高中数学

题源

TIYUAN

与各种版本的高中课程教材配套使用

集合与简易逻辑

GAOZHONGSHUXUE

丛书主编：傅荣强

本册主编：朱　岩

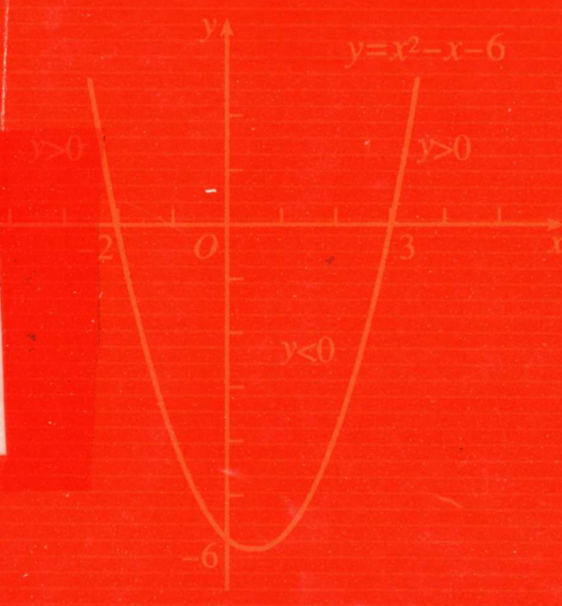
按专题分册

按知识划块

按题型归类

按方法总结

按梯度训练



河北教育出版社

集合与简易逻辑 题源

高中数学

丛书主编：傅荣强　本册主编：朱　岩

河北教育出版社

丛书编写委员会

主编： 傅荣强

编委： 王鸿雁　王家志　于长军　傅荣福　朱　岩
常　青　金　秋　付明忠　苏金生　牛鑫哲
宋冰倩　韩丽云　马金凤

本书作者

主编： 朱　岩

编者： 韩丽云　张俊义

责任编辑： 王福仓

装帧设计： 比目鱼工作室

题源 高中数学 集合与简易逻辑

出版发行	河北教育出版社 （石家庄市友谊北大街 330 号　http://www.hbep.com）
印　刷	保定市印刷厂
开　本	880 × 1230　1/32
印　张	7.25
字　数	208 千字
版　次	2003 年 12 月第 1 版
印　次	2003 年 12 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7－5434－2249－2/G · 1871
定　价	8.50 元

前　言

本书名曰“题源”，有两层含义：一是“题”；二是“源”。这里的“题”是指精选的例题、习题，题目讲解的角度新颖独特，避免题海战术；“源“是指出处、源头，即题目的来龙去脉。“题源”即通过追溯源头来了解数以万计的“题”为何抽象成了有限的“题型”，各种“题型”如何提炼出具体的解决“方法”，各种“方法”又如何再落实到具体应用。

目前的教材改革提倡由具体到抽象、由特殊到一般的教育理念，由具体入手，通过具体操作，体会方法延伸，以提高其实用价值。

本套书从实战操作入手，从“题”的角度切入，每本书224页的内容，足以让你领略“题”的意境；从“源”的角度着重，讲求“题型”、“方法”归纳的简练，提纲挈领，充分让你体会“源”的韵味。

本套书的设计思路：

1．按专题分册　本套书以现有的各种版本教材为基础，取材于各种教材的交汇处，按专题分册编写，可与各种版本的教科书配套使用。全套书共计52册，包含初、高中的数学、物理、化学、三个学科的40个专题，计40册；另有按册编写的初、高中语文各6册。

2．按知识划块　每册书的内容即一个专题内容，全书按知识点分成若干讲，使你对本部分知识的脉络框架一目了然。

3．按题型归类　每一讲按具体内容分成若干题型，使你对本部分知识都包含哪些题型心中有数，避免因不清楚自己对本部分知识掌握的深浅程度而浪费精力。

4．按方法总结　每个题型都有相应总结出的方法作为解题指导，使你能知其然，还能知其所以然。

5．按梯度训练　每一讲的例题及习题都是精选的与题型相关的经典题、创新题，其中创新题篇幅约占30%，大多从具体问题入手，以

探究问题的发展趋势为主，由易到难，循序渐进。

全书栏目设计简单、清晰，具体包括：

1. **题型归纳** 每一讲内容按知识点分布结构归纳成若干题型；

2. **方法概述** 每一个题型后紧随针对此题型的具体解题方法；

3. **例题设计** 每一个方法后是阐述此方法应用的经典例题；

4. **解法点评** 每组例题后相应都有关于此方法适用程度的点评；

5. **要点提示** 解题过程中间或有插入提示指点迷津；

6. **习题配备** 每讲后都配有为巩固本讲知识内容而设置的习题，后附答案与提示。

书由“越学越厚”到“越学越薄”，表明接受知识由难到易的进程，本书教你“越学越薄”的办法。俗语说“万变不离其宗”，宗在哪儿？本书旨在告诉大家如何从源头找到解决各种复杂问题的思路，体味什么是真正的“举一反三”。

“问渠哪得清如许，为有源头活水来”。最近几年的中、高考命题，向综合性、多元化、实用性方向发展，如何把握命题方向，从最简单的角度切入复杂问题当中，从而把复杂问题分解、简化，逐一解决，这是本书要着意顾及的。愿本套书的编写模式，能使你不再不知道学得是否到位，不再对新题型懵懵懂懂，不再对难题发怵。

本套书经过近百位一线教师近一年的努力，终于功成。使我们感到欣慰的是本书从整体框架设计、题型结构设计，到例题、习题选取、讲解梯度，都达到了我们设想的最佳水准。当然，因为种种原因，书中还有一些不尽如人意之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

2004年元月

目 录

第一讲　集　　合

本讲题型

序　号	题　　型
1	判断对象 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 能否构成集合
2	根据元素写集合
3	写出集合$\{P\mid p(x,y)$,且 $x,y\in A\}$的所有元素
4	符号$\in$、$\notin$的使用
5	如何求集合$\{f_1(k),f_2(k),\cdots,f_n(k)\}$中的 k 的取值范围
6	空集$\varnothing$的演变形式
7	判断集合 A 是有限集还是无限集
8	x 与$\varnothing$的从属关系

题型 1　判断对象 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 能否构成集合

方法　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是确定的,它们能构成集合;否则,它们不能构成集合.

【例 1】　判断下列各组对象能否构成集合.

(1)不小于 2004、不大于 2010 的所有正整数;

(2)方程 $x^2-x+\dfrac{1}{2}=0$ 的实根;

(3)比较矮的人.

解　(1)不小于 2004、不大于 2010 的实数 x 满足

$$2004\leqslant x\leqslant 2010,$$

其中的正整数有

$$2004,2005,2006,2007,2008,2009,2010.$$

所以,不小于 2004、不大于 2010 的所有正整数能构成集合;

(2)因为方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的根的判别式

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times\frac{1}{2}=-1<0,$$

所以,方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 没有实根.

所以,方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 的实根能构成集合,这个集合是空集;

(3)比较矮的人不能构成集合.

就人的高与矮而言,找不到一个明确的客观标准,使得在这样的标准下,能说清楚这样的人是存在的或者是不存在的,也就是说,这样的对象是不确定的.

点评

构成集合的对象是确定的,是指能让人们说清楚的对象,存在也可以,不存在也可以.如:第(1)小题中的对象 2004~2010 是存在的;第(2)小题中的对象是不存在的,即方程 $x^2-x+\frac{1}{2}=0$ 没有实根.不能构成集合的对象,即不确定的对象,是指让人们说不清楚的对象,存在与不存在都是模糊的.

题型 2 根据元素写集合

方法 (1)当构成集合的元素的个数是有限的,特别是较少的时候,可把这些元素一一列举出来,写在大括号内,其形式是 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$;

(2)当构成集合的元素 P 适合条件 $p(x)$ 时,集合写成 $\{P\mid p(x)\}$ 的形式.其中,P 称为代表元素,$p(x)$ 称为代表元素适合的条件.

【例 2】 (1)设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$,写出由 x 构成的集合;

(2)写出一元一次方程的解的集合与一元一次方程的集合.

解 (1)由已知可知,$abc\neq0$,

所以,a、b、c 的符号有以下四种可能:

三负；一正两负；两正一负；三正.

由 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$，可得

分类讨论

$$x=\begin{cases}-3(a、b、c\text{ 三负}),\\ -1(a、b、c\text{ 一正两负}),\\ 1(a、b、c\text{ 两正一负}),\\ 3(a、b、c\text{ 三正}).\end{cases}$$

所以，由 x 构成的集合是

$$\{-3,-1,1,3\};$$

(2)一元一次方程的解的集合是

$$\{x \mid ax+b=0, a、b\text{ 是常数，且 } a\neq 0\};$$

一元一次方程的集合是

$$\{ax+b=0 \mid a、b\text{ 是常数，且 } a\neq 0\}.$$

点评

在第(1)小题的解答过程中，求 x 的值，运用了分类讨论的数学思想，即把 a、b、c 分成四类：一个正的也没有；有一个正的；有两个正的；有三个正的. 第(2)小题中应该注意的问题：一元一次方程的解的集合中，代表元素是实数 x，这个集合是实数的集合；一元一次方程的集合中，代表元素是方程 $ax+b=0(a\neq 0)$，这个集合是方程的集合.

题型 3　写出集合 $\{P \mid p(x,y)$，且 $x,y\in A\}$ 的所有的元素

方法　分两步操作：先写出 $p(x,y)$；再找出 $x,y\in A$ 的 P.

【例 3】　写出下列集合的所有元素.

(1){大于 -1 小于等于 6 的自然数}；

(2)$\{(x,y) \mid y=-x+7$，且 $x,y\in \mathbf{N}^*\}$.

解　(1)大于 -1 小于等于 6 的实数 x 满足

$$-1<x\leqslant 6,$$

其中的自然数有

$$0,1,2,3,4,5,6,$$

上面的七个数就是集合的所有元素；

(2)在 $y=-x+7$ 中，依次令 $x=1,2,3,4,5,6,7$，得

$$y=6,5,4,3,2,1,0,$$

其中 $6,5,4,3,2,1\in\mathbf{N}^*$，$0\notin\mathbf{N}^*$，

所以，集合的所有元素是

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1).$$

点评

第(2)小题的解答中，令 $x=7$ 是必要的，这时能够发现与之对应的 $y=0\notin\mathbf{N}^*$. 但是，再一味的令 $x=8,9,\cdots$，那就大可不必了.

题型 4 符号 $\in$、$\notin$ 的使用

方法 符号 $\in$、$\notin$ 是用在元素与集合之间的专用符号，不可挪作他用. a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$；a 不是集合 A 的元素，记作 $a\notin A$，或 $a\overline{\in}A$.

【例 4】 用符号 $\in$、$\notin$ 填空.

(1)若 $P=\{\triangle ABC\mid AB^2+BC^2=AC^2\}$，$\triangle EFG$ 的三边的长分别是 $EF=6$，$FG=8$，$EG=10$，则 $\triangle EFG$ ______ P；

(2)若 $Q=\{x\mid x=3m+1, m\in\mathbf{Z}\}$，则 -11 ______ Q，2006 ______ Q.

解 (1)由 $AB^2+BC^2=AC^2$，可知

$\triangle ABC$ 是直角三角形，

所以，$P=\{\triangle ABC\mid AB^2+BC^2=AC^2\}$ 是直角三角形的集合.

由 $EF=6$，$FG=8$，$EG=10$，可知

$$EF^2+FG^2=EG^2,$$

所以，$\triangle EFG$ 是直角三角形，

所以 $\triangle EFG\in P$；

(2)由 $-11=3\times(-4)+1$，$-4\in\mathbf{Z}$，可知

$$-11\in Q.$$

-11 具有 $x=3m+1, m\in\mathbf{Z}$ 的形式

由 $2006=3\times668+2$，$668\in\mathbf{Z}$，可知

$$2006\notin Q.$$

点评

提高对第(2)小题的理解和认识，关键有二：第一，一个整数被3除，结果有三种可能，即 $x=3m$，整除；$x=3m+1$，余数是1；$x=3m+2$，余数是2. 其中 $m\in\mathbf{Z}$；第二，Q 中的元素都具有 $x=3m+1(m\in\mathbf{Z})$ 的形式，这是"型".

题型 5 如何求集合$\{f_1(k),f_2(k),\cdots,f_n(k)\}$中的 k 的取值范围

方法 k 的取值范围由 $f_i(k)\neq f_j(k)$确定.

其中 $i\neq j$，且 $i,j=1,2,\cdots,n$.

【例5】 设集合 $A=\{1,k^2,k^2+k+2\}$，求实数 k 的取值范围.

解 k 的取值范围由下面的不等式组确定

A的任意两个元素都不能相同

$$\begin{cases}k^2\neq 1,\\ k^2+k+2\neq 1,\\ k^2\neq k^2+k+2.\end{cases} \quad (*)$$

其中，$k^2+k+2\neq 1$ 也即 $k^2+k+1\neq 0$，且 $k^2+k+1=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$ 恒成立，

所以，不等式组(*)可简化为

$$\begin{cases}k\neq\pm 1,\\ k\neq -2.\end{cases}$$

所以，实数 k 的取值范围是

$$\{k\in\mathbf{R}\mid k\neq -2,-1,1\}.$$

点评

在本例中要注意两个问题：(1) $f_i(k)\neq f_j(k)$，$i\neq j$ 的意义是集合中的任意两个元素都不可相同，即所谓的互异性；(2)取值范围问题，其结果要用集合的形式表示，不可用不等式表示.

题型 6 空集$\varnothing$的演变形式

方法 (1)$\{x|f(k)\leqslant x\leqslant g(k)\}=\varnothing \Leftrightarrow f(k)>g(k)$;

(2)$\{x|f(k)<x<g(x)\}=\varnothing \Leftrightarrow f(k)\geqslant g(k)$.

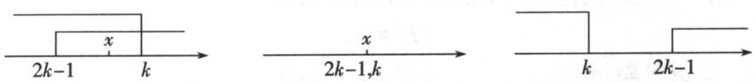
【例 6】 设集合 $A=\{x|2k-1\leqslant x\leqslant k\}$,问:

(1)k 为何值时,$A=\varnothing$;

(2)k 为何值时,$A\neq\varnothing$.

分析 如图 1-1,两个实数 $2k-1$、k 的大小关系有且只有以下三种,即

$$2k-1<k,\text{见图(1)};$$
$$2k-1=k,\text{见图(2)};$$
$$2k-1>k,\text{见图(3)}.$$



(1) (2) (3)

图 1-1

显然,图(1)、(2)中,x 是存在的;图(3)中,x 不存在.

解 (1)设 $2k-1>k$,则

$$k>1.$$

所以,当 $k>1$ 时,$A=\varnothing$;

(2)设 $2k-1\leqslant k$,则

$$k\leqslant 1.$$

所以,当 $k\leqslant 1$ 时,$A\neq\varnothing$.

点评

空集 $\varnothing$ 的演变形式有无穷多种,如:$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$,$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x\\y=x+1\end{cases}\right.\right\}$,$\{\triangle ABC|AB-BC\geqslant AC\}$,….这里我们是为了后续知识的需要,介绍了其中的两种形式.读者可自己总结一下:$\{x|f(k)\leqslant x<g(k)\}=\varnothing$与$\{x|f(k)<x\leqslant g(k)\}=\varnothing$时,$f(k)$与 $g(k)$的关系是怎样的.

题型 7　判断集合 A 是有限集还是无限集

方法　用 card(A)表示集合 A 的元素的个数,当 card(A)有限(或无限)时,集合 A 是有限集(或无限集).

【例 7】　判断下列集合是有限集还是无限集.对有限集,要指出它的元素的个数.

(1)$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -4012<1-2x\leqslant 4031\}$;

(2)平面内到线段 AB 的两个端点的距离相等的点 P 的集合.

解　(1)由 $-4012<1-2x\leqslant 4031$,可得

$$-4013<-2x\leqslant 4030,$$

$$-2015\leqslant x<2006\frac{1}{2}.$$

再由 $x\in\mathbf{Z}$,可得

$x=-2015,-2014,\cdots,2006.$

所以,A 是有限集,它有 4022 个元素;

你知道计算出4022的依据吗?

(2)如图 1-2,到线段 AB 的两个端点的距离相等的点 P,都在线段 AB 的垂直平分线上,集合可表示为

$$\{P\mid PA=PB\},$$

它是无限集.

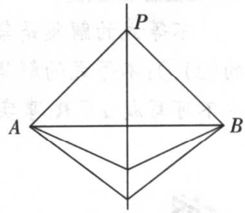


图 1-2

点评

第(1)小题中,4022 是这样计算出来的:连续整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 中,共有整数 m_n-m_1+1 个.

题型 8　x 与 $\varnothing$ 的从属关系

方法　$\varnothing$是不含任何元素的集合,即$\varnothing$是没有元素的.因此,无论何时何处:(1)"$x\in\varnothing$"的写法都是错误的;(2)"$x\notin\varnothing$"的写法总是正确的.

【例 8】 设 $a,b\in\mathbf{R}$,解关于 x 的不等式 $ax>x+b$.

解 不等式 $ax>x+b$ 可化为

$$(a-1)x>b.$$

(1)如果 $a-1>0$,即 $a>1$,那么

$$x>\frac{b}{a-1},$$

不等式的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x>\frac{b}{a-1}\right\}$.

(2)如果 $a-1=0$,即 $a=1$,那么

①若 $b\geqslant0$,则不等式的解集是 $\varnothing$;

②若 $b<0$,则不等式的解集是 $\mathbf{R}$.

最易错误地写成 $x\in\varnothing$, $x\in\mathbf{R}$

(3)如果 $a-1<0$,即 $a<1$,那么

$$x<\frac{b}{a-1},$$

不等式的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x<\frac{b}{a-1}\right\}$.

点评

不等式的解集是集合,不能随意地添加符号"$\in$".如:本例解答过程中的(2)①:不等式的解集是 $\varnothing$,不可写成"$x\in\varnothing$";(2)②:不等式的解集是 $\mathbf{R}$,也不可写成 $x\in\mathbf{R}$.事实上,$x\in\mathbf{R}$ 表示 x 是 $\mathbf{R}$ 的一个元素,此外没有他义.

习题一

一、选择题

1. 下列各组对象能构成集合的是 ( )

   A. 比 2004 大的几个数

   B. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象上的若干个点

   C. 正比例函数 $y=x$ 与反比例函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图象的交点

   D. 面积比较小的三角形

2. 对由 0,2,4,6,…,2002,2004 组成的集合,给出下列四种表示形式:

①$\{x \mid x=2n, 且\ 0 \leqslant n \leqslant 1002\}$；

②$\{x \in \mathbf{N} \mid x=2n, 且\ 0 \leqslant n < 1003\}$；

③$\{x \in \mathbf{Z} \mid x=2n, 且\ -1 < n < 1003\}$；

④$\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{2}=n, 且\ n=0,1,2,\cdots,1002\right\}$.

在以上四种表示形式中，正确的是　　（　　）

A.①②③　　B.①②④　　C.①③④　　D.②③④

3. 集合 $A=\left\{x \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{8}{6-x} \in \mathbf{N}^*\right\}$的所有元素是　　（　　）

A.1,2,3,4　　B. −2,2

C. −2,2,4,5　　D.2,4,5

4. 设 $A=\{x \mid x=2k, k \in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$，给出下列四个结论：

①若 $a \in A, b \in B$，则 $a \pm b \in B$；

②若 $a \in A, b \in B$，则 $ab \in A$；

③若 $a_1, a_2 \in A$，则 $a_1+a_2 \in B$；

④若 $b_1, b_2 \in B$，则 $b_1+b_2 \in A$.

在以上四个结论中，正确的是　　（　　）

A.①②③　　B.①②④　　C.①③④　　D.②③④

二、填空题

5. 设 $M=\{x \in \mathbf{R} \mid x=p\sqrt{7}+q, 且\ p, q \in \mathbf{Z}\}$，则$\frac{1}{8+3\sqrt{7}}$______$M$.

6. 一次函数的图象上的所有点构成的集合是______；全体一次函数的集合是______.

7. 集合$\left\{\sin 30°, m+1, m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right\}$中，实数 m 的取值范围是______.

8. 图 1-3 中的射线 AB 上的所有点构成的集合可以表示为______，这条射线上的所有点的纵坐标构成的集合可以表示为______.

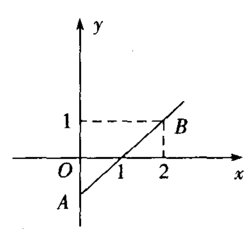


图 1-3

三、解答题

9. 已知集合 $P=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{n}{3^m}, 且\ m, n \in \mathbf{N}\right\}$，且 $y, z \in P$，求证：$y+z \in A, yz \in A$.

10. 已知集合 $P=\left\{x\in\mathbf{R}\ \middle|\ kx^2-5x+\frac{25}{4}=0\right\}$ 至多有一个元素，求实数 k 的取值范围.

【答案与提示】

一、选择题

1. C.

选项 A 中的“几个数”、选项 B 中的“若干个点”、选项 D 中的“面积比较小”，这些都是模糊概念，因此，与之对应的对象都是不确定的，自然它们也就不能构成集合.

下面看选项 C:

如图 1-4，正比例函数 $y=x$ 与反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象没有交点，

所以，两个函数的图象的交点能构成集合，这个集合是空集 $\varnothing$.

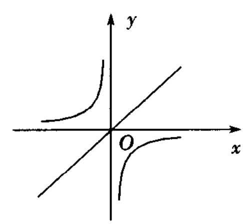


图 1-4

2. D.

①是错误的，原因：这里的 n 是实数. 如，$n=\frac{3}{2}$ 时，$x=3$，而 3 不在 0,2,4,6,…,2002,2004 之列.

②、③、④是正确的.

3. D.

由 $\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N}^*$，可知

$6-x$ 是 8 的约数(或者说 8 能被 $6-x$ 整除)，且 $6-x>0$.

所以 $6-x=1,2,4,8$，

解得 $x=5,4,2,-2$.

其中 $5,4,2\in\mathbf{N}$，$-2\notin\mathbf{N}$，

所以，集合 A 的所有元素是 2,4,5.

4. B.

先讨论①:

由 $a\in A$，$b\in B$，可得

$$a=2k_1,\ k_1\in\mathbf{Z},$$

$$b=2k_2+1,\ k_2\in\mathbf{Z}.$$

上面的两个式子相加、减，得