



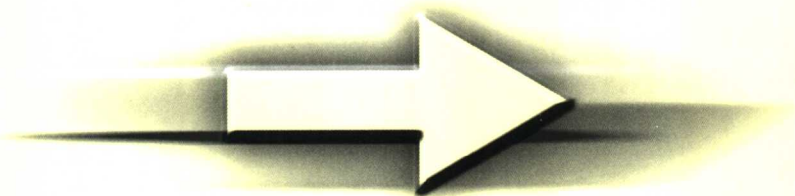
河南大学经济学学术文库

主编 耿明斋

现代经济理论中的凸分析

Convex Analysis in Modern Economic Theory

齐 玲 著



社会科学文献出版社 SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

河南大学经济学学术文库

现代经济理论中的凸分析

齐玲 著



社会科学文献出版社

Social Sciences Academic Press(China)

图书在版编目(CIP)数据

现代经济理论中的凸分析/齐玲著. - 北京:社会科学文献出版社,2005.7

(河南大学经济学学术文库)

ISBN 7-80190-607-1

I. 现... II. 齐... III. 数学经济学-凸分析 IV. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第033271号

河南大学经济学学术文库

现代经济理论中的凸分析

著 者 / 齐 玲

出 版 人 / 谢寿光

出 版 者 / 社会科学文献出版社

地 址 / 北京市东城区先晓胡同10号

邮政编码 / 100005 网址 / <http://www.ssap.com.cn>

责任部门 / 财经与管理图书事业部 (010) 65286768

项目经理 / 邓泳红 (dengyonghong@vip.sohu.net)

责任编辑 / 张 征 (zhangzheng@cass.org.cn)

责任校对 / 邵鸣军

责任印制 / 同 非

总 经 销 / 社会科学文献出版社发行部

(010) 65139961 65139963

经 销 / 各地书店

读者服务 / 客户服务中心 (010) 65285539

法律顾问 / 北京建元律师事务所

排 版 / 北京中文天地文化艺术有限公司

印 刷 / 北京智力达印刷有限公司

开 本 / 889×1194 毫米 1/32 开

印 张 / 6.75 字数 / 120 千字

版 次 / 2005 年 7 月第 1 版

印 次 / 2005 年 7 月第 1 次印刷

书 号 / ISBN 7-80190-607-1/F·186

定 价 / 18.00 元

本书如有破损、缺页、装订错误,

请与本社客户服务中心联系更换



版权所有 翻印必究

总序

河南大学经济学科教学研究基地自 1927 年诞生以来，至今已有近 80 年的历史了。一代一代的经济学人在此耕耘、收获。中国共产党早期领导人之一罗章龙、著名经济学家关梦觉等都在此留下了他们的足迹。

中华人民共和国成立前夕，曾留学日本的著名老一辈《资本论》研究专家周守正教授从香港辗转来到河南大学，成为新中国河南大学经济学科发展的奠基人。1978 年中国恢复研究生培养制度以后，周先生率先在政治经济学专业招收培养硕士研究生，并于 1981 年首批获得该专业的硕士学位授予权。1979 年，我校成立了全国第一个专门的《资本论》研究室。1985 年以后，又组建了我校历史上的第一个经济研究所，恢复和组建了财经系、经济系、贸易系和改革与发展研究院，并在此基础上成立了经济学院。目前，学院已发展成为拥有经济学类全部 4 个本科专业、1 个博士生专业、8 个硕士生专业、两个省级重点学科点、2000 多名师生规模的教学研究机构。20 多年中，培养了大批本科生和研究生，并且为政府、企业和社

会培训了大批专门人才。他们分布在全国各地，服务于大学、企业、政府等机构，为国家的经济发展、社会进步、学术繁荣做出了或正在做出自己的贡献，其中也不乏造诣颇深的经济学家。

在培养和输出大量人才的同时，河南大学经济学科自身也造就了一支日益成熟的学术队伍。近年来，一批 50 岁左右的学者凭借其扎实的学术功底和丰厚的知识积累已进入著述的高峰期；一批 40 岁左右的学者以其良好的现代经济学素养开始脱颖而出，显现出引领学术潮流的志向和实力；更有一大批 30 岁左右受过系统经济学教育的年轻人正蓄势待发，不少已崭露头角，初步展现了河南大学经济学科的巨大潜力和光辉未来。

经过多年的探索，河南大学经济学科目前已经在理论和应用经济学两个领域内分别凝炼出三个特色鲜明的研究方向，一是以《资本论》研究为切入点，以马克思的经济理论和方法为工具，对中国经济改革过程中所遇到的各种问题进行阐释的马克思主义经济学研究；二是运用新制度经济学及发展经济学的理论和方法，对欠发达地区的各种经济和社会问题进行探索的制度变迁与经济发展研究；三是综合运用现代经济金融理论对中国的投资及金融体制、运作方式和资本市场进行研究的金融投资方向。

河南大学经济学科组织出版相关学术著作始于世纪交替之际，2000 年前后，时任经济学院院长许兴亚教授

(现河南大学特聘教授、中国《资本论》研究会副会长)曾主持编辑出版了数十本学术专著,在国内学术界产生了一定的影响,也对我院经济学科的发展起到了促进作用。

为了进一步展示我院经济学科各层次、各领域学者的研究成果,更是为了能够使这些成果与更多的读者见面,以便有机会得到读者尤其是同行专家的批评,促进河南大学经济学学术研究水平的不断提升,为繁荣和发展中国的经济学理论、推动中国的经济发展和社会进步做出更多的贡献,我们决定出版“河南大学经济学学术文库”。根据初步拟定的计划,该丛书将分年度连续出版,每年选择若干种河南大学经济学院在编教师的精品著述资助出版。根据需要,也可在丛书中选入少量客座教授或短期研究人员的相关著述。

感谢社会科学文献出版社总编辑邹东涛教授,是他对经济学学术事业满腔热情的支持和高效率的工作,使本套丛书的出版计划得以尽快达成并付诸实施。感谢社会科学文献出版社财经与管理图书事业部负责人周丽、邓泳红及各位编辑同志为本丛书的出版付出的辛劳。最后,还要感谢具体负责组织本丛书著作遴选和出版联络工作的河南大学经济学院主管科研工作的副院长刘东勋博士,他以严谨的科学精神和不辞劳苦的工作回报了同志们对他的信任。

分年度出版经济学学术文库系列丛书,对我们来说还

是第一次，如何公平和科学地选择著述品种，从而保证著述的质量，还需要在实践中进行探索。此外，由于选编机制的不完善和作者水平的限制，选入丛书的著述难免会存在这样那样的问题，恳请广大读者及同行专家批评指正。

耿明斋

2004 年 10 月 5 日

谨识

前 言

本书是一本数理经济学的专著，是由我的硕士论文和博士论文的一部分及我在博士期间发表的论文经过改写而组成的。前三章是最优化的基础，里面几乎所有的内容在后面几章都要用到，在这三章中解决了目标函数与限制集合为线性的最优化问题，目标函数为拟凹函数、限制条件为等式条件下的最优化问题，以及目标函数为凹函数、限制集合用非线性不等式表示的最优化问题。在这几章中我给出了自己的证明。

后四章中的结果是我对最优化问题所做的主要工作，主要解决了限制集合不能用函数来表示的最一般情况下的目标函数为多个的最优化问题，即在最一般限制条件下的帕累托最优化及字典排列最优化、多数表决最优化及锥形最优化的必要条件。第五章后半部分的严格局部帕累托最优的充分条件是我的一篇论文的节选，同一篇论文的另外的部分放在第四章与第五章的第一节中。第六章与第七章是我在一般均衡理论及均衡的静态分析中所做的工作，选自我的博士论文，除去一般均衡的存在性证明，仍属于最

优化的范畴。

本书的一个特点是紧密贯穿着最优化主题，从基础的凸集、凸锥到凹函数与拟凹函数，从相对简单的最优化问题到复杂的最优化问题；另一个特点是数学及其在经济学中的应用紧密结合，为此作者加入了很多在经济学中应用的例子。

此书也可以作为教材使用，既有利于经济学出身的人学习数学，又有利于数学出身的人学习经济学。为此，作者加入了第三章的内容，有利于知识的完整性。

被教委公派留学日本，使我有机会从数学转向数理经济学，最初引起我的兴趣的是最优化理论和一般均衡理论。在这里首先要感谢我硕士与博士期间的导师岩桥亮辅先生，他在学术研究上给了我不知多少指导和帮助，可惜他未能看到此书的问世，仅借此书表示对他的怀念。

感谢河南大学经济学院各位领导及同事对本书的大力支持和鼓励，特别是院长耿明斋教授的竭力帮助，感谢宋丙涛老师对本书整理和修改所做的大量工作，感谢我现在的导师、日本京都大学西村和雄教授对我的研究工作的大力支持，感谢日本名古屋大学多和田真教授对我的鼓励和帮助，感谢我的父亲和丈夫对本书的关注和对我的鼓励和支持，特别是我的儿子，我想以此书作为在他幼年离他而去海外留学的母亲留给他那么多寂寞的一点点补偿。

Abstract

This book deals with the optimization theory for economic analysis. It is based on the Master thesis, a part of Ph. D thesis, and some papers of the author. Since the results of the book are grounded on convex analysis and the other results of optimization theory, this book also presents a systematic exposition of the results that are used by author for proving the results.

The topics covered include convex sets, convex cones, separation theorems, extreme points, the structures of convex polyhedrons and polyhedral convex cones, concave functions and quasi-concave functions, envelope theorem, linear programming, non-linear programming, Lagrange method, Kuhn-Tucker theorem, Pareto optimality, and the existence of a general equilibrium with rate-of-return regulation and a comparative static analysis of the general equilibrium.

This book is also suitable as a text book for a graduate course in economic analysis. In addition, it should prove a useful reference work for a practicing economist.

目 录

第一章 凸集 / 1

第一节 阿凡因集合 / 2

第二节 凸集 / 8

第三节 凸集的分离定理 / 28

第四节 分离定理在经济学中的应用 / 34

第二章 凸锥 / 38

第一节 凸锥 / 39

第二节 共轭锥 / 41

第三节 关于凸锥的分离定理 / 44

第四节 端点 / 53

第五节 Gordan 定理 / 67

第六节 线性规划问题 / 72

第三章 凹函数与条件限制下的最优化理论 / 81

第一节 凹函数与拟凹函数 / 82

第二节 无限制条件下的最优化 / 104

第三节 拉格朗日乘数法（等式限制条件下的最优化） / 110

第四节 非线性规划（Kuhn-Tucker 条件） / 125

第四章 局部凸 / 134

第一节 切锥 / 134

第二节 局部凸 / 143

第五章 各种多目标最优化 / 155

第一节 帕累托最优化 / 155

第二节 字典与多数裁决最佳 / 160

第三节 严格局部帕累托最优的充分条件 / 164

第六章 收益率规制下的一般均衡的存在性 / 173

第一节 引言 / 173

第二节 模型 / 174

第三节 分析 / 178

第七章 收益率规制下的一般均衡的比较静态分析 / 190

第一节 引言 / 190

第二节 模型 / 190

第三节 比较静态分析 / 193

参考文献 / 199



Chapter 1 Convex Sets / 1

- 1. 1 Affine Sets / 2
- 1. 2 Convex Sets / 8
- 1. 3 Separation Theorems / 28
- 1. 4 Some Applications of the Separation Theorem in
Economic Analysis / 34

Chapter 2 Convex Cones / 38

- 2. 1 Convex Cones / 39
- 2. 2 Conjugate Cones / 41
- 2. 3 Separability for Convex Cones / 44
- 2. 4 Extreme Points / 53
- 2. 5 Gordan's Theorem / 67
- 2. 6 Linear Programming / 72

Chapter 3 Concave Functions and Constrained Optimization / 81

- 3. 1 Concave Functions and Quasi-concave
Functions / 82

2 ■ 现代经济理论中的凸分析

- 3. 2 Unconstrained Optimization / 104
- 3. 3 Optimization under Equality Constraints:
Lagrange Method / 110
- 3. 4 Non-linear Programming (Kuhn—Tucker
Conditions) / 125

Chapter 4 Local Tents / 134

- 4. 1 Tangent Cones / 134
- 4. 2 Local Tents / 143

Chapter 5 Various Multi-Objective Optimizations / 155

- 5. 1 Pareto Optimality / 155
- 5. 2 Lexicographic and Majority Optimilities / 160
- 5. 3 Sufficient Conditions for Strictly Local
Pareto Optimality / 164

Chapter 6 Existence of a General Equilibrium with Rate-of-Return Regulation / 173

- 6. 1 Introduction / 173
- 6. 2 The Model / 174
- 6. 3 The Analysis / 178

Chapter 7 A Comparative Static Analysis of a General Equilibrium with Rate-of-return Regulation / 190

- 7. 1 Introduction / 190
- 7. 2 The Model / 190
- 7. 3 The Comparative Static Analysis / 193

References / 199

第一章

凸 集

凸集是凸分析中最基本的概念。凸集在我们的日常生活中也很常见，比如，一维空间的线段、二维空间的圆盘、三维空间的立方体、球体，等等。微观经济学与宏观经济学的动态分析是建立在最优化理论基础上的，而最优化理论又是与凸集密切相关的，因此凸集的性质对于经济学理论可以说是不可缺少的基础。

我们在这一章中主要给出有关凸集的基本结果。第一节介绍阿凡因集合的定义及它与线性空间的关系；第二节给出关于凸集的结果，包括凸包的概念、凸集的相对内部的一些定理及凸集上的映射等等，还给出了凸分析理论中常用的单体的概念及有关结果；第三节给出了凸集的分离定理，先给出了点对凸集的分离，然后又给出了两个凸集之间的分离定理；第四节给出了分离定理在经济学中的一些应用。

第一节 阿凡因集合

在这一节中我们主要定义在学习凸分析中经常使用的一个类似于线性空间的集合。对于每一个这样的集合都有一个线性空间与它平行，与它平行的线性空间的维数就成为这个阿凡因集合的维数。

之所以定义这样的集合，是因为经济学的最优化分析中经常要遇到不包含原点在内的集合上的最优化问题，因而有定义阿凡因集合的必要。

在定义这样的集合之前，先定义范数与距离。

令 R 为全体实数的集合，定义 $R^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in R, i=1, \dots, n\}$ 。为了在 n 维实数向量空间上定义一个距离，使我们能计算点与点之间的距离，我们先在向量空间 R^n 上定义满足以下条件的函数，称为范数，并记为 $\| \cdot \|$ ：

- (1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, 当且仅当 $x=0$;
- (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, α 是实数;
- (3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

两个向量 $x \in R^n$, $y \in R^n$ 的内积定义为 (x, y)

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i。$$

具体地定义范数为 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 。

对于 $x, y \in R^n$, 定义 x 与 y 之间的距离为 $d(x, y) = \|x - y\|$ 。我们称 $(R^n, \|\cdot\|)$ 为赋范空间。在不混淆的前提下为了简便, 以下也把范数简记为 $|\cdot|$, 在这个赋范空间上, 我们可以讨论收敛性、闭集、开集等问题。以下设 $X \subseteq R^n$ 。

定义 1.1.1 设 M 是 X 的子集。若对任意 $x, y \in M$ 和 $\lambda \in R$, 都有 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$ 成立的话, 则称 M 为 X 的阿凡因集合。

注意: 在定义中 λ 不一定是正数。这与下一节凸集的定义中的 λ 不一样。

通过下面的定理给出阿凡因集合与 R^n 的线性子空间的关系。阿凡因集合不是一个线性空间, 因为它有可能不包括 0 向量, 但是它与线性空间密切相关。下面的定理证明了只要阿凡因集合中包含原点的话, 则一定是线性空间。

定理 1.1.1 M 是 X 的一个线性子空间当且仅当 M 是一个包含原点的阿凡因集合。

证明: 必要性: 每个线性子空间都包含 0 , 而且对于加法及数乘是闭的, 因此是一个阿凡因集合。

充分性: 设 M 是一个包含 0 的阿凡因集合。对每个 $x \in M, \lambda \in R$,

$$\lambda x = (1 - \lambda)0 + \lambda x \in M$$