 多年的事，但随机水力学的研究，在国内外均受到极大的关注。随机水力学(stochastic hydraulics)已成为水力学的重要新分支。

随着量测技术的发展和电子计算机的普遍应用，我国在应用随机分析方法研究水工水力学较为复杂的问题(诸如水流脉动，空化，掺气等)均有较大的进展。研究工作正在不断深入，研究人员队伍也正在不断扩大。此外，近年来用于随机数据的采集、处理、计算的专用仪器大量生产，特别是计算机技术的高速发展，为随机分析方法在水工水力学中的应用带来很大的方便。但另一方面，笔者在工作中发现，如果科技人员单纯依赖仪器提供数据而忽视对随机分析方法基本理论的理解，研究工作将难以深入且会出现差错，或对仪器输出的数据不能灵活处理与应用。

鉴于上述情况，笔者深感需要有一本关于应用随机分析方法研究水工水力学问题的入门书，使初学者或初步接触这方面工作的试验、研究人员，对于随机分析方法的基础知识有较清楚的了解并能在工作中应用，基本上能做到既知其然又知其所以然。这就是编写本书的目的。基于这样的目的，在本书的前四章(包括概率论与数理统计，傅里叶变换，快速傅里叶变换，随机过程理论)介绍基本理论时，着重于讲清概念而不做冗长的数学推导和复杂的证明。第 5 章讨论随机数据预处理的基本理论与方法，是基本理论的初步应用。第 6 章介绍应用

随机分析方法研究水工水力学的几个主要问题的方法及较为成熟的研究成果，作为应用基本理论的实践。在书的附录中，附有必要的数表供查阅。

本书虽仅仅是一本入门的小册子，但对于初学者也许有所裨益。由于水平所限，不当之处在所难免，望读者多加指正。

编　者

2004.2

目　录

第1章 概率论与数理统计的基本知识

自然界中有两类现象：一类属确定性的，称必然现象；另一类属非确定性的称偶然现象或随机现象。例如，随意向上抛一枚硬币，无论如何抛，由于地心吸力的作用，它一定要向下落在地面上，故为必然现象。但硬币落地后是哪一面朝上则不一定，只能说可能正面朝上也可能背面朝上，故为随机现象。又如，水流流经水工建筑物的某一边界，该边界一定要承受水的压力，这是必然现象。但在其他条件不变的情况下，边界所承受的压力的大小往往是随时间变化的。需经测试之后方能知道，所以为随机现象。

从上述可见，在相同的条件下进行一系列的观测或试验，每一次观测或试验有多个可能的结果，每一个可能的结果在试验前是无法预知的，这种现象称为随机现象。虽随机现象的每一次试验结果是不确定的，但在大量的重复试验下，却呈现出某种规律性，即所谓统计规律。概率论和数理统计就是研究这种统计规律的数学工具。

1 几个基本概念

1.1 随机试验

综上所述，随机现象的结果是要通过试验方能得知，这里所说的“试验”是广义的，它既包括各种科学试验，也包括对某事物特征的观察。随机试验是如此一种试验：①在相同条件下，可进行重复试验；

②每次试验可能出现不同的结果，出现哪一种结果，试验前不能预知；
③每一个可能的结果都有一定的出现机会。

1.2 随机事件

随机事件就是在随机试验中可能出现的结果，其在大量的重复试验中呈现统计规律。

若在随机试验中，每一次试验必定要出现其一切可能结果之一，则这个结果就称为简单事件或基本事件，基本事件是不可拆事件。由基本事件组成的事件称复合事件。

在一随机事件中，一定要出现的结果称必然事件，而在试验中完全不可能出现的结果称不可能事件。必然事件和不可能事件都是确定性的。但为叙述方便，将其视作特殊的随机事件。

以掷骰子为例。设"掷骰子"这个随机试验为 E，该试验的所有可能结果是出现 1,2,3,4,5,6 点这六种情况。每掷一次必然出现这六种情况之一，故此六种情况是 E 的基本事件。若要知"E 出现不小于 4 点的事件"，则就是复合事件。因为出现 4 点或 5 点或 6 点均包括在该事件内，即该事件是由 4,5,6 点三个基本事件组成。若要知"E 出现不大于 6 点的事件"，即就是必然事件，而 E 出现大于 6 点的事件就是不可能事件。

从集合论的概念来看，随机试验一切可能的结果就是一个集合。集合中的每一个元素就是基本事件，而复合事件就是该集合中的子集。

1.3 样本空间

样本空间就是某随机试验基本事件的总和，或说是以基本事件为元素组成的集合，通常将样本空间表示为：

$$S=\{e\} \tag{1-1}$$

$$e=e_1,e_2,e_3,\cdots$$

式中：S——样本空间；

$e_i(i=1,2,3,\cdots)$——随机试验的基本事件。

值得注意的是，样本空间是由随机试验的内容来决定的。例如，“掷骰子”这个随机试验，它的样本空间是：

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$

但是，如果要知道，“每次出现点数不小于3”的样本空间则为：

$$S=\{3,4,5,6\}$$

也就是说，虽都是“掷骰子”这样一个随机试验，当内容不同时，便有不同的样本空间。

1.4 频率和概率

以上曾提到，随机试验的结果（事件），试验前是不能预知的。但每一个结果的出现都有一定的机会（可能性）。对于某一随机试验中的事件，往往希望知道它出现的可能性有多大并能用数量表示出来，这就要引入频率和概率的概念。

1.4.1 频率

设有一随机试验 E，样本空间为 S，其中事件 A 在 n 次试验中出现的总次数为 n_A，则比值：

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-2}$$

式中：$f_{(n)}(A)$——事件 A 的频率；

n——样本容量。

可以证明，频率 f_n 有如下性质：

(1)对任一事件，频率 $f_n(A)$ 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)对于样本空间 S 有 $f_n(S)=1$；

(3)对于随机试验 E 中的任何两个互不相容的事件 A 和 B 有 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$。所谓不相容事件是指随机试验 E 的一

次试验中不可能同时出现 A 和 B。$(A+B)$表示 A 和 B 的"事件和"，即表示一次试验中至少出现 A,B 中的一个。

频率在一定程度上反映了事件出现的可能性，但它却随样本容量 n 做随机变化。这是用频率来表示事件发生的"可能性"所存在的问题。

1.4.2 概率

如上所述，频率是随样本容量的增大而做随机波动。但大量的试验表明，随着样本容量的增大，波动量便越来越小并逐渐稳定于一个常数 P。例如对于事件 A，当 n 很大时其频率 $f_n(A)\rightarrow P(A)=$常数而与 n 无关(该结论已获得理论证明)。这个 $P(A)$就是事件 A 的概率，它更加确切地表示了事件 A 发生的可能性。

概率的定义：对于随机试验 E，其样本空间为 S，对于 E 中的任一事件 A，存在一个实数 P 来量度 A 发生的可能程度，则称 P 为 A 的概率。同频率一样，概率也有如下性质：

(1)$0\leqslant P\leqslant 1$；

(2)$P(S)=1$；

(3)$P(A+B)=P(A)+P(B)$；A,B 为 E 中的两个不相容事件。此称概率可加性。

1.5 随机变量的概念

在概率论中，"试验"是广义的术语，随机试验的可能结果——事件，可能是某物理量的数量，也可能是某物理量的性质、特征等。但为了研究的方便，均可将其数量化，例如"抛硬币"这个随机试验，可令出现正面为"1"，出现背面为"零"。则该试验即可取 1,0 两个值来表示不同的结果。也就是说，要引入一个变量，这个变量是事件的函数。

定义：设有一随机试验 E，其样本容量为 $S=\{e\}$，若对于每一个 $e\in s$，均有一实数 $X(e)$与其相对应，于是便得到一个定义在样本空间 S 上的实单值函数 $X(e)$，则称 $X(e)$为随机变量，一般用 X 表示即可。

随机变量不同于一般函数，因为：

(1)随机变量是定义在样本空间上的实函数,而并非定义在实数轴上;

(2)随机事件的出现是有一定概率的,所以随机变量的取值也有一定的概率的。

引入随机变量后即可用数学分析的方法来研究随机现象。

2 随机变量的概率分布

从上述知,随机变量 X 是随机试验结果(事件)的数量表示,而随机变量取值的可能程度(机会)是用概率 P 来表示。于是要研究某一随机试验所有可能结果发生的可能程度,就要研究随机变量 X 的全部可能取值所对应的概率 P,随机变量的概率分布就是研究随机变量的取值与概率的关系。

2.1 分布函数的概念及其性质

对于随机变量 X,记 X 落在区间$(x_1,x_2]$上这一事件的概率为 $P(x_1<X\leqslant x_2\}$。若对于所有的 x_1,x_2 都知道 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}$,使可获得 X 在数轴上全部取值的概率规律的描述,这便是概率分布的概念。

概率 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}$是区间$(x_1,x_2]$的函数,为便于数学上的处理,要变成点的函数,于是要引入分布函数的概念。

2.1.1 分布函数的定义

随机变量 X 的值小于或等于实数 x 的概率记作 $P\{X\leqslant x\}$。显然 $P\{X\leqslant x\}$是 x 的函数,于是令:

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{1-3}$$

则称 $F(x)$为随机变量 X 的分布函数。

令 x_1,x_2 为任意两实数且 $x_2>x_1$。显然,$\{X\leqslant x_1\}$与$\{x_1<X\leqslant x_2\}$是两互不相容事件且$\{X\leqslant x_2\}=\{X\leqslant x_1\}+\{x_1<X\leqslant x_2\}$。所以

根据不相容事件的概率可加性可得：

$$P\{X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_1\}+P\{x_1<X\leqslant x_2\}$$
$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{X\leqslant x_2\}-P\{X\leqslant x_1\}$$

从(1-3)式便可得到：

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1) \tag{1-4}$$

(1-4)式表明，如对于全部的 x 的值均已知 $F(x)$ 的话，则对于所有区间 $(x_1,x_2]$ 的概率均已知。亦即随机变量 X 的概率分布可由 $F(x)$ 完全确定。$F(x)$ 是表示 X 落在 $(-\infty,x]$ 区间上的概率，即：

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{-\infty<X\leqslant x\} \tag{1-5}$$

2.1.2 分布函数的性质

分布函数有如下性质(证明略)：

(1) $F(x)$ 是 x 的非减函数：若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1(-\infty<x<+\infty)$，且：

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$$
$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

(3) $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的。

2.2 离散型随机变量的分布律和分布函数

有些随机变量，其全部可能取值是有限个或可列无限个而不能连续取值。例如抛硬币，只能取 1(正面)和 0(背面)两个值。此类随机变量便是离散的。

离散型的随机变量需知道全部可能的取值 $x_k(k=1,2,3,\cdots)$ 及其概率 $P\{X=x_k\}$，表示为：

$$p_k=P\{X=x_k\} \tag{1-6}$$
$$k=1,2,3,\cdots$$

式中：p_k—随机变量 X 的分布律。分布律可列表表示，如表 1-1 所示；亦可用图表示，如图 1-1 所示。

表 1-1

X	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	…
p_k	p_1	p_2	p_3	p_4	…	p_n	…

分布律有如下性质：

(1) $p_k \geqslant 0, k=1,2,\cdots$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$。

根据分布函数的定义，离散型随机变量的分布函数应为：

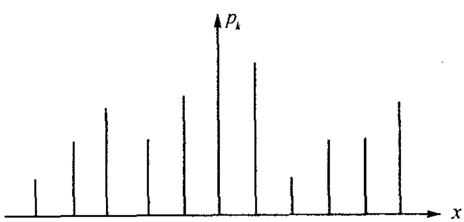


图 1-1

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum_{x_k \leqslant x} P\{X = x_k\}$$

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k \qquad (1\text{-}7)$$

(1-7) 式表明，离散型随机变量的分布函数 $F(x)$，其第 k 个值等于取 $X \leqslant x_k$ 的全部分布律 p_k 之和，如图 1-2 所示。

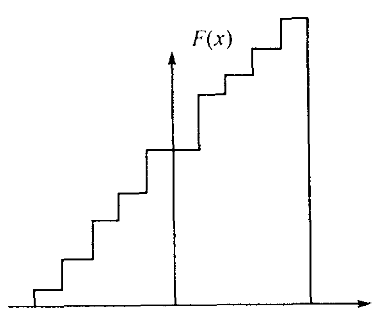


图 1-2