彩虹策划

◎丛书总主编 吴 康
◎本册主编 吴 康

奥赛金牌题典

AOSAI JINPAI TIDIAN

高一数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

奥赛金牌之路丛书

本册主编　吴　康

Aosai Jinpai Tidian

奥赛金牌题典

高一数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂 林·

编委会名单

奥赛金牌题典　高一数学

主　编　吴　康

副主编　王向东

责任编辑：梁燕鸿　　装帧设计：杨　琳

广西师范大学出版社出版发行

广西桂林市育才路 15 号　　邮政编码：541004

网址：http://www.bbtpress.cn

广西南宁华侨印刷厂印刷

*

开本：890×1 240　1/32　　印张：10.25　　字数：330 千字

2004 年 6 月第 1 版　　2004 年 6 月第 4 次印刷

印数：38 001—45 000 册

ISBN 7-5633-3583-8/G・2311

定价：11.50 元

前　言

数学是古老而又年轻、庞大而又单一的科学，应用极为广泛，几乎所有的科学都因应用了数学得到极大的发展.数学是21世纪中小学生面前的一座高山.山上云雾缭绕，山上风景万千.爬山是艰苦的，但登山是一件乐事.

数学竞赛源远流长，可以追溯到16世纪三次方程的求解“擂台赛”.现代数学竞赛，可以追踪到1894年匈牙利中学数学竞赛.中国现代数学竞赛活动源于1956年京、津、沪、汉四城市的高中数学竞赛，复兴于1978年的全国和京、沪、津、陕、皖、川、辽、粤八省市中学数学竞赛.1959年起举办的历届国际数学奥林匹克(IMO)，规模宏大，影响深远.

数学竞赛帮助广大学生激发学习兴趣，启迪思维，培养能力，提高知识水平.竞赛试题和解答展现出一幅比数学教科书更绚丽多姿的画卷，其璀灿鲜艳的花朵，琳琅满目的果实，其气象万千的景致，峰回路转的情调，使人目不暇接，流连忘返.

本卷的题解、分析、讨论和点评，给出对问题的深入思考和细致评述，让我们理解问题的实质和变化、源由和关系.A、B、C三类问题，适合各种需要.内容既依据新教学大纲、数学竞赛大纲，又适当超前、综合和提高；既按照代数、几何、初等数论、组合数学和图论等数学分支分开专题，又别出心裁从数学问题求解方法入手，精选若干专题，混合编排，照顾不同的需求——“源于课本，高于课本”，使多数参加课外活动的学生可用、合用、易用、乐用.

本卷由华南师范大学数学系硕士生导师、《中学数学研究》月刊副主编吴康副教授任主编，佛山科技学院教务处处长王向东教授任副主编.参加编写的有吴康，王向东，广西科学院副院长、广西计算机学会理事长罗海鹏研究员，广西大学梧州分校科研处处长、2001年广西壮族自治区科学技术进步奖一等奖荣获者苏文龙研究员，桂林中学高级教师、

原数学科组长黄文斐，汕头大学理学院原副院长、原国家教委考试中心命题组成员、曾17次参加全国高考命题和研究生入学考试命题的钱昌本副教授，澳门培正中学校长李祥立硕士，全国初等数学研究工作协调组成员、《不等式研究通讯》主编、福州二十四中副校长杨学枝高级教师，广州执信中学高级教师、原数学科组长凌锦华副教授，茂名一中特级教师、原数学科组长黎建明，湛江教育学院数学系主任林观尚讲师，深圳高级中学特级教师、深圳市中学学科带头人冯跃峰，上海二中特级教师杨德胜，广东阳春一中校长、高级教师梁晓硕士，阳春市广播电视大学校长彭山高级讲师，广州市二中高级教师、数学科组长曹亮敏，华南师大附中高级教师、广东奥林匹克学校高中数学教练组组长李兴怀，广州市教研室教研员许世红硕士，广东连州中学副校长李科明，佛山市石湾区教研室教研员郑俊盛高级教师，湛江一中高级教师陈光捷，广东吴川一中数学科组长林观有，河源职业技术学院讲师邱建霞，华南师大课程与教学论专业竞赛数学方向硕士研究生杨萍．其中，吴康、王向东、黄文斐、钱昌本、冯跃峰、李兴怀是中国数学奥林匹克高级教练员，吴康、李兴怀曾出任中国数学奥林匹克集训队教练，李祥立曾出任31～35届IMO裁判团成员和澳门队领队，吴康曾出任澳门队教练，他们指导过1986～2002历年国际数学奥林匹克中国金牌选手中的滕峻、刘雄、何宏宇、陈晞、汪建华、袁汉辉、刘炀、彭建波、韩嘉睿、李鑫、朱琪慧等11名，以及银牌、铜牌选手荆秦、潘子刚、林强、韦国恒、王健梅、查宇涵、邹钢、颜华菲、何建勋等十多名．

本书编写得到单墫博士、周春荔教授、曹汝成副教授、杨光特级教师等的热情关怀和精神上的鼓舞，作者谨向他们致以衷心的感谢，也谨向编写过程中使用的众多参考文献的作者致谢，限于水平，疏漏之处敬请读者批评指正．

编者

目　录

第Ⅰ部分　例题精析及训练

第Ⅱ部分　数学竞赛套题

● 第Ⅰ部分　例题精析及训练

第一章　代数

§1. 集合与简易逻辑

A类题

A1. (1996年全国高中数学联赛题)集合$\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{N}\}$的真子集的个数是______.

分析:由不等式$-1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}$的解集及条件$x \in \mathbf{N}$可确定出集合$S = \{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, x \in \mathbf{N}\}$的元素个数.由集合$S$的元素个数即可求出集合$S$的真子集个数.

解:利用换底公式将不等式$-1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}$变形,得$-1 \leqslant \frac{1}{\lg \frac{1}{x}} < -\frac{1}{2}$,即$1 \leqslant \lg x < 2$.由此得$10 \leqslant x < 100$.因为$x \in \mathbf{N}$.所以,$x = 10, 11, 12, \cdots, 99$.集合$S$共有90个元素,它的真子集个数为

$$C_{90}^{0} + C_{90}^{1} + C_{90}^{2} + \cdots + C_{90}^{89} = 2^{90} - 1.$$

点评：一般地，当一个集合 S 有 n 个元素时，它的子集个数为 2^n，真子集个数为 2^n-1，这个结论在解题时可直接引用.

A2.（第四十三届美国中学数学竞赛题）设 S 为集合$\{1,2,3,\cdots,50\}$的具有下列性质的子集：S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除.那么 S 中元素最多可能有多少个？

分析：对于两个不同的自然数 a 与 b，如果要求$(a+b)$不被 7 整除，就是要求它们的和被 7 除所得的余数不为 0.我们把集合$\{1,2,\cdots,50\}$按照其中元素被 7 除所得的余数相同与否进行归类，余数相同的组成一个集合，这样得到 7 个子集，然后从这 7 个子集中适当抽取满足题意的元素组成集合 S.

解：将集合 $A=\{1,2,\cdots,50\}$划分为 7 个子集：$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_6$，其中 A_i 中的每个元素除以 7 后余数为 $i(i=0,1,2,\cdots,6)$，即

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$，

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$，

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$，

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$，

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$，

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$，

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$.

S 最多包含 A_0 的一个元素.但是，若 S 包含其他任何一个子集的一个元素时，则它必可以包含这个子集的全部元素.因为 A_1 包含 8 个元素，其他每个子集包含 7 个元素，且 S 不能同时包含 A_1 与 A_6 的元素，或者 A_2 与 A_5 的元素，或者 A_3 与 A_4 的元素.故最大子集 S 包含 $1+8+7+7=23$ 个元素.

A3.（1997 年上海高中数学竞赛题）设 $S=\{1,2,3,4\}$，n 个数依次排成一列：$a_1,a_2,\cdots,a_n$，且具有下列性质：对于 S 的任一非空子集 B，在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B.求 n 的最小值.

分析：因为含 S 中的一个固定元素的二元子集有 3 个，所以 S 中的任一元素在数列中至少出现两次，由此估算 n 的最小值为 8.

解：S 中的每个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少出现 2 次.这是因为，若 S 中某个数在这个数列中只出现 1 次，则由于含此数的 S 的二元子集共有 3 个，但在数列中含此数的相邻两项至多只有两种取法，因而 3 个含这个数的二元子集不可能都在数列相邻两项中出现.

由此 $n\geqslant 8$.

另一方面,8 项数列:3,1,2,3,4,1,2,4 满足条件.故 n 的最小值为 8.

点评:只证明 $n\geqslant 8$ 时,还不能说明 n 的最小值为 8.接下来的构造说明 n 能取 8.

A4. (1996 年美国数学奥林匹克竞赛题)对任意非空实数集 S,令 $\sigma(S)$ 为 S 的全部元素之和.已知由 n 个正整数组成的集 A,考虑 S 跑遍 A 的非空子集时,所有不同的和 $\sigma(S)$ 组成的集.求证这些和可以分为 n 类,每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2.

分析:如果找出了一种分类方法,就得到了本题的解.

证明:设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$a_1<a_2<\cdots<a_n$.令 $f_i=a_1+a_2+\cdots+a_j$,$e_j=\max\{a_j,f_{j-1}\}$,则 $f_j=f_{j-1}+a_j\leqslant 2e_j$($1\leqslant j\leqslant n$,定义 $f_0=0$).

显然和 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}$($i_1<i_2<\cdots<i_t$)必在某个区间$(f_{j-1},f_j]$中.因为

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}>f_{j-1}=a_1+a_2+\cdots a_{j-1},$$

所以 $i_t\geqslant j$,从而

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}>a_j.$$

于是 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}\in[e_j,f_j]$.

这样 $\sigma(S)$ 被分为 n 类,在 e_j 与f_j 之间的和组成第j 类($1\leqslant j\leqslant n$).f_j 本身在第j 类,而 $e_j=f_{j-1}$时,e_j 不在第 j 类;$e_j>f_{j-1}$时,e_j 在第 j 类.每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2.

A5. (第三十六届 IMO 预选题)$\mathbf{Z}$ 表示整数集,$M_1=\{y^2+Ay+B\mid y\in\mathbf{Z}\}$,$M_2=\{2x^2+2x+c\mid x\in\mathbf{Z}\}$.求证:对于任意整数 A 与 B,总能找到整数 C,使 $M_1\cap M_2=\varnothing$.

分析:找到适当的模是关键.利用同余关系进行分类.

证明:$2x^2+2x+c\equiv C\pmod 4$.

若 A 为奇数,则

$y^2+Ay\equiv y^2+y\equiv 0\pmod 2$.

即 $y^2+Ay+B\pmod 4$仅有两类:一类为 2,一类为 0.

若 A 为偶数,y 为偶数时,则

$$y^2+Ay\equiv 0\pmod 4.$$

y 为奇数时,则

$$y^2+Ay\equiv 1+A\pmod 4.$$

即　$y^2+Ay+B \pmod 4$仍仅有两类.

因此,可取 C 不属于以上两类(mod4),此时 $M_1 \cap M_2=\varnothing$.

点评:所有整数被4除的余数有四种情形,按余数将所有整数归为四类.本题证明中,模4的选取是关键,整数 C 存在且有无限多个.

A6. (1995年全国高中数学联赛题)设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$,$A\subseteq M$,且当 $x\in A$ 时 $15x\notin A$.求$|A|$的最大值.

分析:因为$\left[\frac{1995}{15}\right]=133$,所以当 $k=9,10,11,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 不能同时在 A 中,$|A|\leqslant 1995-125=1870$.再构造一个 A,使$|A|=1870$即可.

解:由题设,当 $k=9,10,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 不能同时在 A 中,故至少有

$$133-8=125$$

个数不在 A 中,即$|A|\leqslant 1995-125=1870$.

另一方面,M 的子集 A 可取$\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$满足题意,此时$|A|=1870$.故$|A|_{\max}=1870$.

A7. (1994年江苏数学竞赛题)已知对任意实数 x,函数 $f(x)$都有定义,且 $f^2(x)\leqslant 2x^2f\left(\frac{x}{2}\right)$.如果 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}\neq\varnothing$,求证:$A$ 是无限集.

分析:必须找出无穷多个数 x,使 $f(x)>x^2$.

证明:因为 $f^2(0)\leqslant 0$,所以 $f(0)=0$.故 $0\notin A$.而 $A\neq\varnothing$,必有一个非0实数 a,使 $a\in A$,即 $f(a)>a^2$.由已知条件

$$f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{a^4}{2a^2}>\left(\frac{a}{2}\right)^2,\text{即 }\frac{a}{2}\in A.$$

同理 $\frac{a}{4},\frac{a}{8},\cdots,\frac{a}{2^n},\cdots$均是 A 的元素.

故 A 是无限集.

B 类题

B1. (1982年全国高中数学竞赛题)如果凸 $n(\geqslant 4)$边形 F 的所有对角线都相等,那么(　　).

A. $F\in$\{四边形\}

B. $F\in$\{五边形\}

C. $F\in$ {四边形}∪{五边形}

D. $F\in$ {边相等的多边形}∪{内角相等的多边形}

B2. (1991 年全国高中数学竞赛题)设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$. 现对 M 的任一非空子集 X, 令 a_x 表示 X 中最大数与最小数之和, 那么, 所有这样的 a_x 的算术平均值为______.

B3. (1990 年全国高中数学竞赛题)点集 $\left\{(x,y)\left|\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right.\right\}$ 中的元素的个数为______.

B4. (1995 年第 6 届"希望杯"全国数学邀请赛题)设集合 $A=\left\{\frac{n}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\{n\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\left\{n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, $D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, 则在下列关系中, 成立的是(　　).

A. $A\subset B\subset C\subset D$　　　　B. $A\cap B=\varnothing$, $C\cap D=\varnothing$

C. $A=B\cup C$, $C\subset D$　　　　D. $A\cup C=B$, $C\cap D=\varnothing$

B5. (1993 年全国高中数学联赛试题)集合 A、B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$, 当 $A\neq B$ 时, (A,B) 与 (B,A) 视为不同的对, 则这样的 (A,B) 对的个数有(　　).

A. 8　　B. 9　　C. 26　　D. 27

B6. (1993 年全国高中数学联赛试题)若 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$, $N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$, 则 $M\cap N$ 的元素个数是(　　).

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

B7. (1985 年苏州、镇江市数学赛题)设 $f(x)=x^2+bx+c(b、c\in\mathbf{R})$, 且

$$A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\},$$
$$B=\{x\mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\},$$

如果 A 为只含一个元素的集合, 则 $A=B$.

B8. (1986 年第四届美国数学邀请赛)定义一个数集的和为该集的所有元素的和. 设 S 是一些不大于 15 的正整数组成的集, 假设 S 的任意两个不相交的子集有不相同的和, 具有这个性质的集合 S 的和的最大值是多少?

B9. (1991 年河南省数学奥林匹克集训班试题)集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的某些子集, 满足条件: 没有一个数是另一个数的 2 倍. 这样的子集中所含元素的个数最多是多少?

B10. (1993年美国数学邀请赛试题)设 S 是一个有6个元素的集合,能有多少种方法选取 S 的两个(不必不相同)子集,使得这两个子集的并集是 S? 选取的次序无关紧要.例如,一对子集 $\{a,c\},\{b,c,d,e,f\}$ 与一对子集 $\{b,c,d,e,f\},\{a,c\}$ 表示同一种取法.

B11. (1989年湖北省黄冈地区数学竞赛题)设 S_n 表示自然数集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切子集的元素之和(规定空集元素和为0).求 S_{1989}.

B12. (1989年南昌市数学竞赛试题)集合 A 与 B 分别由适合如下条件的所有五位数构成:对于集合 A 中的每一个数,其各位数字之和或者加1或者减1之后是5的倍数,对于集合 B 中的每一数,其各位数字之和或者是5的倍数,或者减2之后是5的倍数.证明:集合 A 与 B 所含的元素个数相等.

B13. (1990年中国国家集训队测试题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,

$$f_k=|\{a_i\mid a_i<a_k,i>k\}|,$$
$$g_k=|\{a_i\mid a_i>a_k,i<k\}|,$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$.证明

$$\sum_{k=1}^{n}g_k=\sum_{k=1}^{n}f_k.$$

B14. (1990年中国国家集训队测试题、第五届国家队选拔试题)1.在集 S 中,有一种运算 o,即对于任意的 $a,b\in S$,有唯一的元 $aob\in S$.

如果对于任意的 $a,b,c\in S$,有

$(aob)oc=ao(boc)$, ①

并且当 $a\neq b$ 时,恒有

$aob\neq boa$, ②

证明对 S 中任何元素 a,b,c,

$(aob)oc=aoc$.

2.记 $S=\{1,2,3,\cdots,1990\}$,试在 S 中定义一个运算 o.具有性质①、②.

B15. (1990年日本第2轮数学选拔赛题) X 是非空的正整数集合,满足下列条件:(1)若 $x\in X$,则 $4x\in X$;(2)若 $x\in X$,则 $[\sqrt{x}]\in X$,求证:X 是全体正整数的集合.

B16. (1990年巴尔干地区数学奥林匹克试题)对有限集合 A,存在函数 $f:N$

$\to A$ 具有下述性质:若 $|i-j|$ 是素数,则 $f(i)\neq f(j)$, $N=\{1,2,\cdots\}$.求有限集合 A 的元素的最少个数.

B17. (1990 年第八届美国数学邀请赛题)集合 $A=\{z\mid z^{18}=1\}$, $B=\{\omega\mid\omega^{48}=1\}$ 都是复单位根的集合. $C=\{z\omega\mid z\in A,\omega\in B\}$ 也是复单位根的集合.问集合 C 中含有多少个元素?

B18. (1990 年第三十一届 IMO 预选题)设 r 是任意一个自然数.若将自然数集 $\mathbf{N}$ 分拆成 r 个两两不相交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_r$: $\mathbf{N}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r$,则在这些子集中必存在某个子集 A_t,其有以下性质(1):存在 $m\in\mathbf{N}$,使得对任何正整数 K,都能找到 $a_1,a_2,\cdots,a_K\in A_t$,满足

$$1\leqslant a_{j+1}-a_j\leqslant m,\ j=1,2,\cdots,K-1. \tag{1}$$

B 类题解答

B1. 解:用正五边形作反例可否定 A;用正方形作反例否定 B;用等腰梯形作反例否定 D.因此正确结论只能是 C.事实上,如要从正面肯定 C 正确,尚须证 $n<6$,用反证法:假设 $n\geqslant6$ 时还有合乎条件的 F,这时选 $A_1A_2\cdots A_n(n\geqslant6)$ 这个凸多边形的边 A_1A_n 和 A_3A_4,连 A_1A_3、A_4A_n,则 A_1A_3 左侧有顶点 A_2, A_4A_n 右侧至少要有一顶点 A_5,换言之, A_1A_3, A_1A_4, A_nA_3, A_nA_4 都是凸多边形的对角线. $A_1A_3=A_1A_4=A_3A_n=A_4A_n\Rightarrow A_1A_4+A_3A_n=A_1A_3+A_4A_n$,但由四边形的性质 $A_1A_4+A_3A_n>A_1A_3+A_4A_n$.这就得出了矛盾.

B2. 解:将 M 中非空子集进行配对,对每个非空子集 $X\subset M$,令 $X'=\{1001-x\mid x\in M\}$,则当 X_1 也是 M 的一非空子集,且 $X\neq X_1$ 时,有 $X'\neq X'_1$.于是所有非空子集除 $\{1,2,\cdots,1000\}$ 以外分为两类:$(A)X'\neq X$, $(B)X'=X$.对于 (B) 中的 X,必有 $a_x=1001$.对于 (A) 中的一对 X 与 X',有 $a_x+a_{x'}=1001\times2=2002$.由此可见所有 a_x 的算术平均值为 1001.

B3. 解: $\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\Leftrightarrow x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy$, $x>0$, $y>0$.由均值不等式 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}=xy$.当且仅当 $x^3=\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$ 时上式等号成立,解此方程得 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

B4.解法 1：∵ $A=\left\{\frac{n}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\{n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，$C=\left\{n+\frac{1}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$，$D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$

∴ $A=B\cup C$，$C\subset D$.故应选 C.

解法 2：如果把 A,B,C,D 与角的集合相对应，令

$A'=\left\{\frac{n\pi}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$，

$B'=\{n\pi\mid n\in\mathbf{Z}\}$，

$C'=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$，

$D'=\left\{\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\mid n\in\mathbf{Z}\right\}$

结论仍然不变，显然 A' 为终边在坐标轴上的角的集合，B' 为终边在 x 轴上的角的集合，C' 为终边在 y 轴上的角的集合，D' 为终边在 y 轴上及在直线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合，故应选 C.

B5.解：若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，则满足题意的 B 有：$B=\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$，即这时的配对个数有：

$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=8$.

仿此，若 $A=\{a_1,a_2\}$（或$\{a_1,a_3\}$，或$\{a_2,a_3\}$），满足题意的 B 的个数，即配对个数有：

$C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_2^2)=12$.

于是，全部配对个数有：

$C_3^3\cdot(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)+C_3^2\cdot(C_2^0+C_2^1+C_3^2)+C_2^1\cdot(C_1^0+C_1^1)+C_3^0\cdot(C_0^0)=27$.

故应选 D.

B6.解：由非负数的和为零的条件，得

$$\begin{cases}\tan\pi y=0,\\ \sin\pi x=0.\end{cases}$$

$$解得\begin{cases}x=k(k\in\mathbf{Z}),\\ y=h(h\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

即集合 M 为坐标平面上整点的全体.

又由 $x^2+y^2\leqslant 2=(\sqrt{2})^2$，

得集合 N 为以原点为中心，$\sqrt{2}$为半径的闭圆内点所组成的点集.

画图表明，闭圆内部共有 9 个整点.

故应选 D.

B7. 证明：设 $A=\{a\}(a\in\mathbf{R})$，则方程 $f(x)-x=0$ 有重根 a. 于是 $f(x)-x=(x-a)^2$，$f(x)=(x-a)^2+x$. 从而 $x=f[f(x)]$，即

$$x=[(x-a)^2+x-a]^2+(x-a)^2+x,$$

整理，得 $$(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0.$$

因 x、a 均为实数，$(x-a+1)^2+1\neq0$，故 $x=a$，即 $B=\{a\}=A$.

B8. 解：先证明 S 元素个数至多是 5. 如果多于 5 个，则元素个数不超过 4 的子集至少有 $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$ 个. 每个子集的和 $\leqslant 12+13+14+15=54$. 故必有两个子集的和相等.

S 的元素个数 $\leqslant 5$，所以 S 的和 $\leqslant 15+14+13+12+11=65$. 如果 S 的和 $\geqslant 62$，则 S 的元数为 5，并且 15、14 均在 S 中（S 的和至多比 $15+14+13+12+11$ 少 3）. 这时 S 中无其他的连续整数，因而只有一种情况即 $\{15,14,13,11,9\}$，不难看出它不满足条件.

所以，S 的和 $\leqslant 61$. 特别地，$S=\{15,14,13,11,8\}$ 时，和取最大值 61.

B9. 解：令 $A_1=\{51,52,\cdots,100\}$，$A_2=\{26,27,\cdots,50\}$，$A_3=\{13,14,\cdots,25\}$，$A_4=\{7,8,9,10,11,12\}$，$A_5=\{4,5,6\}$，$A_6=\{2,3\}$，$A_7=\{1\}$.

$A_1\cup A_3\cup A_5\cup A_7$ 共 $50+13+3+1=67$ 个元素，每一个都不是另一个的两倍.

若集合 $B\subseteq\{1,2,\cdots,100\}$，其中每一个数都不是另一个的两倍，则在 $a\in B\cap A_2$ 时，$2a\notin B$，因此 $|B\cap A_2|+|B\cap A_1|\leqslant 50$. 同样 $|B\cap A_4|+|B\cap A_3|\leqslant 13$，$|B\cap A_6|+|B\cap A_5|\leqslant 3$. 因此 $|B|\leqslant 67$.

本题答案为 67.

B10. 解：设 $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$，$A$，$B$ 是 S 的子集，$A\cup B=S$，且 $A\cap B$ 是 i 个元素的集合（$0\leqslant i\leqslant 6$）. 如图 1-1-1所示：

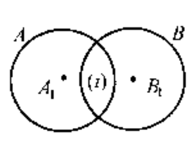

图 1-1-1

(1) $i=0$ 时，即 $A\cap B=\varnothing$. 此时 $A_1=A$，$B_1=B$. 而 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 每一个在 A 或 B 中都有 2 种选择，即 2^6 种选择，但取一对子集的方法只有 $\frac{1}{2}\times2^6$（种）.

(2) $i=1$ 时，$A\cap B$ 为一个元素 $a_n(n=1,2,3,4,5,6)$ 集合有 6 种. 对于某种，例如：$A\cap B=\{a_1\}$，其余 a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 每一个在 A_1 或 B_1 都有 2 种选择，即有 2^5 种选择. 对取一对子集的不同方法只有 $\frac{1}{2}\times2^5$. 因此共有不同取法为 $\frac{1}{2}\times2^5C_6^1$.