苗文利　刘玉波　主编
刘风华　苟长义　　编
刘保泰　　　　　主审

线性代数与空间解析几何导学

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数与空间解析几何导学

苗文利　刘玉波　主编
刘凤华　苟长义　编
刘保泰　　　　　主审

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书对线性代数和空间解析几何这门学科的基本概念进行了系统总结和归纳，对典型例题作了较详细的分析、求解，并归纳总结了线性代数和空间解析几何中分析问题和处理问题的基本方法及常用解题技巧．所选例题力求新颖、独特、有代表性，以使读者举一反三、触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力．内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值与特征向量、相似矩阵、二次型、平面、直线、线性空间等．

本书可作为《线性代数与空间解析几何》课程的教学参考书，也可供报考硕士研究生的读者复习使用．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何导学 /苗文利，刘玉波主编．
—天津：天津大学出版社，2004．8
ISBN 7-5618-1861-0

Ⅰ．线… Ⅱ．①苗… ②刘… Ⅲ．①线性代数－高等学校－教学参考资料②空间几何：解析几何－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．①0151．2②0182．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 076704 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm × 260mm
印　　张 16.75
字　　数 429 千
版　　次 2004 年 8 月第 1 版
印　　次 2004 年 8 月第 1 次
印　　数 1－4 000
定　　价 23.00 元

前　言

本书作为《线性代数与空间解析几何》教材的配套辅导书，简而易懂、深浅相宜，适合不同层次读者的需求．书中选编了285道例题，着重讲述分析问题的方法及解题技巧．基础知识导学，叙述精练，将有关知识、方法和解题思路加以说明，以启迪读者思维和扩大读者知识面．因此，读者在阅读本辅导书时，一定要边看边总结，重点掌握线性代数与空间解析几何的思想方法、解题方法和技巧，这对学好线性代数与空间解析几何课程大有裨益．本书的每章后面都有一定数量的练习题，并配有相应的参考答案或提示，供读者检查学习效果之用．

本书以三维的几何空间为模型，去理解和发展一般 n 维线性空间的理论，思路清晰顺畅；理解了一般 n 维线性空间的理论后，将其用于几何空间，就如高屋建瓴，势如破竹．本书将线性代数与空间解析几何合理结合，在保持两部分完整存在的基础上，加强呼应、联系和渗透．

分析、代数、几何三者有机结合，特别是代数与几何相结合；有代表性的例题和习题丰富，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题和解决问题的能力，这些都是本书的特点．

本书也可作为硕士研究生入学考试的参考书．由于不同专业的读者对课程的要求不同，因此，本书的部分内容有的超出了一般专业的要求，凡属这些内容的章、节，读者可根据不同需求自行选择．

本书第1、7章及第6章的第6节、第8章的第6节由苟长义编写，第2、4章由刘凤华编写，第3、5章由苗文利编写，第6、8章的第1、2、3、4、5节由刘玉波编写，最后由刘保泰教授统稿．刘保泰教授、薛方津副教授分别审阅了本书的各部分内容并提出了许多宝贵意见，在此向他们表示感谢．

限于编者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

2004年6月15日

目　　录

第1章　n 阶行列式

本章从二元、三元线性方程组的解的形式给出二阶、三阶行列式的定义，通过分析二阶、三阶行列式的结构，将二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式．行列式是重要的数学工具，本章主要指导行列式的计算．

通过理解 n 阶行列式的定义，达到熟练掌握行列式的性质，并利用行列式的性质化简及计算行列式．能熟练掌握用按行（列）展开的方法计算行列式；会用 Cramer 法则求解线性方程组，及判断方程组的有解情况．

1.1　基础知识导学

1．全排列、逆序数、对换

1）排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列，简称排列．n 个不同元素的所有排列的种数为 $n!$ 种．

2）逆序数

若 $P_1P_2\cdots P_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，则在排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 中，把排在 P_i 前面且比 P_i 大的数的个数 t_i 称为 P_i 的逆序数．把这个排列中各数的逆序数之总和 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ 称为这个排列的逆序数，记为 $t(P_1P_2\cdots P_n)$．

3）排列的奇偶性

若排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 的逆序数 $t(P_1P_2\cdots P_n)$ 为奇数，则称 $P_1P_2\cdots P_n$ 为奇排列．

若排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 的逆序数 $t(P_1P_2\cdots P_n)$ 为偶数，则称 $P_1P_2\cdots P_n$ 为偶排列．

4）对换

在排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 中，将其中某两个元素的位置对调（其余元素不动），称为一个对换．两个相邻元素的对换称为相邻对换．

定理　一个排列中的任意两个数对换后，排列改变奇偶性．

推论　任意一个排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与 $P_1P_2\cdots P_n$ 有相同的奇偶性．

2．n 阶行列式

1）n 阶行列式的定义

设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}.$$

做表中位于不同行不同列的 n 个元素 $a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ 的乘积，并冠以符号 $(-1)^{t(P_1P_2\cdots P_n)}$ 而得到一项 $(-1)^{t(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$，这样的项共有 $n!$ 项，称这 $n!$ 项的代数和为 n 阶行列式．

记作
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(P_1P_2\cdots P_n)}a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}.$$

其中 $\sum$ 是对所有 n 阶排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 求和，或记 $D=\det(a_{ij})$．

2) *n 阶行列式的性质*

性质(1)　行列式与它的转置行列式相等．即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质(2)　互换行列式的两行(列)，行列式变号．

性质(3)　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式，或者行列式中某一行(列)的所有元素的公因子 k 可以提到行列式符号外面．即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质(4)　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式之和．即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

性质(5)　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去，行列式不变．

性质(6)　由上述性质还可得出行列式等于零的充分条件．

(1)若行列式 D 中有一行(或列)元素全为 0，则行列式 $D=0$．

(2)若行列式 D 中有两行(列)元素相同，则行列式 $D=0$．

(3)若行列式 D 中某两行(列)元素对应成比例，则 $D=0$．

3) *行列式按一行(或列)展开*

(1)余子式、代数余子式：把 n 阶行列式中的元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去，余下的元素按原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，且记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式．

(2)行列式按一行(列)展开性质:

(i)行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad i=1,2,\cdots,n,\text{或 } D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad j=1,2,\cdots,n.$$

(ii)行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j),\text{或}\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j).$$

(iii)综合(i)、(ii),有降阶公式

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D & i=j\\0 & i\neq j\end{cases},\text{其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}.$$

4)行列式按 k 行(列)展开

作为行列式按一行(列)展开的推广,可以把行列式按 k 行(列)展开,此推广不仅在理论推导上有用,而且用它来展开行列式时,往往可以大大减少运算过程.

(1)k 阶子式及其代数余子式:

在 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$),位于这些行和列的交叉点上的 k^2 个元素按原来的次序组成一个 k 阶行列式 M,称为行列式 D 的一个 k 阶子式.当 $1\leqslant k<n$ 时,划去 k 行 k 列后剩余的元素按原来的位置组成一个 $n-k$ 阶行列式 M',称为 M 的余子式.

如果 n 阶行列式 D 的 k 阶子式 M 位于 D 中所在的行、列数依次为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M'$ 为 M 的代数余子式.

(2)n 阶行列式按 k 行(列)展开:

拉普拉斯定理 在 n 阶行列式中,任意取定 $k(1\leqslant k<n)$ 行(列),这行列式的值等于由这 k 行(列)的元素所组成的一切 k 阶子式与它对应的代数余子式的乘积之和.

拉普拉斯定理在 $k=1$ 时,就是 n 阶行列式按一行(列)展开.如

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&2&3&0\\0&0&1&2&3\\0&0&0&1&2\end{vmatrix},$$

按第1、第2两行展开,于是

$$D_5=(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&3&0\\1&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&3&0\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}2&0\\2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&3&0\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}=0+(-1)\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&3&0\\0&2&3\\0&1&2\end{vmatrix}+0=-3.$$

5)Cramer 法则

设含有 n 个未知数的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\quad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad①$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,线性方程组①称为非齐次方程组,当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,线性方程组①称为齐次方程组.

(1)**Cramer 法则** 若线性方程组①的系数行列式不等于零,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则线性方程组①有惟一解,且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n)$.其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列元素用方程组①右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(2)Cramer 法则的逆否定理 若线性方程组①无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零,即 $D=0$.

(3)**推论** 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad ②$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则该齐次线性方程组只有零解.

其逆否命题为:若齐次线性方程组②有非零解,则它的系数行列式必为零,即 $D=0$.

6)一些常见的行列式(以下未标明的元素均为零)

(1)对角行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_{n-1} & & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2)上三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角形行列式:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3)范德蒙行列式：

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

(4)特殊分块三角行列式：

(i)
$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}.$$

(ii)
$$\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}.$$

1.2 重点与难点

行列式知识结构表：

- 行列式
  - 排列的概念
    - 排列及逆序数
    - 排列的奇偶性
  - n 阶行列式的定义
    - 行列式定义的两种表达方式
    - 简单行列式直接由定义计算的方法
    - 2 阶、3 阶行列式的计算公式
  - 行列式的性质
    - 行列式的六个基本性质及其计算方法
    - 行列式化为三角形行列式的计算方法
  - 行列式的展开
    - 余子式和代数余子式的概念
    - 行列式按一行(列)的展开公式 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}D & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$
  - 行列式的计算
    - ①定义法　②三角形法　③拆行(列)法　④升阶法
    - ⑤降阶法　⑥递推法　⑦数学归纳法　⑧范德蒙行列式法
  - Cramer 法则
    - 求非齐次线性方程组的解
    - 齐次线性方程组有非零解的判断

学习本章时还须注意以下几个问题.

(1)在行列式中，元素 a_{ij} 的第 1 个下标是行标，第 2 个下标是列标，表示行列式中第 i 行第 j 列的元素.下标“ij”仅仅是一种记号，不能一概而论，认定“i”就是行标，“j”就是列标.例如，

a_{ji}表示第j行、第i列的元素.

要掌握行列式的定义,必须抓住3个特点,即:①由于n级排列的总数是$n!$个,故展开式中共有$n!$项;②每项必须是取自不同行不同列的n个元素的乘积;③每项前的符号取决于n个元素,当行标按自然顺序排好后,列标所组成排列的奇偶性.

(2)在n阶行列式中,元素a_{ij}的余子式M_{ij}与a_{ij}的数值及所处的位置关系.

在n阶行列式中,元素a_{ij}位于第i行与第j列的相交处,a_{ij}的余子式是去掉第i行以及第j列上所有元素以后得到的$n-1$阶行列式.a_{ij}的余子式M_{ij}只与a_{ij}所处的位置有关,与a_{ij}的大小无关.利用这一性质,可以进行余子式和代数余子式的一些运算.

(3)在行列式的六条性质中,经常用到的主要有性质(2)、性质(3)、性质(5),正确掌握和灵活应用这几条性质,可以简化行列式的计算.

性质(2)的主要应用是调整行列式的结构,使行列式的计算避免分数和小数运算,以利于性质(5)的应用,从而使行列式逐步转化为三角形行列式.在应用性质(2)时,要注意互换两行(列)后,行列式要改变符号.

性质(3)的具体应用主要是:①改变行列式中某行(列)所有元素的符号,即用-1乘以行列式中某行(列)的所有元素,同时用-1乘以行列式;②化分数(或小数)为整数,即当行列式中某行(列)的许多元素为分数(或)小数而不利于计算时,可用一个适当的数k乘以这一行(列)的所有元素使之都化为整数,同时在行列式符号外面乘上$1/k$;③可以减少位数,即当某一行(列)中的元素都是位数较多的数时,可找出这些元素的公因子,提到行列式的外面,从而使该行(列)的元素数值变小.

性质(5)的主要应用是简化行列式,即让行列式中尽可能多的元素化为零,使之成为三角形行列式或较简单的行列式.在应用性质(5)时经常会出现这样的错误:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & \cdots & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{要注意避免.}$$

本章的难点是行列式的计算.行列式的计算有许多技巧,计算方法很多,但具体到一个n阶行列式,要针对其特征,选取适当的方法求解.

1.3 典型例题分析

1.全排列、逆序数、对换

例1.1 选择i与j,使$1i25j4897$是奇排列.

解 i与j只可能是3,6或6,3.

对应的排列分别是132564897和162534897而逆序数分别是

$$0+0+1+0+0+2+0+0+2=5,$$

$$0+0+1+1+2+2+0+0+2=8,$$

i 与 j 分别为 3 和 6,此时所求排列是 132564897.

例 1.2 求下列排列的逆序数,并决定其奇偶性:

(1)1347265; (2)$n(n-1)\cdots 21$.

解 (1)$t(1347265)=0+0+0+0+3+1+2=6$,故 1347265 是偶排列.

(2)$t(n(n-1)\cdots 21)=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数,排列为奇排列.

例 1.3 求排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$的逆序数.

解 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

元素 P	3	5	7	$\cdots$	$2n-1$
与 P 构成的逆序的个数	1	2	3	$\cdots$	$n-1$

故排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$的逆序数为

$$t=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.4 设排列 $P_1P_2\cdots P_n$ 的逆序数为 t,求排列 $P_nP_{n-1}\cdots P_1$ 的逆序数.

解 设 P_i 前有 t_i 个数比它大,即 P_i 的逆序数为 t_i,则 $t=t(P_1P_2\cdots P_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+t_n$.

对 P_i 来说,前面有 t_i 个数比它大,则它前面就有$[(i-1)-t_i]$个数比它小.而在排列 $P_nP_{n-1}\cdots P_1$ 中,P_i 后面有$[(i-1)-t_i]$个数比它小,构成$[(i-1)-t_i]$个逆序.

从而$t(P_nP_{n-1}\cdots P_1)=[(n-1)-t_n]+[(n-2)-t_{n-1}]+\cdots+[1-t_2]+[0-t_1]$

$$=[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]-[t_n+t_{n-1}+\cdots+t_1]=\frac{n(n-1)}{2}-t.$$

2.行列式的计算

行列式的计算是本章的难点和重点.计算行列式的方法有很多,下面介绍几种常用的方法.为了使行列式的运算更清楚和简明,使用以下记号:

用 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$表示交换行列式的第 i,j 两行(列);

用 $r_i\times k(c_i\times k)$表示行列式的第 i 行(列)乘以 k;

用 $r_i\div k(c_i\div k)$表示行列式第 i 行(列)提出公因子 k;

用 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$表示以数 k 乘行列式的第 i 行(列)加到第 j 行(列)上;

用 $r_1+r_2+\cdots+r_n$(或 $c_1+c_2+\cdots+c_n$)表示从第 2 行(列)到第 n 行(列)分别加到第 1 行(列)上.

注 符号 r_j+kr_i 和 r_i+kr_j 是有区别的.

1)定义法

定义法就是利用行列式定义直接求解,这是计算行列式常用的方法.

例 1.5 写出 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{32}$ 的项.

解 由定义,4 阶行列式的一般项为 $(-1)^t a_{1P_1}a_{2P_2}a_{3P_3}a_{4P_4}$,其中 t 为 $P_1P_2P_3P_4$ 的逆序数.

由于 $P_1=1,P_3=2$ 已固定,$P_1P_2P_3P_4$ 只能形如 1□2□,即 1324 或 1423,对应的 t 分别为 $0+0+1+0=1$ 或 $0+0+1+1=2$.所以 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ 即为所求.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 此行列式中每一行及每一列只有一个非零元素,由 n 阶行列式定义知,D_n 中只含一项 $a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$,此项行标排列是标准排列,而列标排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n$,这个排列的逆序数 $t=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.故 $D=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$.

注 对于含零元素较多的行列式,可直接用定义计算.n 阶行列式共有 $n!$ 项,若某一项 n 个元素的乘积中有零因子,则该项为零.若行列式中零元素较多,则为零的项就较多,故只须找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

例 1.7 在一个 n 阶行列式 D 中等于零的元素如果比 (n^2-n) 还多,问 D 的值等于几?

解 $D=0$.

因为 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素,等于零的元素如果比 (n^2-n) 还多,那么其中不等于零的元素比 $n^2-(n^2-n)$ 还少,即在 n 阶行列式中不等于零的元素最多有 $(n-1)$ 个,而 D 的每一项都是 n 个元素的乘积,且这 n 个元素取自于行列式的不同行与不同列.所以这个行列式的每一项的 n 个元素中至少有一个元素为零,即每一项都为零,从而得到 n 阶行列式 $D=0$.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x+2 & x+7 & 5 & 6 \\ 6 & 2x+1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4x+3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 5x+2 \end{vmatrix}$,求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式定义知,行列式中含 x^4 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 之中,又包含 x^3 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 之中,又 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 的系数为 -1,故 x^4 的系数为 $3\times2\times4\times5=120$.而 x^3 的系数为 $3\times2\times4\times2+3\times2\times5\times3+3\times4\times5\times1+2\times4\times5\times2-6\times1\times4\times5=158$.

注 此例并不要求计算行列式的值,只求具有某些性质的项,这时显然用定义法比较方便.

例 1.9 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$,求$f'(x)$.

解 根据行列式的定义

$$f(x)=\sum(-1)^{t(P_1P_2P_3)}a_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)a_{3P_3}(x),$$

其中$\sum$表示对所有3阶排列求和.

$$f'(x)=\sum(-1)^{t(P_1P_2P_3)}a'_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)a_{3P_3}(x)+\sum(-1)^{t(P_1P_2P_3)}a_{1P_1}(x)a'_{2P_2}(x)a_{3P_3}(x)$$
$$+\sum(-1)^{t(P_1P_2P_3)}a_{1P_1}(x)a_{2P_2}(x)a'_{3P_3}(x),$$

因此 $$f'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

注 此例是对一般形式的行列式推导出它们的某些特殊运算(再如求行列式的共轭复数),这时行列式的性质用不上,但可以根据行列式的定义直接推导.

2)三角形法

利用行列式性质把行列式化为上(或下)三角形行列式,此时该行列式的值为主对角线元素的乘积.三角形法是行列式计算中非常重要而且常用的方法,很多行列式都可以用这一方法计算.但是,当行列式阶数较大的时候,计算量较大.

例 1.10 计算行列式 $D_3=\begin{vmatrix} 101 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 300 & 300 & 601 \end{vmatrix}$.

解 $$D_3\xlongequal[c_3-2c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix} 1 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 0 & 300 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\div 100}100\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{r_3-r_2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=600.$$

注 对于数字行列式化为上(或下)三角形计算行列式时,应使 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n-1)$位置元素调整为1,这样可避免分数计算,否则将给后面的计算增加困难.该解法适合编程上机计算.

例 1.11 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 $D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1\div[x+(n-1)a]}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ \vdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

例 1.12 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},\text{其中 } a_i\neq 0(i=0,1,2,\cdots,n).$$

解 $D_{n+1}\xlongequal[\substack{c_3\div a_2 \\ \vdots \\ c_{n+1}\div a_n}]{c_2\div a_1} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\substack{c_1-c_3 \\ \vdots \\ c_1-c_{n+1}}]{c_1-c_2} a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

例 1.13 计算 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$

解 本题可以利用特殊分块三角形行列式使计算行列式更加简便.

$$D_4\xlongequal[r_4-r_3]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b-a & a-b & d-c & c-d \\ c & d & a & b \\ d-c & c-d & b-a & a-b \end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_4]{c_1+c_2}\begin{vmatrix} a+b & b & c+d & d \\ 0 & a-b & 0 & c-d \\ c+d & d & a+b & b \\ 0 & c-d & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}a+b&c+d&b&d\\0&0&a-b&c-d\\c+d&a+b&d&b\\0&0&c-d&a-b\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}a+b&c+d&b&d\\c+d&a+b&d&b\\0&0&a-b&c-d\\0&0&c-d&a-b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a+b&c+d\\c+d&a+b\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a-b&c-d\\c-d&a-b\end{vmatrix}=[(a+b)^2-(c+d)^2][(a-b)^2-(c-d)^2]$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

例 1.14 设$f(x)=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1+x+1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\1&a_1&a_2+x+2&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}+x+n-1\end{vmatrix}$,

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$是互不相同的实数,求 $f(x)$的根.

解 $f(x)\xlongequal[\substack{c_3-a_2c_1\\\vdots\\c_n-a_{n-1}c_1}]{c_2-a_1c_1}\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&x+1&0&\cdots&0\\1&0&x+2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&x+n-1\end{vmatrix}=(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$

故 $f(x)$的根为 $-1,-2,\cdots,(n-1)$.

3)降阶法

利用行列式按某一行(或列)展开,从而降低行列式的阶数,再计算行列式之值的方法称为降阶法,或者亦称为按某一行(列)展开法.

例 1.15 设 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&-3&6\\1&1&1&1\\2&1&0&7\\3&4&1&8\end{vmatrix}$,

求:$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$,其中 A_{ij}是 D 中元素 a_{ij}的代数余子式.

解 因为对于任意一个 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$都有 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$,所以对于 4 阶行列式必有 $a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0$.

又由于上面这个 4 阶行列式中 $a_{21}=a_{22}=a_{23}=a_{24}=1$,于是得到 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$.

例 1.16 已知 5 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$.

试求:(1)$A_{31}+A_{32}+A_{33}$; (2)$A_{34}+A_{35}$.

解 因为 $a_{i1}A_{31}+a_{i2}A_{32}+a_{i3}A_{33}+a_{i4}A_{34}+a_{i5}A_{35}=0$,其中 $i\neq3,i=1,2,4,5$,所以对于 $i=2,4$,必有 $\begin{cases}a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}+a_{24}A_{34}+a_{25}A_{35}=0\\a_{41}A_{31}+a_{42}A_{32}+a_{43}A_{33}+a_{44}A_{34}+a_{45}A_{35}=0\end{cases}$.