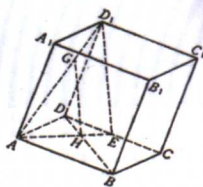


二〇〇四年日本最畅销的数学书

[日] 冈部恒治 著 王秋阳等 译

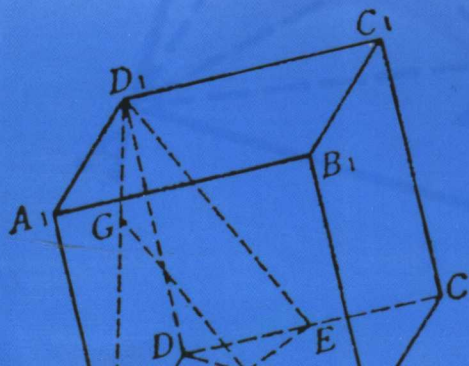
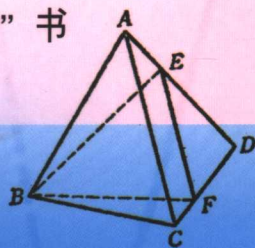
训练思考能力 的数学书



微微动动脑，就可以化繁为简。

一本帮助你抛开繁杂的计算和公式背诵，

从思考入手的“聪明式数学”书



训练思考能力 的数学书

[日] 冈部恒治 著
王秋阳等 译

兴界图书出版公司

上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

训练思考能力的数学书 / (日)冈部恒治著;王秋阳等译

—上海:上海世界图书出版公司,2005.2

ISBN 7-5062-7096-X

I. 训... II. ①冈... ②王... III. 数学—普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 121137 号

SUGU DEKIRU! KENKO NI NARU SHUKAN 100

Copyright © 2001 by SHUFU-TO-SEIKATSUSHA LTD.

All rights reserved

Original Japanese edition published by SHUFU-TO-SEIKATSUSHA LTD.

Chinese translation rights arranged with SHUFU-TO-SEIKATSUSHA LTD.

through Japan Foreign-Rights Centre

训练思考能力的数学书

[日]冈部恒治 著

王秋阳等 译

上海世界图书出版公司 出版发行

上海市尚文路 185 号 B 楼

邮政编码 200010

杭州钱江彩色印务有限公司印刷

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:0571-86603835)

各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:7.25 字数:180 000

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 6 月第 2 次印刷

印数:7 001-10 000

ISBN 7-5062-7096-X/O·28

(图字:09-2005-040 号)

定价:18.00 元

<http://www.wpcsh.com.cn>

序

——数学可加强我们的思考力

数学也要讲究基本功

在谈到算数和数学时,经常将“计算”与“思考”分开讨论,这是因为分开之后比较好处理。譬如,计算上的粗心出错与思考的错误是以不同形式出现的,因此对两者如果采取相同的对策并不能解决问题。

不过,计算和思考之间还是有相当密切的关系。它们有时互补长短,有时难分难解。例如在分数的计算上,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

是不正确的。为什么会出现这样的错误,不仅仅是缺乏计算能力,在思考能力上也是有问题的。对于做出这种计算的大学生,如果只是一派轻松地表示:“以是否背得出算式来判断大学生的学习能力,是有问题的。”那么情况可说是十分危急了。

我们原本就不应该轻视计算。因为计算可以判断理论的正确与否,有时甚至可以预测出理论本身。此外,计算也可借由理论而变得简单容易(本书中举了不少这方面的例子)。

若要扎实地建立起教育的基础“读·写·算数”,“思考”当然是无须赘言,甚至连前述教育白皮书草案中所轻视的“计算”与“背

诵”，以及为了确实达成这两个项目所要做的“反复练习”，都是相当重要的。

赫鲁晓夫曾经在看过毕加索的画作后，闹过一个笑话。他说：“这肯定是用马尾巴沾上颜料所画出来的。”毕加索无数素描累积的基础加上他自身的感性，才令他的画作达到抽象化的境界。不管是学问还是艺术，要达到成功都必须有一段辛苦难熬的体验基础性技巧的时期。



大学生之所以缺乏计算能力，正是因为他们觉得“基础练习很辛苦，应该省略”。在应该锻炼数学能力时期的浑浑噩噩，结果导致了计算能力的欠缺。不反省这点，还继续大幅缩减练习时间，还说“要让大学生的思想与创意如泉涌般源源不绝”，这就像“绘画教学应该减少素描时间，而教导如何用马尾巴涂抹颜料”一样荒谬。

其实，我一直很不擅长计算与背诵，到了现在情况还是没有改

善,听说有很多数学家也和我一样不擅于计算与背诵。世界级的数学家冈洁博士曾说过:“数学家虽有极少数是例外,不过大部分都是属于不会计算的。”

就因为不擅长计算,才会对能减少计算的方法感动不已;就因为不会背诵,才会因能减少背诵而着迷于数学的魅力。因此,就算不擅长计算也不可削减练习的时间,只要好好打稳计算的基础,即使计算速度不会变快,但至少可以避免“忘记怎样计算”这种悲剧。

所以我要特别强调,我自己也是透过这种痛苦的计算练习,获得了各式各样的数学感觉,并借以提高了思考能力。

延伸数学性的思考力

没有经过基础指导,一下就跳入作画阶段,只能算是游戏而已。另一方面,培养创作的灵感与美感也很重要。即使作画技巧不成熟也要多鉴赏,才能产生“好美的画!我也希望能画出这种画”的感受。

这对于一般的学习也是一样。光是拼命强调基础练习而看不到前景,是不会让人心生向往的。在数学的学习中,重要的是必须在基础练习之后,能够以简单明了的形式描绘出在练习中得到的数学感觉,在日常生活中能灵活运用数学思考能力。

这是个激烈变动的时代,我们必须具备应付变化状况的能力,那就是要有“准确观察事物”而且“洞察本质为何”的能力。这种能力也就是数学性的思考力。这种思考力可通过从初级阶段开始就进行的“抽象化”训练来培养。

这里所说的“抽象化”，可能会被误解为一种高深的能力。实际上在日本教育界，有些被称为“纯粹数学家”的人也正因为太重视抽象化，被人批评“在孩子们与数学之间建立起鸿沟”。这完全是一种误解。

例如，2 个苹果与 2 只昆虫是两种完全不同的东西。但是，2 个苹果再加上 1 个苹果，与 2 只昆虫再加上 1 只昆虫的算法相同，可以下列的算式来表示：

$$2 + 1 = 3$$



能以这种算式来表示，就已经算是一脚踏进抽象化的世界了。想想若为了计算某种东西的累积而把苹果、橘子、昆虫……各种东西都区别对待，这简直是一件毫无必要的事。这就是所谓“数量的加法”，它是能以同样方式来计算的一种方法，也是一种抽象化的思考。而计算练习就是为了稳固地建立起这种能力。

当然，抽象化并不是这么单纯的东西，它有许多不同阶段。但不管情况为何，在进行抽象时，都必须彻底思考本质到底是什么。

前面曾说过,在这变动的时代中必须具备洞察本质的数学性思考能力,而培养这种能力则正是数学的职责所在。为了能够达到目的,本书将讨论“何谓数学性的思考力”,并提出训练这种思考能力的具体方法。

前 言

——提升数学性的思考力

有一段时期，日本曾计划从印度引进一万名 IT (Information Technology, 信息技术) 技术人员，这消息曾在报纸版面上喧腾一时，因为当时日本正处于所谓的“就业冰河期”。如果有人认为“我是文科出身，引进 IT 技术人员跟我无关”，那就大错特错了，被这一万人所占去的日本国内 IT 就业机会，会轮流排挤其他领域的就业机会。

由于数学是电脑工作原理的基础，因此就有人误以为数学与 IT 技术相关。然而与多数人的想像正好相反，目前 IT 产业的软件开发，大多数跟数学是没有直接关系的。而在数学家之中，也存在很多像我这样的电脑白痴。

那么，为什么提到“从印度引进一万名 IT 技术人员”的事呢？实际上，IT 技术人员的培养仍与数学大有关系。还不仅限于此，要创造新事物，或提高面对新事物时的应对处理能力，也必须与数学扯上关系。

在日本教育课程审议会上，有委员提过这样的意见：“从前有很多人（对数学）抽象世界的美感非常憧憬，但我觉得现在这样的人好像减少了。”这也是引进 IT 技术人员问题的根源所在。正因如此，我们需要一种能让大家理解抽象世界美感的教育。

本书将借助抽象化，把看来似乎没有关联的事物连结在一起。

这些方法也可以成为思考其他领域问题时的灵感泉源。另外,重要的是要在抽象化的阶段学习“什么是问题,什么是必要的”,以及掌握事物的本质。数学是少数能够通过加强训练、建立逻辑来对应的学问之一。在现今这个时代,人们更需要具备能够洞察事物本质的数学性思考能力,而培养出这种能力正是数学的职责所在。

本书将透过高斯及阿基米德等伟大数学家的思考法,与日常生活中的小智慧相互辉映,借以探讨出数学的本质,并提高数学性的思考力。

我希望能够让更多的读者发现数学思考法的方便及美感。此外,我也希望高中生、大学生和一般社会人士能将这种思考方式活用于学习及生活、工作中。



Contents

1 天才少年高斯的算法	1
2 进入纸和笔的世界	6
3 “抽象化”后变简单了	18
4 何谓优异的数学感觉?	28
5 数学是思考的产物	39
6 问题抽出型与问题解决型,你是哪一型?	45
7 如何加强数学感觉?	49
8 数学式的动脑方式	52
9 先从简单的情况开始思考	58



Contents

10 遇到难题先动手	65
11 在头脑中就可以自由移动	69
12 以简单的模式来替换	85
13 找出多余的部分	93
14 “特异点”是重要的线索	108
15 有时只要大概就够了	113
16 找出关键人物	123
17 画画线,涂涂色	134
18 关于对称性	149



Contents

19 “重复”的规律性	166
20 尝试转动铅笔	171
21 从平均值来思考	178
22 伸缩自如	186
23 试着提高次元	193
24 数学是一种想像力	207

1 天才少年高斯的算法

1 到 100 的总和

首先,举一个有关计算能力与思考能力的例子来谈谈。

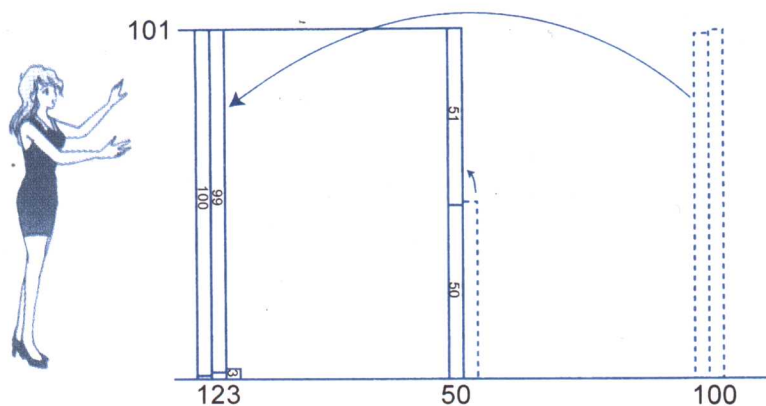
不同于序章中冈洁博士的说法,数学家高斯(Carl Fridrich Gauss)不论计算能力和思考能力都非常卓越。他7岁时,学校老师出了一道题目:“算出1到100的总和”,高斯一下子就说出了答案,而且还是正确答案。他是怎么算出来的呢?

高斯的想法是,“对于加法而言,即使顺序改变结果还是不变,所以将1加100、2加99、3加98……等配成组的话,一共有50组,各组的和均为101”,这么一来 $101 \times 50 = 5050$ 就是答案了。

这个想法可以列式如下:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 101 & & 101 \\ & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ 1+2+3+ & \cdots & +98+99+100 & & & & \\ & & & & 101 & & \end{array}$$

再以柱形图表示如下:



不知道高斯当时是否用这些方法引导自己去思考,但一般人如果要理解他的想法,以画图表的方式是最直观的了。

分数运算也变简单了

从以前到现在,“分数运算”都是个热门话题,这时又得请出高斯了。

高斯把分数化为小数计算(除法),速度比一般人快好几倍。如果只是比速度,高斯和珠算高手比赛谁会赢还很难讲,不过以高斯当时的年纪能想出这种神算方法是很惊人的。

他的方法是把到 200 止的质数 p 做成表, $\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \dots$ 表中的除法又意味着什么呢?

实际用笔算一下 $\frac{1}{7}$, 结果如下:

$$\begin{array}{r}
 0.142857142 \\
 7 \overline{) 1.0} \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 10 \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{} \\
 \vdots
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{从这里开始} \\
 \rightarrow
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 285 \\
 7 \overline{) 20} \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 \vdots
 \end{array}$$

请注意这个除式中商的部分(指 $0.142857142\cdots$)。

从商的小数第一位开始写:

$$142857142\cdots\cdots\textcircled{1}$$

再从小数第三位数字开始写,结果如下:

$$285714285\cdots\cdots\textcircled{2}$$

从以上的结论可获知将①的数字乘以2就等于②的数字。

接下来再写出商的小数第二位之后的数字:

$$428571428\cdots\cdots\textcircled{3}$$

其结果是①的3倍。

也许你觉得有点不可思议,这个原理只要看计算纸就知道了。上述②的头一个数字2是“由余数2加上0变成20之后演变而来的……”,换句话说, $\frac{2}{7}$ 的计算就是从这里开始的。同样地,③的数字就是计算 $\frac{3}{7}$ 一开始的数值。

反过来说,从 $0.142857142\cdots$ 开始, $\frac{n}{7} (1 < n < 7)$ 就可以简单得出。例如说 $\frac{5}{7}$, 0.14 的 5 倍是 0.7 , 由 7 这个数字开始寻找, 答案即是 $0.71428714\cdots$ 。

用这种方式可以将很多繁杂的分数计算成小数。例如:

$$\begin{aligned}\frac{16}{21} &= \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \\ &= 0.42857142\cdots + 0.33333333\cdots \\ &= 0.7619047\cdots\end{aligned}$$

笔算可促进脑力

来分析一下刚才的计算方式。

看不惯高斯花这么多时间在计算上的人, 劝他找个助手以减少自己计算的时间、多花些时间思考, 可是高斯拒绝了。他说: “我不认为从那些只会机械式计算的人那里, 可以得到什么帮助。” 因为高斯自己就是由计算中获知许多数学的规律、窍门。

虽然有人认为应该“减少计算的时间, 多花些时间思考”, 高斯却坚决反对这种说法。目前计算器的普及便是一个很好的例子。虽然计算器非常方便, 但如果从小学就开始使用, 可能就很难学到数字的概念, 比如会很难从刚才的除法中体会 $\frac{1}{7}$ 中涵盖了 $\frac{2}{7}$ 的构造形态。像这样的概念非得不怕麻烦地亲自用笔计算后, 才能真正理解。