国家自然科学基金资助

郭嗣琮 著

基于结构元理论的模糊数学分析原理

Principle of Fuzzy Mathematical Analysis Based on Structured Element

NEUPRESS
东北大学出版社

国家自然科学基金资助

基于结构元理论的模糊数学分析原理

郭嗣琮　著

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目(CIP)数据

基于结构元理论的模糊数学分析原理 / 郭嗣琮著 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.6
ISBN 7-81102-042-4

Ⅰ. 基… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 模糊数学—高等学校—专著 Ⅳ. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 053473 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：140mm×203mm
印 张：6.25
字 数：174 千字
出版时间：2004 年 6 月第 1 版
印刷时间：2004 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：孟 颖 责任校对：高 田
封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

定 价：20.00 元

前　言

自从 L.A.Zadeh 于 1965 年提出模糊集合理论以来，经过近四十年的发展，逐渐形成了一门新的学科——模糊系统理论，该学科已经成为现代信息科学中重要的数学理论与方法分支，与此同时，也形成了特色鲜明的模糊应用技术。模糊系统正在被越来越多的自然科学和社会科学工作者所接受，并在自然科学、社会科学、工程技术的许多领域，如人工智能、工业过程控制、气象、环保、行为科学、管理科学、军事科学、航空航天技术、预测与决策技术等取得了显著成绩。尤其是 20 世纪 80 年代末期，日本首先将模糊逻辑控制方法运用于家电产品的智能化控制之中，产生了模糊家电的新概念。模糊逻辑控制的商品化促进了模糊控制技术的发展，在短短的十几年中，不仅模糊控制理论得到了迅猛发展，而且先后研制开发出大量的模糊控制通用系统和控制器。

模糊系统的数学理论及应用技术之所以能被人们所接受，并在近四十年里得到快速的发展，主要缘于人类社会、生产实践中存在的广泛而深刻的应用背景。模糊系统的数学理论的发展很大程度上取决于模糊工程技术与应用的发展，模糊工程技术既是模糊数学理论发展的原动力，也是模糊数学服务于社会生产实践的核心。随着模糊系统的数学理论及其应用技术的不断成熟，模糊数学方法在工程领域中的应用越来越受到人们的重视，应用的成果越来越多，应用的领域也越来越广泛。主要方面有：通用模糊控制器的研究与开发；模糊家用电器的设计与产品研制；模糊控制在工业生产过程控制中的应用；机器人技术；模糊知识表述；模糊数据库与知识挖掘

技术；计算机图像处理与模式识别；语音处理与识别；人工智能与专家系统；模糊信息理论与模糊信息编码；气象、地震等自然灾害的模糊预测技术；模糊决策与评价技术；模糊统计理论与应用；模糊运筹学（包括模糊优化、模糊随机服务系统、模糊线性规划、模糊对策、模糊统筹方法等）及其应用；医疗诊断；复杂大系统的模糊设计；在经济、教育、管理科学、军事、心理学等领域的应用；模糊数学与人工神经网络、遗传优化算法、分形几何、混沌理论、小波分析、数学形态学等技术的结合与应用等。

任何一门科学的发展几乎都是理论与应用相互促动的，常常又都是数学的理论超前于应用，数学为应用提供有力的工具。目前，模糊系统的数学理论研究也十分活跃，并形成了基于模糊集合论思想的非经典集合理论、非经典逻辑学、模糊代数学以及包括模糊拓扑、模糊测度理论在内的模糊分析学等主要分支，它们是模糊系统科学的重要数学基础。然而，人们也发现，目前模糊工程技术中应用的模糊数学方法主要集中在模糊文法、代数和逻辑的原理与方法上。

经典数学的普遍应用，包括数学物理方法、运筹学方法、数理统计方法以及近些年发展起来的各种非线性数学方法等，无不与300年来逐步发展起来的以微积分理论为主线的数学分析相联系。因此，微积分及相关的极限理论已经成为任何一个接受高等技术教育的人必备的知识，并被作为现代基础数学的主要代表学科。在我国，将模糊系统理论称为模糊数学。提到数学，自然就会联系到微积分。尽管在20世纪80年代初，人们就提出了模糊函数的微积分概念，并围绕其做了大量有深刻数学理论意义的工作。但是，由于模糊实数空间性质和模糊值函数性质方面的研究非常艰难，特别是受模糊数运算和模糊值函数的解析表达困难等制约，模糊微分和模糊积分的研究成果还只能限于理论，许多结论只能是构造性的，与实际应用还有较大的距离。

在把模糊分析作为区间分析拓广的思想基础上而提出的模糊微

分和模糊黎曼意义积分的理论框架是完美的，连接模糊分析与区间分析的桥梁是扩张原理。然而，正是扩张原理表述上的遍历性质，一个模糊集合的表达需要用无穷多个区间集合的表达来实现，进而无法实际操作模糊数、模糊值函数的运算和变换，这也是影响模糊分析方法实际运用的障碍之一。

本书提出了模糊结构元的概念，给出了模糊数与模糊值函数的结构元表示，利用结构元表示形式，有效地解决了模糊数和模糊值函数运算的解析表达问题，同时，给出了模糊值函数的微分和黎曼积分的扩张原理等价形式。特别是利用模糊结构元的单调变换，诱导出对称闭区间［-1，1］上同序标准单调有界函数类到模糊实数空间上的一一连续等距映射，从而在理论上解决了模糊实数空间及模糊值函数空间的各种有关度量性质的研究问题。模糊结构元理论与方法在一定程度上为模糊分析计算的简化提供了工具，同时也为模糊分析理论与应用的研究提出了一条值得深入探索的新途径。

本书所进行的模糊结构元理论研究是在国家自然科学基金(50174027，50244015)和辽宁省教育厅高校科研基金(202183381)资助下进行的。

由于模糊结构元方法提出时间不长，研究还不够深入，加之书稿撰写时间仓促，因此难免存在疏漏之处，敬请读者不吝赐教与指正。

郭嗣琮

2004年2月
于辽宁工程技术大学

目　录

第 1 章　模糊集合理论初步

本章主要介绍一些必备的模糊数学基础知识，包括模糊集合定义与运算，模糊集合的分解定理、表现定理，模糊映射下的扩张原理以及扩张原理的应用，还介绍了模糊数定义及由扩张原理导出的模糊数的运算.

1.1　模糊集合、分解定理与表现定理

1.1.1　模糊集合及运算

集合可以表现概念，然而，由于模糊概念没有明确的外延，在 L. A. Zadeh 提出模糊集合理论(1965 年)之前，人们无法利用经典集合来表现模糊概念. 因此，要使模糊信息处理在技术上有所突破，就必须对用模糊语言表现的模糊概念有一个结构性的刻画.

在经典集合论中，论域 X 上的子集 A 可以由其特征函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

惟一确定. 如果 A 表示一个明确概念，则它有明确的外延，$\chi_A(x)$ 指明了 X 中每个元素 x 对 A 的隶属程度. 此处，隶属程度仅取 0 和 1 两种极端情况，代表“是”和“非”的判断. $\chi_A(x)=1$ 说明对象 x 满足概念 A；$\chi_A(x)=0$ 说明对象 x 不满足概念 A. 由于模糊概念的外延不明确，因此，不能简单地用“是”和“非”的二值逻辑来判断对象与概念的关系. 例如，X 为实数集，“很大的数”是一个模糊概念，无法用 X 上的明确集合来表示，因为对于某些比较大的数 x，很难说它一定是很大的数或一定不是很大的数. 为了用集合的方法

来表现模糊概念，一种很自然的方法是将元素对集合的隶属程度从 $\{0, 1\}$ 两种情况扩展到 $[0, 1]$ 实数区间无穷多值的情况.

定义 1.1 论域 X 上的模糊子集 A 由映射

$$\mu_A: X \to [0, 1]; x \to \mu_A(x)$$

所确定，其中映射 μ_A 称为 A 的隶属函数；$\mu_A(x) \in [0, 1]$，表示元素 x 属于 A 的程度，或称 x 对 A 的隶属度.

图 1.1 分别给出了明确集合 A 的特征函数(见图 1.1(a)) 和模糊集合 B 的隶属函数(见图 1.1(b)) 的图形. 明确集合的特征函数取值范围为 $\{0, 1\}$，并且集合中的元素是清楚的；模糊集合的隶属函数取值范围为 $[0, 1]$，并且集合中的元素不都是清楚的. 由于 $[0, 1] \supset \{0, 1\}$，所以明确集合可以看作模糊集合的特例，而模糊集合是经典明确集合的拓广.

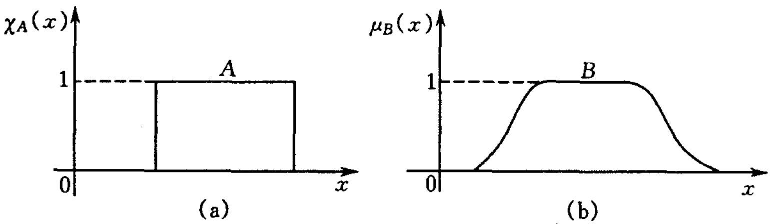

图 1.1 经典集合的特征函数(a) 和模糊集合的隶属函数(b)

在模糊分析中，所面对和研究的模糊集合主要是模糊数，以及以某个变量为参数的模糊数族(如模糊值函数)，论域 X 是实数域.

用 $\boldsymbol{P}(X)$ 和 $\boldsymbol{F}(X)$ 分别表示 X 上的全体经典集合和全体模糊集合，分别称为 X 的幂集和模糊幂集. 由于经典集合是模糊集合的特例，因此，有 $\boldsymbol{P}(X) \subset \boldsymbol{F}(X)$.

由于经典集合可以由特征函数惟一地确定，反之亦然，所以，经典集合间的关系和运算可以由特征函数表示为

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.1}$$

$$A \supseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \geqslant \chi_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.2}$$

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.3}$$

$$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.4}$$

$$\chi_{A^C}(x) = 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.5}$$

其中 $\chi_{A\cup B}(x)$, $\chi_{A\cap B}(x)$ 和 $\chi_{A^C}(x)$ 分别表示 $A \cup B$, $A \cap B$ 和 A^C(A 的余集) 的特征函数; "$\vee$" 表示上确界, "$\wedge$" 表示下确界, 对 $\forall a, b \in \{0, 1\}$, 有

$$a \vee b = \sup\{a, b\}, \ a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

设 A, B 是论域X 的模糊子集, 相对于经典集合的并、交、余运算, 可以给出模糊集合的并、交、补运算, 这些运算的定义可以是不惟一的. 但是, 因为模糊集与经典集间存在着拓广和特例的关系, 即当隶属函数的值域从[0, 1] 蜕化到{0, 1} 时, 模糊集合蜕化为普通集合. 所以, 模糊集合的并、交、余运算必须满足当隶属函数仅取 0, 1 两值时, 其定义与普通集合运算定义是一致的.

定义 1.2 是 Zadeh 给出的, 他直接利用了式(1.1) ~ (1.5) 的定义, 只是将特征函数替换成隶属函数.

定义 1.2 设 A, B 是论域 X 的模糊子集, 隶属函数分别为 $\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$, 则模糊集合的相等、包含关系及并集、交集、余集表示为

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.6}$$

$$A \supseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \geqslant \mu_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.7}$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.8}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.9}$$

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.10}$$

模糊集合的并集、交集和余集的隶属函数曲线为图 1.2 中包围阴影的曲线部分.

Zadeh 给出的关于模糊集并、交、余运算的定义是直接从式(1.1) ~ (1.5) 移植过来的, 它保证了当模糊集蜕化成经典集合时

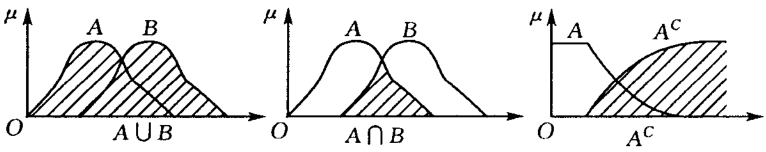

图 1.2 模糊集合的并集、交集和余集的隶属函数曲线

定义的合理性，称这种合理性为模糊集合的并、交、余运算定义的扩充原则．事实上，不难想象，满足这种扩充原则的定义绝不是惟一的．例如，$\forall A, B \in \boldsymbol{F}(X)$，定义并集 $A \cup B$ 和交集 $A \cap B$ 的隶属函数为

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x), \quad \forall x \in X, \tag{1.11}$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\cdot\mu_B(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.12}$$

可以验证，当 $\mu_A(x)$ 和 $\mu_B(x)$ 仅取 0，1 两值时，式(1.11) 和(1.12) 与式(1.8) 和(1.9) 是一致的．由于式(1.11) 和(1.12) 类似于概率论中计算随机事件"和"与随机事件"积"的公式，因此，称其定义的一对运算为"概率算子"．而称式(1.8) 和(1.9) 定义的运算为"最大 - 最小"算子．

不难验证，模糊集合的并、交、余运算具有如下性质．

① 幂等律：

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A;$$

② 交换律：

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A;$$

③ 结合律：

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

④ 吸收律：

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A;$$

⑤ 分配律：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

⑥ 0-1 律：

$$X \cap A = A,\ X \cup A = X,$$
$$\varnothing \cap A = \varnothing,\ \varnothing \cup A = A(\varnothing\text{ 是空集});$$

⑦ 复原律：

$$(A^C)^C = A;$$

⑧ 对偶律：

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C,\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

模糊集合的并、交运算可以推广到任意多个模糊集合的并、交运算. 设 T 是指标集，$A_t \in \mathbf{F}(X)(t \in T)$，则 $\{A_t\}$ 的并集 $\bigcup_{t\in T} A_t$ 与交集 $\bigcap_{t\in T} A_t$ 的隶属函数分别定义为

$$\mu_{\bigcup_{t\in T} A_t}(x) = \sup_{t\in T} \mu_{A_t}(x) = \bigvee_{t\in T} \mu_{A_t}(x), \tag{1.13}$$

$$\mu_{\bigcap_{t\in T} A_t}(x) = \inf_{t\in T} \mu_{A_t}(x) = \bigwedge_{t\in T} \mu_{A_t}(x). \tag{1.14}$$

分配律可以推广为无限分配律，有

$$A \cap \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \bigcup_{t\in T}(A \cap A_t), \tag{1.15}$$

$$A \cup \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \bigcap_{t\in T}(A \cup A_t). \tag{1.16}$$

1.1.2 模糊集合的分解定理与表现定理

定义 1.3 设 $A \in \mathbf{F}(X)$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，记

$$A_\lambda = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geqslant \lambda\},$$

称 A_λ 为 A 的 λ- 截集，λ 为置信水平. 又记

$$A_{\underset{\wedge}{\lambda}} = \{x \mid x \in X,\ \mu_A(x) > \lambda\},$$

称 $A_{\underset{\wedge}{\lambda}}$ 为 A 的 λ- 强截集.

图 1.3 给出了模糊集合 A 的隶属函数. 由图 1.3 可以看出，X 上使得隶属函数值大于 λ 的所有 x 构成的集合 $A_{\underset{\wedge}{\lambda}}$ 及大于等于 λ 的所有 x 构成的集合 A_λ 是 X 上的明确子集.

显然，$\forall \lambda \in [0, 1]$，有 $A_{\underset{\wedge}{\lambda}} \subseteq A_{\lambda}$，且 $A_0 = X$，$A_{\underset{\wedge}{1}} = \varnothing$.

对于 $A \in \boldsymbol{F}(X)$，称集合 A_1 为 A 的**核**，记为 $\ker A$；称 $A_{\underset{\wedge}{0}}$ 为 A 的承集（或支撑集），记为 $\mathrm{Supp}A$.

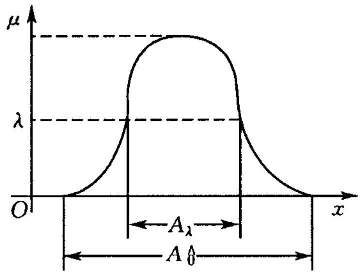

图 1.3　模糊集合 A 的λ截集

A，$B \in \boldsymbol{F}(X)$，$\lambda \in [0, 1]$，模糊集合的λ-截集和λ-强截集与模糊集合的运算具有如下性质.

性质 1.1　$(A \cup B)_{\lambda} = B_{\lambda} \cup A_{\lambda}$，$(A \cup B)_{\underset{\wedge}{\lambda}} = A_{\underset{\wedge}{\lambda}} \cup B_{\underset{\wedge}{\lambda}}$，

$(A \cap B)_{\lambda} = B_{\lambda} \cap A_{\lambda}$，$(A \cap B)_{\underset{\wedge}{\lambda}} = A_{\underset{\wedge}{\lambda}} \cap B_{\underset{\wedge}{\lambda}}$.

性质 1.1 对任意可列个或有限个模糊集运算均成立.

性质 1.2　对于模糊集合 A 的余集 A^C，有

$$(A^C)_{\underset{\wedge}{\lambda}} = (A_{1-\lambda})^C \quad 或 \quad (A^C)_{\lambda} = (A_{[1-\lambda]^{\wedge}})^C.$$

但是，一般地

$$(A^C)_{\lambda} \neq (A_{\lambda})^C.$$

性质 1.3　$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow A_{\lambda_1} \supseteq A_{\lambda_2}$，$A_{\underset{\wedge}{\lambda}_1} \supseteq A_{\underset{\wedge}{\lambda}_2}$.

定理 1.1(分解定理 Ⅰ)　设 $A \in \boldsymbol{P}(X)$，$\forall \lambda \in [0, 1]$，定义 X 上的模糊集 $\lambda * A$，其隶属函数为

$$\mu_{\lambda * A}(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{1.17}$$

对于 $\forall A \in \boldsymbol{F}(X)$，有分解形式

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * A_{\lambda}.$$

证明　只需证明

$$\mu_A(x) = \mu_{\bigcup\limits_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * A_{\lambda}}(x) = \bigvee_{\lambda \in [0, 1]} \mu_{\lambda * A_{\lambda}}(x), \quad \forall x \in X.$$

对于 $\mu_A(x) \in [0, 1]$，有

$$\bigvee_{\lambda \in [0, 1]} \mu_{\lambda * A_{\lambda}}(x) = \bigvee_{\lambda \in [0, 1]} [\lambda \wedge \chi_{A_{\lambda}}(x)]$$

$$= \left\{ \bigvee_{0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_A(x)} [\lambda \wedge \chi_{A_\lambda}(x)] \right\} \vee \left\{ \bigvee_{\mu_A(x) \leqslant \lambda \leqslant 1} [\lambda \wedge \chi_{A_\lambda}(x)] \right\}$$

$$= \bigvee_{0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_A(x)} (\lambda \wedge 1) = \mu_A(x).$$

如图 1.4 所示，模糊集合 A 可由 $\{A_\lambda \mid \lambda \in [0, 1]\}$ 惟一确定.

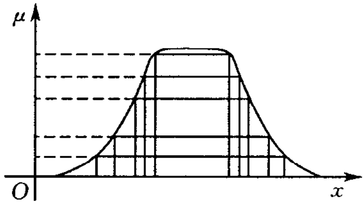

图 1.4

定理 1.2(分解定理 Ⅱ)　设 $A \in \boldsymbol{F}(X)$，则有

$$A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * A_{\dot{\lambda}}. \tag{1.18}$$

该定理的证明与定理 1.1 的证明相同，略.

定理 1.3(分解定理 Ⅲ)　设 $A \in \boldsymbol{F}(X)$，令

$$H : [0, 1] \to \boldsymbol{P}(X);\ \lambda \to H(\lambda) \in \boldsymbol{P}(X)$$

满足对于 $\forall \lambda \in [0, 1]$，$A_{\dot{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$，则

① $A = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * H(\lambda)$；

② 对于 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \Rightarrow H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$；

③ 对于 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，有

$$A_\lambda = \bigcap_{\alpha \leqslant \lambda} H(\alpha);\ A_{\dot{\lambda}} = \bigcup_{\alpha \geqslant \lambda} H(\alpha).$$

证明　① 因为 $A_{\dot{\lambda}} \subseteq H(\lambda) \subseteq A_\lambda$，对一切 $\forall \lambda \in [0, 1]$ 成立，有

$$\lambda * A_{\dot{\lambda}} \subseteq \lambda * H(\lambda) \subseteq \lambda * A_\lambda,\ \forall \lambda \in [0, 1].$$

因而

$$\bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * A_{\dot{\lambda}} \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * H(\lambda) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * A_\lambda,$$

即

$$A \subseteq \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda * H(\lambda) \subseteq A.$$