

透视中考

天利 38 套
错题本

中考错题本

常考易错警示
典型必会试题
举一反三训练

北京天利考试信息网 编
全国学习科学研究会考试研究中心 审

非实验区
新课改区
通用

数 学

西藏人民出版社

透视中考

天利 38 卷

X
 ✓
 X
 ✓

中考错题本

数 学

◆ 北京天利考试信息网 编
全国学习科学研究会考试研究中心 审

西藏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

透视中考/北京天利考试信息网编.

-拉萨:西藏人民出版社,2004.8

ISBN 7-223-01702-3

I.透… II.北… III.课程—初中—试题—升学参考资料 IV.G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第049530号

透视中考

——中考错题本(数学)

作者 北京天利考试信息网

责任编辑 侯志玲

封面设计 谭仲秋

出版 西藏人民出版社

社址 拉萨市林廓北路20号 邮政编码 850000

北京发行部:100013 北京市东土城路8号林达大厦A座13层

电话:010-64466482、64466473、51655511-858

印刷 北京市江鹤印刷有限公司

经销 全国新华书店

开本 16开(787×1092) 字数 1200千

印张 51

版次 2005年8月第2版第1次印刷

标准书号 ISBN 7-223-01702-3/G·723

定价 58.80元(全6册)

编写说明

每一次考试之前,为了避免考生犯与前面考试相同的错误,老师叮嘱考生最多的恐怕就是“多看错题本”,这里所说的错题本,常指的是考生把自己以前考试或者自测或者练习等过程中出错的题目整理成的小册子,但是,并不是所有的考生都有这一习惯,或者有的考生虽然整理了自己的错题本,但是只是把前面考试中犯的错误简单的列了出来,而没有把其他可能会出现错误的整理出来,另外,考生一个人做的题目毕竟是有限的,以后的考试尤其是中考中,碰到自己没有见过,而又特别容易使大家步入误区的题目,相当多的考生还是很紧张。为了帮助考生解决这一难题,更为了能够提供一套新颖、独特的复习资料,以助考生提高备考质量,北京天利考试信息网联合全国学习科学研究会考试研究中心,邀请了大量多年活跃在教学一线的专家、教师,精心编写了此书。

本书主要设置以下的栏目:

考点解读 以2006年中考考查要求和最新的中考命题信息为导向,对考试重点、易错问题等内容进行了全面的解读和归类,以帮助考生明确命题规律和重点,抓住考试基本内容,更积极主动地面对中考。

点击典型、易错题 对近几年中考和模拟试题中典型、易错题目,给出了准确解题的思路分析和解答误区的警示,以利于考生在今后的考试中,有效规避答题误区、正确解答考试题目。

举一反三 结合前两部分的内容,选择了既突出中考考点,又有时代特色的,集科学性、新颖性和实用性为一体的典型体例,供考生检测提高。

解题点评 对举一反三中出现的所有题目,从命题角度、考查要点、解题思路等方面进行了全面、系统的点评,帮助考生提升应试水平。

特别说明:1.本书在设置专题时,充分考虑了考生的复习实际,适合于考生不同轮次的复习提高;2.本书在选用试题时,除注重了题目本身的典型性外,更兼顾了实验区和非实验区中考的常考题目,全国各地所有考生都可以放心使用;3.本书将2005年中考试题的易错题目也进行了分类点评,考生可以从中获取更新的中考信息。

本册主编:任保平老师。

读者有何建议、疑问,可登陆北京天利考试信息网(www.TL100.com,bbs.TL100.com,CNC.TL100.com)留言。为了帮助读者用好本书,天利考试信息网还专门开辟了“读者加油站”和读者论坛,读者可以登录,查阅中考信息、下载免费试题、交流答题经验。

相信本书会成为将要参加中考的你的益友!

编者

2005年8月

数 学

专题一	实 数	(1)
专题二	代数式	(7)
专题三	方程与方程组	(18)
专题四	不等式与不等式组	(27)
专题五	一次函数	(36)
专题六	反比例函数	(46)
专题七	二次函数	(55)
专题八	数据的收集整理与分析	(65)
专题九	频率与概率	(73)
专题十	视图与投影	(79)
专题十一	三角形的认识与证明	(85)
专题十二	四边形的认识与证明	(91)
专题十三	图形的相似与证明	(97)
专题十四	锐角三角函数与解直角三角形	(105)
专题十五	圆的认识与证明	(112)





专题一 实数

一、考点解读

(一) 考点聚焦

本专题的主要考点有：

1. 相反数、倒数、有理数、数轴、绝对值.
2. 无理数、实数的概念, 实数的分类与性质, 数轴上的点与实数之间的一一对应关系, 以及实数大小的比较.
3. 近似数、有效数字、科学记数法等概念及其应用.
4. 实数的四则运算, 以及平方根、算术平方根、立方根的概念.

(二) 备考方法点拨

本专题的考查主要题型有选择、填空, 还有少量的计算题, 常考查同学们的数形结合思想、化归和分类讨论思想, 近年来, 通常是通过创设新的问题情境考查学生对“双基”的掌握情况. 本专题的分值约占 10~14 分. 为此, 需注意以下几点:

1. 理解实数及其相关概念, 牢固掌握实数的有关运算法则.
2. 掌握绝对值的几何意义, 能运用数轴进行实数的大小比较.
3. 能正确地用科学记数法表示一个数, 并严格按精确度确定近似数.
4. 掌握实数的四则运算和乘方、开方运算法则, 并熟练地进行混合运算, 会用多种方法进行实数的大小比较.
5. 灵活运用运算律、幂的运算性质在运算中的逆应用从而简化计算过程.

(三) 易错问题归类

1. 无理数的概念.
2. 绝对值的概念.
3. 近似数与有效数字.

二、点击典型、易错试题

【例 1】 在 $-5, \cot 45^\circ, \sin 60^\circ, \frac{\pi}{2}, -\sqrt{9}, (-\sqrt{2})^{-2}$ 这六个实数中, 有理数的个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解题思路: -5 是有理数, $\cot 45^\circ = 1$ 是有理数, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数, $\frac{\pi}{2}$ 是无理数, $-\sqrt{9} = -3$

是有理数, $(-\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$ 是有理数. 答案: D.

易错警示: 实数分类是中考的命题热点, 该类问题一般是在填空题或选择题中出现, 没有多

大难度.解这类题的关键在于把握有理数、无理数、实数的定义,无理数是无限不循环小数.“无限不循环”是无理数的特征,初中所见的无理数有三类:(1)开方开不尽的数,如 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt[3]{2}$ 等;(2)特定意义的数,如圆周率 π ;(3)特定结构的数,如 $0.101\ 001\ 000\ 1\cdots$ 等.要判断一个实数属何种类型,主要根据其结果,而不是根据其形式.有些同学一看到带根号的数就把它当作无理数,其实不然,如 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$,它们是有理数.不带根号的数也不一定是无理数,如 $-\pi$ 就是无理数.

【考题2】下列各组数中,互为相反数的是

()

A. -3 与 $-\frac{1}{3}$

B. $| -5 |$ 与 5

C. -7 与 $\sqrt{(-7)^2}$

D. -3 与 $\sqrt[3]{-27}$

解题思路: -3 与 $-\frac{1}{3}$ 互为倒数,A错; $| -5 | = 5$,B错; $\sqrt{(-7)^2} = 7$, 7 与 -7 互为相反数,C对; $\sqrt[3]{-27} = -3$,D错.故答案为C.

易错警示:一个数的相反数与符号有关;一个数的倒数与符号无关,只与其分子、分母的位置有关;一个数的绝对值一定是非负数.解本题时,首先要逐组比较,不要粗看表面,错选B.相反数和倒数是两个重要概念.

【考题3】已知 $|x|=5$, $|y|=3$,且 $xy < 0$,则 $x+y$ 的值等于_____.

解题思路:由已知 $|x|=5$, $|y|=3$ 得 $x=\pm 5$, $y=\pm 3$, $\because xy < 0$, $\therefore x=5$, $y=-3$ 或 $x=-5$, $y=3$, $\therefore x+y=2$ 或 -2 ,故应填 ± 2 .

易错警示:有些同学在做此类题时,错填上2,或者-2,导致答案不全面.解这类绝对值的计算问题,首先是脱去绝对值的符号,化为一般的有理数计算.而脱去绝对值的符号,又得先确定绝对值符号中各个数的正负性,再由绝对值的意义去掉符号是解决这类问题的关键.

【考题4】有资料表明,被称为“地球之肺”的森林正以每年15 000 000公顷的速度从地球上消失,每年森林的消失量用科学记数法表示应是_____公顷.

解题思路: $15\ 000\ 000 = 1.5 \times 10^7$.

易错警示:把一个数 N 写成 $a \times 10^n$ (其中 $1 \leq a < 10$, n 是整数)的形式,叫做科学记数法.其关键是确定 a 和 n .可同学们在解题时易把本题写成 15×10^6 或 0.15×10^8 等形式上的错误,应注意 a 只能写成一位整数或整数部分有且只有一位数的小数.

【考题5】用四舍五入法取下列各数的近似值:

(1)0.508 0(精确到百分位);(2)32 500(保留两个有效数字)

解题思路:(1)0.508 0精确到百分位应为0.51;(2)32 500保留两个有效数字应为33千或 3.3×10^4 .

易错警示:有关求一个数的近似值的问题,要清楚题目要求精确到哪一位,然后再看下一位,确定是“舍”还是“入”,只能进行一次四舍五入.同学们易把0.508 0写成0.50;32 500写成33 000.

【考题6】计算: $(-3)^2 + (-2)^2$

解题思路: $(-3)^2 = 9$, $-2^2 = -4$,所以 $(-3)^2 + (-2)^2 = 9 - 4 = 5$.

+16, -18. (1)将最后一名乘客送达目的地时,小李距下午出发点的距离是_____千米;若汽车耗油量为 a 公升/千米,这天下午汽车共耗油_____公升.

6. 我国自行研制的“神舟五号”载人飞船于 2003 年 10 月 15 日成功发射,并环绕地球飞行 590 520 km,请将这一数字用科学记数法表示为_____ km(要求保留一位有效数字).

(五) 解答题

1. 求下列各数的算术平方根

(1) 225 (2) $(-3.2)^2$ (3) $\sqrt{25}$

2. 计算 $(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) \times (\frac{1}{5})^{-2} \div \left| -\frac{1}{3} \right| + (-\frac{1}{5})^0 + (-0.25)^{2005} \times 4^{2005}$

3. 一批机器零件的规定直径为 200 mm,为检测它们的质量,现从中抽取了 6 件进行检验,比规定直径大的毫米数记作正数,比规定直径小的毫米数记作负数.检查记录如下表

1	2	3	4	5	6
+0.2	-0.1	-0.3	+0.1	0	-0.2

(1)第几号机器零件的直径最大? 第几号最小?

(2)质量最好的是哪个? 质量最差的呢?

4. 化简 $|x-1| + |x-2|$

四、解题点评

(一) 选择题

1.D 点评:本题考查有理数和无理数的概念.应根据无理数的特征给予逐一判断.

易错警示:A 中的不循环的小数应是有理数,B 中的无限小数包含着循环和不循环.因此 B 不一定对,C 中没有根号的数包括了 π ,而 π 是无理数.

2.B 点评:本题考查有理数的加减运算.由题意,北京的时间比巴黎早 7 时,所以巴黎的时间为 $15 + (-7) = 8$,即巴黎的时间是 6 月 7 日 8 时.

易错警示:本题的背景取自地理学科的知识,重视数学的应用性,学科的渗透性,不要误选 A.

3.D 点评:本题考查有效数字的定义和近似数的定义,题目中要求用三位有效数字表示 0.050 26,首先要寻找非零的第一位数是多少,再确定第三位数,而第三位是由第四位数所决定,如果第四位数是小于 5 的,舍去不入,若第四位数是大于或等于 5 的,舍去进 1.由此可得,

0.050 3.

易错警示:本题会出现选 A,错在认为有效数字是从小数点后算起.

4.C 点评:由绝对值的定义知, $|x-1|=5$ 可得 $x-1=\pm 5$

$\therefore x-1=5$ 或 $x-1=-5$, $\therefore x=6$ 或 -4 .

易错警示:有些同学认为绝对值表示的是非负数,为此可知 $x-1=5 \therefore x=6$, 误选 A.

5.D 点评:本题考查相反数的定义,互为相反数是两个数之间的相互关系,互为相反数的实质是指两个数之和为 0. 因而 $2(x+3)+3(1-x)=0 \therefore x=9$.

易错警示:本题的关键应紧扣互为相反数定义,和为 0 是二者的纽带,不能误为二者相等.

6.C 点评:无理数是实数的重要知识点,是中考必考的内容.抛开其表面,挖掘其内涵,可得 $(-\sqrt{3})^0=1$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{25}=5$, 结合无理数的定义得 $\cos 30^\circ, 0.112\ 111\ 211\ 112\ \dots, \frac{\pi}{5}$ 这三个数是无理数.

易错警示:判断一个数是不是无理数,应首先将所给的数逐一化简,再结合无理数的定义逐一排查,不要误认为带有根号的数就是无理数.

(二) 填空题

1. $\frac{1}{2}, -1$. 点评:一个数的相反数是在这个数的前面添上一个负号. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是

$-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $(-1)^2$ 的倒数的相反数是 $-\frac{1}{(-1)^2}=-1$, 本题综合考查了相反数、倒数的概念.

易错警示:相反数和倒数是同学们易混淆的错误, $(-1)^2$ 的底数是 -1 , 不要误为 1 .

2. $-1^\circ\text{C}, +4^\circ\text{C}$. 点评:本题是正、负数的简单应用.凌晨 3 时的气温是:

$+7^\circ\text{C}-8^\circ\text{C}=-1^\circ\text{C}$, 傍晚时的气温是: $+7^\circ\text{C}-3^\circ\text{C}=+4^\circ\text{C}$.

易错警示:本题的凌晨 3 时、傍晚时的气温都是以中午气温为标准的,不要误为凌晨 3 时的气温是 -8°C , 傍晚时的气温是 -3°C . 这是同学们易粗心的地方.

3. 32 点评:数轴上的 $-A$ 代表 -2 , 点 P 是数轴上的一点且到点的距离为 8, 这样的点有两个, 即 $(-8)+(-2)=-10$, $8+(-2)=6$, 同样到点 B 距离为 8 的点也有两个即 $-7, 9$. 这样满足条件的点 P 到原点的距离之和为: $|-10|+6+|-7|+9=32$. 解本题的关键是:到数轴上某点距离相等的点的个数问题.

易错警示:本题考查学生的数形结合思想,通过画数轴,在数轴上确定符合条件的点的位置,正确把握两点间距离的表示法,以防出现 $(-2)+1+(-10)+6=-5$ 这样的错误.

4. $\sqrt{2}$ 点评:本例真实再现了“实数与数轴上的点一一对应”的特征.利用勾股定理,只需计算出正方形对角线长即可知 A 点所表示的数.本题的命题是一种创新.

易错警示:解本题的关键是弄清题意,推知符合题意的点只有唯一一个.以防出现两点 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$. 所谓“正方向”指箭头所指方向.

5. $0, 118a$. 点评:本题是正、负数的实际应用问题.是简单的有理数加减问题.和如果为正 7, 说明王师傅距出发点的距离是 7 km, 且在出发点的东面; 和如果为 -7 , 说明王师傅距出发点的距离是 7 km, 且在出发点的西面.

易错警示:本题中正、负符号表示方向,几个有理数相加的结果,既蕴含方向情况,又蕴含

有距离情况,即这样的结果反映的是位置情况.第二问表示的是所有有理数的绝对值相加,则不含方向因素,是所有的行驶路程之和,对此应注意理解和加以区分.不要误为所有数相加的结果.

6. 6.0×10^5 点评:数学知识来源于生活,应用于实际,学习时应将知识学习与生活实际紧密联系起来,在现实中加以理解、巩固与运用.

易错警示:对近似数要掌握它的精确度和有效数字.本题要求保留一位有效数字.那么 $590\ 520\text{ km} \approx 6.0 \times 10^5\text{ km}$,不要写成 $0.6 \times 10^6\text{ km}$ 和 $5.9 \times 10^5\text{ km}$ 这类错误.

(三) 解答题

1. (1)15; (2)3.2; (3)5 点评:欲想准确快速地求出一个正数的算术平方根,应该熟记一些常用的平方数,如1~20之间的自然数的平方.求 $(-3.2)^2$ 这类数的算术平方根,还需熟练掌握平方数的一个性质——互为相反数的平方相等,即 $a^2 = (-a)^2$. $\sqrt{25} = 5$,求 $\sqrt{25}$ 的算术根也就是求5的算术根.

易错警示:一个非负数的平方根与算术平方根是两个截然不同的概念.除0外,一个数的平方根有两个,它们互为相反数,而一个数的算术平方根只有一个,且是正的.同学们易混淆这两个概念.误把 $(-3.2)^2$ 的算术根写作 -3.2 或 ± 3.2 ,把 $\sqrt{25}$ 的算术根记作5.这是对“ $\sqrt{\quad}$ ”这种符号的理解错误. $\sqrt{25}$ 就表示25的算术平方根,其结果是5,所以第(3)小题就表示5的算术平方根,结果应为5.

2. 10 点评:本题考查有理数的混合运算,在运算中,注意观察题目特点,尽量采用运算律使计算简便.如题中的 $(-0.25)^{2005} \times 4^{2005}$ 应记为 $(-0.25 \times 4)^{2005} = (-1)^{2005} = -1$.须注意的是运算的顺序,即先算乘方,再算乘除,最后算加减;有括号的还应先算括号里面的数.

易错警示:对于题目中的 $(\frac{1}{5})^{-2}$ 误认为是 $\frac{1}{25}$,其实 $(\frac{1}{5})^{-2}$ 可以记作 $(5^{-1})^{-2} = 5^2 = 25$,也可记作 $\frac{1}{(\frac{1}{5})^2} = 25$.

3. (1)1;3 (2)5;3 点评:由图表数据可知,每个机器零件直径实际毫米数分别是200.2, 199.9, 197, 200.1, 200, 198.为此可得结论.本题考查了学生阅读表格、分析数据的能力.

易错警示:有些同学误认为机器零件的直径越大,质量就越好.其实,机器零件的直径越接近规定的毫米数,其质量越好,解决本题须将数与现实联系起来.

$$4. \begin{cases} -2x + 3 & (x < 1) \\ 1 & (1 \leq x \leq 2) \\ 2x - 3 & (x > 2) \end{cases}$$

点评:有关绝对值的化简,就是想办法将绝对值符号去掉.欲去掉绝对值符号须先判断绝对值符号内的数是正数、负数,还是零,因此要正确地确定零点,使 $x - 1 = 0$ 且 $x - 2 = 0$,解得 $x = 1, x = 2$.然后进行分类讨论.解决此类问题的关键在于正确地确定零点,再分别在相应的范围内进行脱掉绝对值符号.

易错警示:缺乏对题目结构的分析,易错误的得出.原式 $= x - 1 + x - 1 = 2x - 3$.这是个不全面的结论.本题的设计在于考查学生思维的严密性,考查数学的分类讨论的思想.



专题二 代数式

一、考点解读

(一) 考点聚焦

本专题的主要考点有:

1. 代数式的有关概念,列代数式,求代数式的值.
2. 整式的有关概念及分类;同类项的概念;整式的加减、乘除、乘方运算.
3. 因式分解的意义,灵活运用提取公因式法、运用公式法及分组分解法将一个多项式因式分解.
4. 分式的概念与性质;分式的有关运算、分式的化简与分式的应用.
5. 二次根式的概念与性质;最简二次根式与同类二次根式的概念.
6. 二次根式的四则运算.
7. 公式 $= \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$.

(二) 中考方法点拨

1. 本专题考查代数式的有关概念和整式的四则运算,其考查题型主要以填空题、选择题为主,并有少量的解答题和阅读理解题,这已是今后中考的方向;分值约占3~5分.

2. 因式分解是数学中重要的恒等变形,熟练地掌握因式分解的意义及其与整式乘法的区别和联系,了解因式分解的一般步骤是解答数学问题的重要知识基础和技能技巧,乘法公式与因式分解的考查已逐步渗透到综合题中进行.

3. 分式的有关概念和性质是中考的常考内容,进行分式运算的关键在于掌握通分、约分的方法,其考查形式以填空、选择题形式为主进行考查,近年出现的阅读型考题已成亮点;分值约占4~8分.

4. 二次根式的主要性质和运算是考查的又一重点,有时渗透在分式的化简求值中进行考查,学生在平时要加强对二次根式化简和运算的练习,既能加深对二次根式概念、性质的理解,又能掌握题型的内在联系和规律,提高分析问题和解决问题的能力,分值约占4~6分.

(三) 易错问题归类

1. 平方差与完全平方公式.
2. 因式分解不彻底.
3. 二次根式有意义的条件.

二、点击典型、易错试题

【考题1】若 $9x^{a+b}y^{a-b}$ 与 $\frac{1}{2}x^{a-1}y^3$ 是同类项,那么

()

A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

解题思路:第一个单项式 x 的指数为 $a+b$, y 的指数为 $a-b$; 而第二项 x 的指数是 $a-1$, y 的指数是 3. 再根据同类项的定义: 字母相同, 并且相同字母的指数也分别相同的单项式是同类项, 从而建立方程组, 求得 $a=2, b=-1$, 故选 D.

易错警示:同类项的定义是中考经常涉及的知识点, 此定义只存在于整式中, 切不可把类似于 $\frac{2}{3}x^{-2}y$ 与 $\frac{1}{5}x^{-2}y$ 当作同类项. 解决本题的关键是: “相同字母的指数相同”, 切不可犯 $a+b=3, a-b=-1$ 的类似错误.

【考题 2】合并多项式: $5a^2b + 2ab^2 + 3a^2b^2 - 5a^2b + 3ab^2 - 2a^2b^2 - ab^2$ 中的同类项.

解题思路:本题考查合并同类项. 解决本类题的关键是先找出多项式中的同类项. 根据同类项的概念, 一要看两(几)个项的字母是否相同; 如果字母相同, 还要看各个字母的指数是否也相同, 只有符合这两个要求的项才是同类项. 本题中 $5a^2b$ 与 $-5a^2b$ 是同类项, $2ab^2, 3ab^2$ 与 $-ab^2$ 是同类项, $3a^2b^2$ 与 $-2a^2b^2$ 是同类项. 合并同类项时, 字母和字母的指数不变, 将系数相加.

$$\begin{aligned} \text{解: } & 5a^2b + 2ab^2 + 3a^2b^2 - 5a^2b + 3ab^2 - 2a^2b^2 - ab^2 \\ &= (5-5)a^2b + (2+3-1)ab^2 + (3-2)a^2b^2 \\ &= 0 + 4ab^2 + a^2b^2 = 4ab^2 + a^2b^2 \end{aligned}$$

易错警示:本题易犯两处错误. 第一处是在进行 $2ab^2, 3ab^2, -ab^2$ 三个同类项合并时, 得 $(2+3)ab^2 = 5ab^2$, 忽视了 $-ab^2$, 它的系数是 -1 ; 第二处是最后得到 $4ab^2 + a^2b^2$ 后, 再“合并”得出 $5ab^2$ 或 $5a^2b^2$. 其实 $4ab^2$ 与 a^2b^2 根本就不是同类项, 千万不能合并.

【考题 3】填空: (1) _____ $\div (-a)^5 = -a^3$; (2) $a^{2m-1} \div$ _____ $= a^3$;

(3) $(x^3y^2)^4 \div (x^2y)^5 =$ _____; (4) $-3^{-2} \cdot 3^3 =$ _____.

解题思路:本题考查幂的运算性质. (1) 根据乘除互为逆运算: $-a^3 \cdot (-a)^5 = a^{3+5} = a^8$. 应填 a^8 ; (2) 因为 $a^{2m-1} \div a^3 = a^{2m-1-3} = a^{2m-4}$, 所以应填 a^{2m-4} ; (3) 原式 $x^{12}y^8 \div x^{10}y^5 = x^{12-10}y^{8-5} = x^2y^3$; (4) 注意负整数指数的性质. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. 原式 $= -\frac{1}{3^2} \cdot 3^3 = -3$. 或者这样算:

$$-3^{-2+3} = -3. \text{ 所以应填 } -3.$$

易错警示:熟练掌握幂的运算性质, 避免出现 $a^3 \cdot a^4 = a^{12}, (a^3)^4 = a^7, 3^{-2} = -6$ 或 -9 之类的错误.

【考题 4】某些代数式平方化简后含有 a^2+1 这个式子, 例如代数式 $(a+1)$ 平方化简后结果为 a^2+2a+1 , 含有 a^2+1 . 请直接写出三个具有这种特性并且只含有一个字母 a 的代数式(除所举例子外).

解题思路:本题是开放型试题, 答案很多, 它重点考查学生能否掌握好完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 培养学生的想象能力. 符合要求的式子可以是:

$$a-1, 1-a, a+\frac{1}{2a}, a-\frac{1}{2a}, a^3+a+1, a^3-a-1, a^4+a+1, a^4-a-1 \text{ 等.}$$

易错警示:本题要求学生所写的式子平方后才含有“ a^2+1 ”这个式子, 可有些学生直接写出

$a^3 + a^2 + 1, a^2 + 2a + 1, a^2 - 2a + 1$ 等类似错误.

【例题5】将下列各式分解因式:

(1) $2a^3 + 6a^2 - 36a$; (2) $a^4 - 1$; (3) $a^2 - b^2 - a - b$; (4) $4a^2 - b^2 + 2b - 1$.

解题思路:因式分解的重点是熟练掌握三种基本方法和因式分解的一般步骤.一是能否先提公因式;二是能否利用公式;三是能否进行分组分解;四是检查因式分解是否彻底.

(1)式可分解为 $2a(a+6)(a-3)$; (2)式可分解为 $(a^2+1)(a+1)(a-1)$;

(3)式可分解为 $(a+b)(a-b-1)$; (4) $(2a+b-1)(2a-b+1)$.

易错警示:因式分解是中考中的热点内容,有关因式分解的问题应防止以下常见的错误:

①公因式没有全部提出,如 $2a^3 + 6a^2 - 36a = a(2a^2 + 6a - 36) = a(a+6)(2a-6)$; ②丢项,如 $a^2 - b^2 - a - b = (a+b)(a-b)$; ③因式分解不彻底,如 $a^4 - 1 = (a^2+1)(a^2-1)$; ④分组不合理,导致分解错误,如 $4a^2 - b^2 + 2b - 1 = (4a^2 - 1) - (b^2 - 2b) = (2a+1)(2a-1) - b(b-2)$,无法再分下去.

【例题6】计算:

(1) $(\frac{a^2}{-b})^3 \cdot (\frac{b^2}{-a})^4 \cdot (\frac{1}{ab})^5$;

(2) $1 - \frac{a-b}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2}$, 其中 $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$;

(3) $(a - \frac{a}{a+1}) \times \frac{a+1}{a^2+3a+2} \div \frac{a^2-2a}{a^2-4}$, 其中 $a=\sqrt{5}$;

(4) 请你先化简,再选取一个使原式有意义,而你又喜爱的数代入求值: $\frac{x^3-x^2}{x^2-x} - \frac{1-x^2}{x+1}$.

解题思路:分式的混合运算,先确定运算顺序,再按法则进行计算.

(1) 原式 = $-\frac{a^6}{b^3} \cdot \frac{b^8}{a^4} \cdot \frac{1}{a^5 b^5} = -\frac{a^6 b^8}{a^9 b^8} = -\frac{1}{a^3}$.

(2) 原式 = $1 - \frac{a-b}{a+2b} \cdot \frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b-a-2b}{a+b} = -\frac{b}{a+b}$.

当 $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}$ 时, 原式 = $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2-\sqrt{6}$.

(3) 原式 = $\frac{a^2+a-a}{a+1} \times \frac{a+1}{(a+2)(a+1)} \times \frac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)} = \frac{a}{a+1}$.

当 $a=\sqrt{5}$ 时, 原式 = $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

(4) 原式 = $\frac{x^2(x-1)}{x(x-1)} - \frac{(1+x)(1-x)}{x+1} = x - (1-x) = 2x-1$. 令 $x=3$, 原式 = 5.

易错警示:代数式求值的方法很多,近几年的中考试题中,常出现的有三种:(1)先化简,后求值;(2)由值的形式直接转化成所求的代数式的值;(3)式中字母表示的数未直接给出,而是隐含在题设条件中.解此类题应防止以下错误:①分式的运算应先将分母与分子中的多项式进行因式分解,避免约分错误;②在运算过程中如有公因式要随见随约,使运算过程简捷,避免越解

越繁,导致无法求解;③对于化简求值时,一定要先化简,再将已知字母的值代入,切不可一开始就将已知字母的值代入,造成式子的复杂,为正确求解预设了障碍;④对于新近出现的自取值求分式值时,所取的值一定要保证原代数式有意义.如第(4)题中的 x 不能取 $-1, 0, 1$,也就是说所取的值使原分式有意义.

【考题7】计算下列各题:

$$(1) \sqrt{6} \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$(2) \text{已知 } 0 < a < 1, \text{且 } a + \frac{1}{a} = 6, \text{求 } \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 的值};$$

$$(3) \text{已知 } a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}, \text{求 } \frac{a^2 - 1}{a - 1} - \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 1}}{a^2 - 1} \text{ 的值};$$

$$(4) \text{已知 } a + b = -8, ab = 8, \text{化简 } b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

解题思路:二次根式的混合运算,先确定运算顺序,再根据运算法则与运算性质进行计算,在解的过程中要注意运用运算律与乘法公式简化运算过程,使结果为最简根式.

$$(1) \text{原式} = \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 6(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{2};$$

$$(2) \because a + \frac{1}{a} = 6 \quad \therefore a - 2 + \frac{1}{a} = 4 \quad \therefore (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = 4 \quad \therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \pm 2$$

$$\because 0 < a < 1 \quad \therefore \sqrt{a} < \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{即 } \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -2;$$

$$(3) \text{原式} = a + 1 + \frac{a - 1}{a(a - 1)} = a + 1 + \frac{1}{a}, \text{当 } a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \text{ 时, } \frac{1}{a} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{所以原式} = 2 - \sqrt{3} + 1 + 2 + \sqrt{3} = 5;$$

(4)由已知 $a + b = -8$ 且 $ab = 8$ 可知 $a < 0$ 且 $b < 0$, 所以

$$b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{a^2 + b^2}{ab}\sqrt{ab} = -12\sqrt{2}.$$

易错警示:(1)错用分配律得 $\sqrt{6} \div \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{6} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$;

(2)忽视已知条件 $0 < a < 1$, 错解为: $(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = a + \frac{1}{a} - 2 = 4$, 故 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \pm 2$;

(3)忽视隐含条件: 当 $a = 2 - \sqrt{3}$ 时, $a < 1, a - 1 < 0$, 则 $6\sqrt{(a-1)^2}$ 应为 $-(a-1)$, 而不是 $a-1$;

(4)错解为 $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}\sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}\sqrt{ab} = 12\sqrt{2}$, 忽视了隐含条件:

由 $a + b = -8 < 0, ab = 8 > 0$, 则 $a < 0, b < 0$.

三、举一反三

(一) 选择题

1. 下列计算正确的是 ()

A. $(-4x) \cdot (2x^2 + 3x - 1) = -8x^3 - 12x^2 - 4x$

B. $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3$

C. $(-4a - 1)(4a - 1) = 1 - 16a^2$

D. $(x - 2y)^2 = x^2 - 2xy + 4y^2$

2. 若 $4\sqrt{\frac{2-m}{6}}$ 与 $\sqrt{\frac{2m-3}{4}}$ 是同类二次根式, 则 m 的值为 ()

A. $\frac{20}{13}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{13}{8}$

D. $\frac{15}{8}$

3. 化简 $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$, 甲、乙两同学的解法如下:

甲: $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$;

乙: $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

对于他们的解法, 正确的判断是 ()

A. 甲、乙的解法都正确

B. 甲的解法正确, 乙的解法不正确

C. 乙的解法正确, 甲的解法不正确

D. 甲、乙的解法都不正确

4. 某商品原价为 100 元, 现有下列四种调价方案, 其中 $0 < n < m < 100$, 则调价后该商品价格最高的方案是 ()

A. 先涨价 $m\%$, 再降价 $n\%$

B. 先涨价 $n\%$, 再降价 $m\%$

C. 先涨价 $\frac{m+n}{2}\%$, 再降价 $\frac{m+n}{2}\%$

D. 先涨价 $\sqrt{mn}\%$, 再降价 $\sqrt{mn}\%$

5. 下列由左到右的变形, 哪一个是因式分解 ()

A. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

B. $x^2 - y^2 + 4y - 4 = (x + y)(x - y) + 4(y - 1)$

C. $(a + b)^2 - 2(a + b) + 1 = (a + b - 1)^2$

D. $x^2 + 5x + 4 = x(x + 5 + \frac{4}{x})$

6. 化简: $x \div \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x}$ ()

A. 1

B. xy

C. $\frac{y}{x}$

D. $\frac{x}{y}$

7. 下列根式: \sqrt{ab} , $\sqrt{32}$, $\sqrt{\frac{xy}{2}}$, $\sqrt{\frac{3a}{5}}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 中, 最简二次根式的个数是 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

8. 如果分式 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值为零, 那么 x 应为 ()

- A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 0

(二) 填空题

1. 一种商品每件成本 a 元, 将成本增加 25% 定出价格, 后因仓库积压减价, 按价格的 92% 出售, 每件还盈利 _____ 元.

2. 下列式子中, (1) $a^6 + a^2 = a^3$; (2) $(x^3)^2 = x^6$; (3) $\frac{x^{18}}{x^2} = x^9$; (4) $x^3 \cdot x^3 = x^9$, 其中正确的是 _____ (填序号)

3. 分解因式: (1) $4q(1-p)^3 + 2(p-1)^2 =$ _____;

(2) $ax - ay - bx + by =$ _____.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两个根是 $x_1 = 1, x_2 = -2$, 则二次三项式 $x^2 - px + q$ 可以分解为 _____.

5. 若分式 $\frac{x+3}{x^2+2x-3}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 _____.

6. 若 $-1 < x < 0$, 化简 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2 + \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2} =$ _____.

7. 已知实数 a, b 满足条件 $a^2 - 7a + 2 = 0, b^2 - 7b + 2 = 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} =$ _____.

8. 若二次根式 $\sqrt[3]{9a}$ 和 $\sqrt{a+8b}$ 是同类二次根式, 则 ab 的值为 _____.

(三) 解答题

1. 先化简, 再求值:

(1) $5x^2 - (3y^2 + 5x^2) + (4y^2 + 7xy)$, 其中 $x = -2, y = 1 + \sqrt{2}$.

(2) $(\frac{x^2-4}{x^2-4x+4} - \frac{x-2}{x+2}) \div \frac{x}{x-2}$, 其中 $x = \sqrt{3}$.

(3) 若 $a = 4 + \sqrt{3}, b = 4 - \sqrt{3}$, 求 $\frac{a}{a - \sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 的值.

2. 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 求代数式 $-x^3 + 2x^2 + 2005$ 的值.

3. 先化简代数式: $(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b}) \div \frac{2ab}{(a-b)(a+b)^2}$, 然后请你自取一组 a, b 的值代入求值.

4. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{3}-1}, b = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$, 计算: $\sqrt{ab}(\frac{1}{b}(\sqrt{ab} + \frac{1}{a}\sqrt{ab}))$ 的值.

四、解答题评