高分对策

初中数学

丛书主编／卢祥之
本册主编／戴　雪

中国版协国际合作出版促进会研究中心策划
全国20所著名中学优秀特级教师联合编撰

青岛出版社
QINGDAO PUBLISHING HOUSE

编 委 会

丛书主编　卢祥之

本册主编　戴　雪

编 著 者　苗兰香　张玉芬　张玉香

　　　　　贾从惠　赵秀珍

前　言

助学读物的读者对象是学生。但学生们怎样认识“助学读物”呢？

2004年，我们调研了北京四中、北京东直门中学、海淀101中学、中国人大附中、太原实验中学、天津实验中学等中学，学校中不少同学反映：“助学读物太多了，好的不多。”“无所适从，老师推荐什么，就买什么。”有些一线教师反映：“助学读物要符合中考、高考备考需求，才有卖点。”

同时，我们也深入研究了部分助学读物畅销书。发现这些受到欢迎的图书，共同的特点是示人以方法，即如古人说：“授之予鱼，不如授之予渔。”“鱼”给了人，总会吃完；“渔”，猎鱼的方法，把方法给了人，人便会自己猎取无穷无尽的鱼。

我们根据历年，特别是近三年，中、高考的主要题型，分开学科，剖析题型。尤其是常见的填空题、选择题、应用题以及物理、化学中的实验题等，归纳、梳理解题方法、诀窍和对策，参照并根据近几年考题的重点、某一类题型容易出现的易错点、貌似相同而实质不同的的辨识点，主要突出利于学生梳理知识、有相当知识涵盖面的典型题型，考试中经常遇到、常常不经意间失分的易错题型，活题活解、一题多解有助于启发思路的题型，并根据学生们在学习不同阶段的需要，进行了精心编排和组合，构思了这套“高分对策”编写方案。方案形成后广泛征询过一线优秀教师的意见，并且向学生作了调研。学生们和老师们提出了不少修改意见，最后形成共识，编写了这套“高分对策”丛书。全套丛书的编撰宗旨是，结合多家好书的长处精心设计，突出有内涵、有深度而又做到有一定的特点。

为了确保编写质量，我们所约请的作者都参加过相当数量的精品教辅丛书的撰写工作，有较高的水平和经验，其中有不少是知名中学的一线特级、高级教师，有的还是北京师范大学、天津师范大学、南京师范大学的教育博士。希望这套丛书能对中考、高考的读者朋友们有所帮助。不足之处，也欢迎读者朋友批评指正。

卢祥之

2005年4月20日于北京中国科学院

目　　录

第一编　代数篇

第一章　数与式……………………………………………………（3）

第一节　实数……………………………………………………（3）

第二节　代数式…………………………………………………（7）

第二章　方程(组)与不等式(组)…………………………………（16）

第一节　方程与方程组…………………………………………（16）

第二节　不等式与不等式组……………………………………（41）

第三章　函数及其图像……………………………………………（50）

第一节　平面直角坐标系及函数………………………………（50）

第二节　一次函数的图像和性质………………………………（56）

第三节　二次函数及其图像……………………………………（67）

第四节　反比例函数及其图像…………………………………（83）

第四章　解直角三角形……………………………………………（96）

第一节　锐角三角函数…………………………………………（96）

第二节　解直角三角形…………………………………………（103）

第三节　应用举例………………………………………………（109）

第五章　统计初步…………………………………………………（121）

第二编　平面几何篇

第六章　线与角……………………………………………………（133）

第七章　三角形……………………………………………………（140）

第八章　四边形……………………………………………………（157）

第一节　平行四边形……………………………………………（157）

第二节　梯形……………………………………………………（166）

第九章　相似形……………………………………………………（174）

第十章　圆…………………………………………………………（187）

第一节　圆的有关性质…………………………………………（187）

第二节　直线和圆的位置关系…………………………………（202）

第三节　圆和圆的位置关系……………………………………（221）

第四节　正多边形和圆…………………………………………（237）

第三编　综合篇

第十一章　综合题分析……………………………………………（247）

第一编　代数篇

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章

数　与　式

第一节　实数 >>>

一、近三年重要考点一览

1. 概念：

(1)实数的有关概念，特别是无理数的识别.

(2)相反数、倒数、绝对值等概念的辨析，特别是对绝对值的几何意义的理解与应用.

(3)平方根、立方根概念的理解与辨析.

2. 运算：

(1)实数混合运算及比较大小.

(2)按要求取近似数或确定有效数字及科学记数法.

(3)利用非负数及其性质构造方程组，求解未知数的值.

3. 探索：

从实际问题及数据中，抽象出数量关系，并用数学符号表示出来.

二、易错分析

1. 指出 $0,-1,-\frac{1}{2},a,-a$ 中的负数.

辨析　易错点在于对字母表示数的意义及负号的意义没有正确理解，认为"a"就表示正数，"$-a$"就表示负数，且将"$-$"看作"a"的性质符号. 其实，数域扩展到实数后，每个字母均可表示正数、负数和 0，而负号不仅可以表示负数，还具有"相反"的意义：$-a$ 表示 a 的相反数；a 表示向前，则 $-a$ 表示向后.

正解　$-1,-\frac{1}{2}$ 是负数. 另外，$a>0$ 时，$-a$ 是负数；$a<0$ 时，$-a$ 是正数；$a=0$ 时，$-a=0$.

2. 当 $a<b<0$ 时，$b-|a-b|+\sqrt{a^2}=$ ________.

辨析　此题涉及绝对值、算术根的有关知识，关键是在 $a<b<0$ 的条件下，即 $a<0,a-b<0$ 条件下如何去掉绝对值符号的问题. 易错点在于去绝对值符号时没有根据已知条件，不明确绝对值与算术平方根的意义.

正解　$\because\ a<b<0$，

$\therefore$ 原式 $=b-|a-b|+|a|$

$=b-[-(a-b)]+(-a)=0.$

3. 如果一个有理数的偶次幂是正数，那么这个有理数(　　).

A. 一定是正数　　B. 一定是负数

C. 是正数或负数　　D. 可以是任意有理数

辨析　易错点在于对有理数的运算法则理解不透彻. 若这个有理数是 0，则其偶次幂是 0；只有

非零实数(即正数或负数)的偶次幂才是正数.

正解 C

4. 化简 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 的结果是(　　).

A. $\sqrt{a}$　　B. $-\sqrt{a}$　　C. $\sqrt{-a}$　　D. $-\sqrt{-a}$

辨析 易错点在于不考虑 a 的符号,强行将 a 移进 $\sqrt{\ }$ 内. 事实上,算术平方根有两重含义:在形式上,要求有 $\sqrt{\ }$;在本质上要求被开方数非负,因为 $a<0$,所以 $|a|$ 移进 $\sqrt{\ }$ 后,外面应遗留"$-$".

正解 ∵ $a<0$,

∴ 原式 $=-|a|\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot(-\frac{1}{a})}=-\sqrt{-a}$.

∴ 选 D.

三、中考试题设计趋向及名题精选

例 1 (2003 上海市)下列命题中正确的是(　　).

A. 有限小数是有理数

B. 无限小数是无理数

C. 数轴上的点与有理数一一对应

D. 数轴上的点与实数一一对应

考查点 本题重点考查有理数、无理数及实数的概念及数形结合的基础——数轴.

分析 A. √　B. × 无限小数中的无限不循环小数才是无理数.　C. × 数轴与实数才有一一对应关系.

解答 A　D

例 2 (2003 山东省)设 a 是大于 1 的实数,若 $a,\frac{a+2}{3},\frac{2a+1}{3}$ 在数轴上对应的点分别记作 A、B、C,则 A、B、C 三点在数轴上自左至右的顺序是(　　).

A. C、B、A　　B. B、C、A　　C. A、B、C　　D. C、A、B

考查点 实数的大小比较,及实数与数轴的一一对应关系.

分析 比较实数大小时,常用"比差法"或"比商法".

(1)比差法:

$$a-b\begin{cases}>0\Leftrightarrow a>b\\=0\Leftrightarrow a=b\\<0\Leftrightarrow a<b\end{cases}$$

(2)比商法:

$$\frac{a}{b}\begin{cases}>1\Leftrightarrow a>b\\=1\Leftrightarrow a=b\\<1\Leftrightarrow a<b\end{cases}$$

一般情况下,优先考虑比差法.

解 ∵ $B-C=\frac{a+2}{3}-\frac{2a+1}{3}=\frac{1-a}{3}$, $a>1$,

∴ $B-C<0$ 即 $B<C$.

∵ $A-C=a-\frac{2a+1}{3}=\frac{a-1}{3}$, $a>1$,

∴ $A-C>0$ 即 $A>C$.

∴ $B<C<A$.

故选 B.

例 3 (2003 烟台市)设 a、b、c 都是实数，且满足 $(2-a)^2+\sqrt{a^2+b+c}+|c+8|=0$，$ax^2+bx+c=0$. 求代数式 x^2+x+1 的值.

考查点 非负数的性质.

分析 初中阶段共涉及三个非负数，即 a^2(或 a^{2n})、$|a|$ 及 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$. 当两个或两个以上的非负数的和为零时，只能是每个非负数同时为 0. 此类题常通过解方程组求未知数的值.

解 $\because (2-a)^2\geqslant0$，$\sqrt{a^2+b+c}\geqslant0$，$|c+8|\geqslant0$，

又 $(2-a)^2+\sqrt{a^2+b+c}+|c+8|=0$，

$\therefore (2-a)^2=0$ 且 $\sqrt{a^2+b+c}=0$ 且 $|c+8|=0$.

得 $\begin{cases}2-a=0,\\a^2+b+c=0,\\c+8=0.\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}a=2,\\b=4,\\c=-8.\end{cases}$

$\therefore 2x^2+4x-8=0$ 即 $x^2+2x-4=0$.

$\therefore x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$.

将 x_1、x_2 分别代入 x^2+x+1 得 $6+\sqrt{5}$ 或 $6-\sqrt{5}$. 另解：$x^2+x+1=(x^2+2x-4)-x+5=5-x$，将 x_1、x_2 分别代入后得 $6+\sqrt{5}$ 或 $6-\sqrt{5}$.

例 4 (2003 陕西省)今年我省元月份某一天的天气预报中，延安市最低气温为 -6℃，西安市最低气温为 2℃，这一天延安市的气温比西安市的气温低(　　).

A. 8℃　　B. -8℃　　C. 6℃　　D. 2℃

考查点 "+、−"号的产生源于生产、生活实践，因此"+"、"−"号是有意义的.

分析 问题可转化为"$A=-6$，$B=2$. 问 A 比 B 小(　　)."值得注意的是，问题中的"小"和"低"就是"−"的含义.

解 $-6-2=-8$，

$\therefore$ 低 8℃，故选 A.

例 5 (2003 重庆市)小王利用计算机设计了一个计算程序，输入和输出的数据如下表：

输入	…	1	2	3	4	5	…
输出	…	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$	…

那么，当输入数据是 8 时，输出的数据是(　　).

A. $\frac{8}{61}$　　B. $\frac{8}{63}$　　C. $\frac{8}{65}$　　D. $\frac{8}{67}$

考查点 数学能力的考查题. 需要在深层次挖掘内在的数量关系，并能用数学语言准确地描述这种关系.

分析 (1)输入的数据为输出数据的分子.

(2)输入数据　输出分母数据

⋮　　　⋮

1　　$2=1+1=1^2+1$

2　　$5=4+1=2^2+1$

3	$10=9+1=3^2+1$
4	$17=16+1=4^2+1$
5	$26=25+1=5^2+1$
⋮	⋮
n	n^2+1

解 输入 $n=8$ 时，输出的数据为 $\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$，

故选 C.

四、综合强化训练

1. **填空题**：

(1)一个数的倒数的相反数是 $\frac{1}{3}$，则这个数是________.

(2)$|5-2a|=2a-5$，则 a 的取值范围是________.

(3)$(-\sqrt{4})^2$ 的平方根是________.

(4)一个正数扩大到原来的 16 倍，则它的算术平方根扩大到原来的________倍.

(5)当 x ________时，式子 $\sqrt{\frac{-1}{x-1}}$ 有意义.

(6)若 a、b、c 均为非零实数，则 $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}$ 的值是________.

(7)若 $|a-\pi|=\pi-a$，则 $|a-4|=$________.

(8)若 $a=5$，$b=-2\sqrt{6}$，则 $\sqrt{a^2+b^2}+|-a|=$________.

(9)$-\frac{1}{2}$ 的倒数与 2 的相反数的差的绝对值等于________.

(10)已知直角三角形的两边长分别为 5 和 12，则第三边的长为________.

2. **选择题**：

(1)若 a 是最大的负整数，b 是绝对值最小的有理数，c 是最小的自然数，则 $(a-c)^b$ 等于(　　).

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

(2)若 $|a|=5$，$|b|=3$，则 $|a-b|$ 等于(　　).

A. 2　　B. 8　　C. 2 或 8　　D. ±2 或 ±8

(3)由四舍五入法得到近似数 0.02053，下面的说法正确的是(　　).

A. 精确到万分位，有 4 个有效数字

B. 精确到十万分位，有 4 个有效数字

C. 精确到万分位，有 5 个有效数字

D. 精确到十万分位，有 5 个有效数字

(4)若 $-2<x<2$，化简 $2|x|-|x+2|+|x-2|$ 的结果是(　　).

A. $-4x$　　B. 0　　C. 0 或 $4x$　　D. 0 或 $-4x$

(5)设 $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$，则 a、b、c 之间的大小关系是(　　).

A. $c>b>a$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

(6)已知 $0<x<1$，那么在 x、$\frac{1}{x}$、$\sqrt{x}$、x^2 中最大的数是(　　).

A. x　　B. $\frac{1}{x}$　　C. $\sqrt{x}$　　D. x^2

(7)如果实数 a、b 满足 $a+b>0$，$ab<0$，那么下列不等式中正确的是(　　).

A. $|a|>|b|$

B. $|a|<|b|$

C. 当 $a>0$，$b<0$ 时，$|a|>|b|$

D. 当 $a<0$，$b>0$ 时，$|a|>|b|$

(8)设 $M=x^2-8x+22$，$N=-x^2+6x-3$，那么 M 与 N 的大小关系是(　　).

A. $M>N$　　B. $M<N$　　C. $M=N$　　D. 无法确定

3. 计算题：

(1)$(-3\frac{1}{3})\div 6\frac{2}{3}\times|-2^0|$；

(2)$|-2|+\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+2^{-1}-(\cos30°-\sqrt{3})^0$；

(3)$(-\frac{1}{2})^2-\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}+8^0+(-1)^3+(\frac{4}{3})^{-1}$.

4. 已知 $|2x-3y-8|+(4x+y-2)^2=0$，

求 $(x^{-2}+\frac{1}{3}y)^{-1}\div xy^2$ 的值.

5. 已知 $|1+x|=-x-1$，

化简 $|x|-2|x-1|+|2-x|$.

6. 若 $\sqrt{1-2\sqrt{a-1}}$ 与 $\sqrt{8-4\sqrt{b-4}}$ 互为相反数，

求 a、b 的值.

五、答案与提示

1. (1)-3　(2)$a\geq\frac{5}{2}$　(3)±2　(4)4　(5)<1　(6)±3、±1　(7)$4-a$　(8)12　(9)0

(10)13 或 $\sqrt{119}$

2. (1)D　(2)C　(3)B　(4)D　(5)D　(6)B　(7)A　(8)A

3. (1)$-\frac{1}{2}$　(2)$2\frac{1}{2}$　(3)$\frac{1}{4}$

4. $\frac{3}{4}$

5. 0

6. $a=\frac{5}{4}$，$b=8$

第二节　代数式　>>>

一、近三年重要考点一览

1. 概念：

(1)因式分解的意义及其与整式乘法的区别与联系.

(2)分式基本性质.

(3)二次根式、最简二次根式、同类二次根式的概念.

2. 运算：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

大致有指数运算;因式分解;利用公式基本性质进行约分、通分及四则混算;二次根式的化简、计算,特别注意分母有理化;求代数式的值.

二、易错分析

1. 用求根公式法分解因式:$4x^2+8x-3$.

剖析 容易错在结果中漏写二次项系数4.用求根公式法分解二次三项式时,若方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根为x_1、x_2,则$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

正解 $4x^2+8x-3=4(x-\frac{-2+\sqrt{7}}{2})(x-\frac{-2-\sqrt{7}}{2})$

$=(2x+2-\sqrt{7})(2x+2+\sqrt{7})$.

2. 当x取何值时,分式$\frac{|x|-2}{x^2-x-2}$的值是零.

剖析 出现错误,往往是考虑不全面造成的.比如只考虑了分子是零的条件,而忽略了分母不能为零的前提条件.

正解 要使分式的值为零,必须$\begin{cases}x^2-x-2\neq0,\\|x|-2=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\neq-1\text{ 且 }x\neq2,\\x=2\text{ 或 }x=-2.\end{cases}$

$\therefore x=-2$.

即当$x=-2$时,原分式值为零.

3. 当x为何值时,等式$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}=0$才能成立?

剖析 你是否得到了"$x=2$或$x=-3$"的答案?那你就错在没有考虑到$\sqrt{a}$中的被开方数a必须非负这一条件.

正解 要使$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}=0$成立,$x$必须首先满足

$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x+3\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\x\geqslant-3\end{cases}\Rightarrow x\geqslant2$,

且满足$x-2=0$或$x+3=0\Rightarrow x=2$或$x=-3$.

综上所述,只有当$x=2$时,$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}=0$才成立.

4. 化简$2x-\sqrt{1-4x+4x^2}$,并求当$x=\frac{2}{3}$时代数式的值.

剖析 错误往往产生在没有考虑$\sqrt{(1-2x)^2}$的非负性.实际上,$\sqrt{(1-2x)^2}=|1-2x|$,化简时,必须考虑对"$1-2x$"的整体符号进行讨论,直接得$\sqrt{(1-2x)^2}=1-2x$就错了.

初中阶段接触这样几个非负量:平方(偶次方)、绝对值、算术根.它们集中出现在公式"$\sqrt{a^2}=|a|$"中,因此,必须把握这个公式中体现的非负转化.

正解 $2x-\sqrt{1-4x+4x^2}=2x-\sqrt{(1-2x)^2}=2x-|1-2x|$

$=\begin{cases}4x-1,x<\frac{1}{2};\\2x,x=\frac{1}{2};\\1,x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

当$x=\frac{2}{3}$时,原式$=1$.

三、中考试题设计趋向及名题精选

例1 (2002陕西省)如图1.2—1,在边长为a的正方形中挖掉一个边长为b的小正方形($a>$

b)，把余下的部分剪拼成一个矩形(如图 1.2—2)，通过计算两个图形阴影部分的面积，验证了一个等式，则这个等式是(　　)．

A. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　　　B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　　　D. $(a+2b)(a-b)=a^2+ab-2b^2$

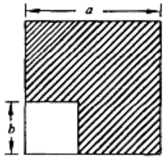

图 1.2—1

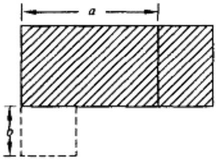

图 1.2—2

考查点　本题考查了整式变形中的乘法公式的几何特征．实际上，本题是将图形特征转换成代数符号语言的能力转换考查，是典型的代数、几何结合的题目．

分析　图 1.2—1 中的阴影面积 S_1 是大、小两个正方形之差；图 1.2—2 中阴影面积 S_2 可用长×宽来计算，再通过"剪拼"，得 $S_1=S_2$．

解　$S_1=a^2-b^2$，$S_2=(a+b)(a-b)$．

$\because S_1=S_2$，

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)$．

故选 A．

例 2　(1999 青岛市)同时使分式 $\dfrac{x-5}{x^2+6x+8}$ 有意义，又使分式 $\dfrac{x^2+3x}{(x+1)^2-9}$ 无意义的 x 的取值范围是(　　)．

A. $x\neq4$ 且 $x\neq-2$　　　　B. $x\neq-4$ 且 $x=2$

C. $x=4$　　　　D. $x=2$

考查点　分式有意义$\Leftrightarrow$分母$\neq0$

分式无意义$\Leftrightarrow$分母$=0$

分析　要使 $\dfrac{A}{B}$ 有意义，则 $B\neq0$；使 $\dfrac{D}{C}$ 无意义，则 $C=0$．注意多个控制变量的条件若同时被满足时，条件之间是"且"的关系，结果取交集．

解　由题得：$\left.\begin{cases}\text{要使}\dfrac{x-5}{x^2+6x+8}\text{有意义}\Rightarrow x^2+6x+8\neq0\Rightarrow x\neq-4\text{ 且 }x\neq-2\\ \text{要使}\dfrac{x^2+3x}{(x+1)^2-9}\text{无意义}\Rightarrow(x+1)^2-9=0\Rightarrow x=2\text{ 或 }x=-4\end{cases}\right\}\Rightarrow x=2.$

故选 D．

例 3　(2004 湛湖市)分式 $\dfrac{x^2+2x-3}{|x|-1}$ 的值为 0，则 x 的取值为(　　)．

A. $x=-3$　　B. $x=3$　　C. $x=-3$ 或 $x=1$　　D. $x=3$ 或 $x=-1$

考查点　分式有值的前提是分式首先要有意义．

分析　$\dfrac{A}{B}$ 值为 0，则 $\begin{cases}A=0,\\B\neq0.\end{cases}$

解　由题得 $\begin{cases}x^2+2x-3=0\\|x|-1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)(x+3)=0\\|x|\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\text{ 或 }x=-3\\x\neq1\text{ 且 }x\neq-1\end{cases}\Rightarrow x=-3.$

故选 A．

例 4 (2000 湛江市)把式子$(m-n)\sqrt{-\frac{1}{m-n}}$化成最简二次根式,正确的是(　　).

A. $\sqrt{n-m}$　　B. $\sqrt{m-n}$　　C. $-\sqrt{n-m}$　　D. $-\sqrt{m-n}$

考查点 1.注意二次根式$\sqrt{a}$中$a\geqslant 0$的隐条件. 2.最简二次根式要求形式上"$\sqrt{\ }$"内不含"$-$";"$-$"下不含"$\sqrt{\ }$".

解一 由题得$-\frac{1}{m-n}\geqslant 0$.

$\therefore m-n<0$ 即 $n-m>0$.

$\therefore$原式$=-(n-m)\sqrt{\frac{1}{n-m}}=-(n-m)\cdot\sqrt{\frac{n-m}{(n-m)^2}}=-(n-m)\cdot\frac{\sqrt{n-m}}{|n-m|}$

$=-(n-m)\cdot\frac{\sqrt{n-m}}{n-m}=-\sqrt{n-m}$. 故选 C.

解二 由题得$-\frac{1}{m-n}\geqslant 0$.　$\therefore n-m>0$.

$\therefore$原式$=-(n-m)\cdot\sqrt{\frac{1}{n-m}}=-\sqrt{(n-m)^2\cdot\frac{1}{n-m}}=-\sqrt{n-m}$. 故选 C.

解三 由题得$-\frac{1}{m-n}\geqslant 0$.　$\therefore n-m>0, m-n<0$. 故选项 B、D 被排除(被开方数<0).

又$\because\sqrt{-\frac{1}{m-n}}>0, m-n<0$,　$\therefore(m-n)\cdot\sqrt{-\frac{1}{m-n}}<0$. 故排除 A.

故选 C.

例 5 (2004 烟台市)已知:$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$,求$\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的值.

考查点 分式化简、根式化简、$\sqrt{a^2}=|a|$及化繁为简、化难为易的解决问题的能力.

分析 所谓"化简",包括两方面,即"已知"的化简和"所求式"的化简.

解一 $\because a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$,

$\therefore a-1=1-\sqrt{3}<0$.

原式$=\frac{(a-1)^2}{a-1}-\frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}=(a-1)-\frac{|a-1|}{a(a-1)}$.　$\because a-1<0$,　$\therefore|a-1|=1-a$.

$\therefore$原式$=a-1-(-\frac{1}{a})=a-1+\frac{1}{a}$,其中$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$,则$\frac{1}{a}=2+\sqrt{3}$. $\therefore$原式$=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=3$.

解二 $\because a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2^2-(\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,以下解答同解答一.

例 6 (2002 内江市)已知$\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}(0<a<1)$,求代数式$\frac{x^2+x-6}{x}\div\frac{x+3}{x^2-2x}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$的值.

考查点 掌握$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$的使用;计算复杂代数式时的"先化简后求值"的思路.

分析 此类型题要注意思考时从"结论"入手,先通过"所求式"的化简来了解题目结构,再由"所求式"来决定"已知条件"的使用方式和变形方向. 本题通过化简所求式发现,可先计算x、$x-2$及x^2-4x的值,再进行化简计算.

解 $\because\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$,　$\therefore x=a^2+\frac{1}{a}+2$,　即$x-2=a+\frac{1}{a}$,$(x-2)^2=(a+\frac{1}{a})^2$.

$\therefore x^2-4x=a^2+\frac{1}{a^2}-2=(a-\frac{1}{a})^2.$

$$原式=\frac{(x+3)(x-2)}{x}\cdot\frac{x(x-2)}{x+3}-\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{x-2-\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=(x-2)^2-\frac{a+\frac{1}{a}+\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}}{a+\frac{1}{a}-\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}}$$

$$=(a+\frac{1}{a})^2-\frac{a+\frac{1}{a}+|a-\frac{1}{a}|}{a+\frac{1}{a}-|a-\frac{1}{a}|}.$$

$\because 0<a<1,\quad \therefore a<\frac{1}{a}.\quad \therefore a-\frac{1}{a}<0.$

$$\therefore 原式=a^2+\frac{1}{a^2}+2-\frac{a+\frac{1}{a}-(a-\frac{1}{a})}{a+\frac{1}{a}+(a-\frac{1}{a})}=a^2+\frac{1}{a^2}+2-\frac{\frac{2}{a}}{2a}=a^2+2.$$

例 7 (2003 山西市)有若干张如图 1.2—3 所示的正方形和长方形卡片.表中所列四种方案能拼成边长为$(a+b)$的正方形的是(　　).

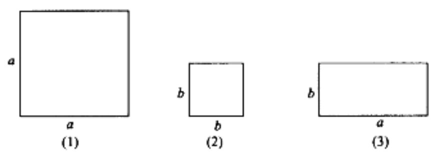

图 1.2—3

卡片 数量(张) 方案	(1)	(2)	(3)
A	1	1	2
B	1	1	1
C	1	2	1
D	2	1	1

考查点　本题是一道数学建模的问题.主要考查学生转化问题的能力,若能将此题成功解释为因式分解中的完全平方问题,则成一道较容易的题目,所以考查因式分解倒显得不重要了.

分析　通过阅读材料,写出有关的面积,即 a^2, b^2, ab 能否组合成$(a+b)^2$,则比较容易看到.
$\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$,　$\therefore$需边长为 a 的正方形 1 块,边长为 b 的正方形 1 块,长 a 宽 b 的长方形 2 块,故选 A.

解　A.

例 8　(1)(2003 福州市)观察下列各式:

$1\times3=1^2+2\times1$

$2\times4=2^2+2\times2$

$3\times5=3^2+2\times3$

…

请你将猜想到的规律用自然数 $n(n\geqslant1)$表示出来:________.

(2)(2004 北京市　云南省)观察按下列顺序排列的等式：

$9\times0+1=1$

$9\times1+2=11$

$9\times2+3=21$

$9\times3+4=31$

$9\times4+5=41$

…

猜想：第几个等式(n 为正整数)用 n 表示，可以表示成________.

考查点　对已有信息进行归纳、推理，并将体会到的规律用数学语言——代数式表达出来.

分析　这类找规律的题目要找两种量：不变量和变量. 如(1)题中，等号右侧的"2"不变；(2)题中，等号左侧"9"不变. 其余量都在变，关键要找出变量的变化与"n"有何关系. 如(1)中，

(n)：	甲		乙		丙²				丁
(1)：	1	×	3	=	1^2	+	2	×	1
(2)：	2	×	4	=	2^2	+	2	×	2
(3)：	3	×	5	=	3^2	+	2	×	3
		…							

发现，甲与丁列数就是 n，丙列数是 n^2，乙列数虽不是 n，但乙列数间相差 1，因此乙列数与相应 n 之差为定值 2，所以乙列数可表示为$(n+2)$.

$\therefore$规律是 $n\cdot(n+2)=n^2+2n$.

(2)题中的规律我们列了个表格

n	变量 1	变量 2
1	$0=1-1$	$1=1$
2	$1=2-1$	$11=10+1$
3	$2=3-1$	$21=10\times2+1$
4	$3=4-1$	$31=10\times3+1$
⋮	⋮	⋮

想想看，结果写出来了吗？

解答　(1)$n(n+2)=n^2+2n$　　($n\geqslant1$)

(2)$9(n-1)+n=10\times(n-1)+1$　　(n 为正整数)

四、综合强化训练

1. 填空题：

(1)如果 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，那么 $\frac{x+y}{y}=$________.

(2)写出 a^2b 的一个同类项：________.

(3)化简 $(ab-b^2)\div\frac{a-b}{ab}$ 的结果为________.

(4)若 $y=\frac{x}{x+1}$，则用 y 的代数式表示 x 为________.

(5)因式分解：$a^2-1+b^2-2ab=$________.

(6)某公司今年 5 月份的纯利润是 a 万元，如果每个月份纯利润的增长率都是 x，那么预计 7 月份的纯利润将达到________万元(用代数式表示).

(7)完成下列配方过程：

$x^2+2px+1=[x^2+2px+(\quad\quad)]+(\quad\quad)=(x+\quad\quad)^2+(\quad\quad)$

(8)多项式 $9x^2+1$ 加上一个单项式后，使它能成为一个整式的完全平方，那么加上的单项式可以是________.(填上一个你认为正确的即可.)

(9)用黑白两种颜色的正六边形地砖按如图 1.2—4 所示的规律拼成若干个图案：

①第 4 个图案中有白色地面砖________块；

②第 n 个图案中有白色地面砖________块.

图 1.2—4

(10)已知：$2+\frac{2}{3}=2^2\times\frac{2}{3}$，$3+\frac{3}{8}=3^2\times\frac{3}{8}$，$4+\frac{4}{15}=4^2\times\frac{4}{15}$，…，若 $10+\frac{a}{b}=10^2\times\frac{a}{b}$（$a$、$b$ 为正整数），则 $a+b=$________.

2. **选择题：**

(1)一根 1m 长的绳子，第一次剪去一半，第二次剪去剩下的一半，如此剪下去，第六次后剩下的绳子的长度为（　　）.

A. $(\frac{1}{2})^3$m　　B. $(\frac{1}{2})^5$m　　C. $(\frac{1}{2})^6$m　　D. $(\frac{1}{2})^{12}$m

(2)下列计算中，正确的是（　　）.

A. $(a+b)^2=a^2+b^2$　　B. $a^3+a^2=2a^5$　　C. $(-2x^3)^2=4x^6$　　D. $(-1)^{-1}=1$

(3)（多项选择题）下列各式经过化简后与 $-\sqrt{-27x^3}$ 是同类二次根式的是（　　）.

A. $\sqrt{27x^3}$　　B. $\sqrt{\frac{-x^3}{27}}$　　C. $-\frac{1}{9}\sqrt{-3x^3}$　　D. $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{3}}$

(4)将四个相同的矩形（长是宽的 3 倍），用不同的方式拼成一个大矩形，设拼得的大矩形面积是四个小矩形的面积和，则大矩形周长的值只可能是（　　）.

A. 1 种　　B. 2 种　　C. 3 种　　D. 4 种

(5)化简 $\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{m+3}$ 的结果是（　　）.

A. $\frac{m+6}{m^2-9}$　　B. $\frac{2}{m-3}$　　C. $\frac{2}{m+3}$　　D. $\frac{2m+9}{m^2-9}$

(6)已知 $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$，$b=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$，则 $\sqrt{a^2+b^2+7}$ 的值为（　　）.

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(7)有一块长为 a、宽为 b 的长方形铝片，四角各截去一个相同的边长为 x 的正方形，折起来做成一个没有盖的盒子，则此盒子的容积 V 的表达式应该是（　　）.

A. $V=x^2(a-x)(b-x)$　　B. $V=x(a-x)(b-x)$

C. $V=\frac{1}{3}x(a-2x)(b-2x)$　　D. $V=x(a-2x)(b-2x)$

(8)如图 1.2—5，正方形的边长是 a，以各边为直径在正方形内画半圆，所围成的图形（阴影部分）的面积为（　　）.

A. πa^2-a^2　　B. $2\pi a^2-a^2$

C. $\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$　　D. $a^2-\frac{1}{4}\pi a^2$

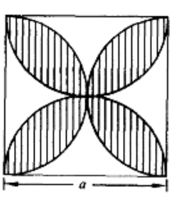

图 1.2—5

3. **解答题：**

(1)先化简，再求值：

$$\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-2xy+y^2}-(1-xy^2)(1+xy^2)-x^2\div\frac{1}{y^4}，其中 x=\sqrt{3}+\sqrt{2}，y=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com