

内容提要
释疑解惑
范例解析
习题选解

数学分析

学习指导书

下册

吴良森 毛羽辉 韩士安 吴畏 编著



高等教育出版社

数学分析

学习指导书

下 册

吴良森 毛羽辉
韩士安 吴 畏 编著

高等教育出版社

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第三版,下册)配套的学习指导书,主要是作为学习本课程的课后复习和提高之用。本书按节编写,每节包含:内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解,每章后附有总练习题提示、解答(解答部分约占50%)及测试题。本书切合实际,注意提高学生对于数学分析基本概念、基本定理、基本计算技巧的理解和应用,可供师范或其他类型院校数学专业学生使用,对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习指导书.下册/吴良森等编著.——北京:
高等教育出版社,2004.9
ISBN 7-04-014364-X

I.数... II.吴... III.数学分析—高等学校—教
学参考资料 IV.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第086185号

策划编辑 李蕊 责任编辑 舒敬江 封面设计 于文燕 责任绘图 宗小梅
版式设计 王艳红 责任校对 康晓燕 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	河北省财政厅印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004年9月第1版
印 张	34	印 次	2004年9月第1次印刷
字 数	640 000	定 价	38.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号:14364-00

目 录

第十二章 数项级数	1
§ 1 级数的收敛性	1
§ 2 正项级数	11
§ 3 一般项级数	28
总练习题提示与解答	40
第十二章测试题(A,B)	42
第十三章 函数列与函数项级数	45
§ 1 一致收敛性	45
§ 2 一致收敛函数列与函数项级数的性质	59
总练习题提示与解答	70
第十三章测试题(A,B)	73
第十四章 幂级数	76
§ 1 幂级数与幂级数的性质	76
§ 2 函数的幂级数展开	90
总练习题提示与解答	101
第十四章测试题(A,B)	103
第十五章 傅里叶级数	105
§ 1 傅里叶级数与周期函数的傅里叶展开	105
§ 2 收敛定理的证明	120
总练习题提示与解答	129
第十五章测试题(A,B)	132
第十六章 多元函数的极限与连续	134
§ 1 平面点集与多元函数	134
§ 2 二元函数的极限	147
§ 3 二元函数的连续性	155
总练习题提示与解答	165
第十六章测试题(A,B)	166
第十七章 多元函数微分学	168
§ 1 可微性与偏导数	168

§ 2 复合函数微分法与方向导数	181
§ 3 泰勒公式与极值问题	197
总练习题提示与解答	214
第十七章测试题(A,B)	218
第十八章 隐函数定理及其应用	220
§ 1 隐函数与隐函数定理	220
§ 2 隐函数组与隐函数组定理	230
§ 3 几何应用	245
§ 4 条件极值	255
总练习题提示与解答	266
第十八章测试题(A,B)	271
第十九章 含参量积分	273
§ 1 含参量正常积分	273
§ 2 含参量反常积分	282
§ 3 欧拉积分	296
总练习题提示与解答	305
第十九章测试题(A,B)	308
第二十章 曲线积分	311
§ 1 第一型曲线积分	311
§ 2 第二型曲线积分	318
总练习题提示与解答	326
第二十章测试题(A,B)	328
第二十一章 重积分	331
§ 1 二重积分概念	331
§ 2 直角坐标系下二重积分的计算	336
§ 3 格林公式·曲线积分与路线的无关性	346
§ 4 二重积分的变量变换	355
§ 5 三重积分	362
§ 6 重积分的应用	373
§ 7 n 重积分	383
§ 8 反常二重积分	390
总练习题提示与解答	398
第二十一章测试题(A,B)	402
第二十二章 曲面积分	405

§ 1 第一型曲面积分	405
§ 2 第二型曲面积分	418
§ 3 高斯公式与斯托克斯公式	429
§ 4 场论初步	439
总练习题提示与解答	445
第二十二章测试题(A,B)	449
第二十三章 流形上微积分学初阶	451
§ 1 n 维欧氏空间与向量函数	451
§ 2 向量函数的微分	457
§ 3 反函数定理和隐函数定理	466
§ 4 外积、微分形式与一般斯托克斯公式	473
总练习题提示与解答	478
第二十三章测试题(A,B)	481
测试题提示与解答	484
附录:硕士研究生入学试题选编(附解答)	516

第十二章 数项级数

§ 1 级数的收敛性

一 内容提要

1° 设 $\{u_n\}$ 是一个数列, 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1.1)$$

的表达式称为一个数项级数或无穷级数(简称级数), 其中 u_n 称为级数的通项.

级数的基本问题是:(1) 讨论级数(1.1)的收敛性;(2) 在级数(1.1)收敛时求级数的和.

2° 无论是讨论级数的收敛性还是求级数的和, 其最初的出发点都是考察由级数(1.1)的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

所组成的数列 $\{S_n\}$. 如果 $\{S_n\}$ 收敛于 S , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

则称级数(1.1)收敛, 并称 S 为级数(1.1)的和, 记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

否则, 称级数(1.1)发散.

3° 级数收敛的柯西准则

级数(1.1)收敛的充分必要条件是: 对任意给定的正数 ϵ , 总存在正整数 N , 使得当 $m > N$ 及对任意的正整数 p , 都有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}| < \epsilon.$$

上述柯西准则的条件又可改写为: 对任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 N , 使得当 $n > m > N$ 时, 有

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \epsilon.$$

4° 级数(1.1)发散的充分必要条件是: 存在正数 ϵ_0 , 使对任意给定的正整数 N , 总存在正整数 $m_0 > N$ 及 p_0 , 使

$$|u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0}| \geq \varepsilon_0.$$

5° 等比级数

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

当 $|q| \geq 1$ 时发散; 当 $|q| < 1$ 时收敛, 其和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

6° 级数的性质:

(1) 去掉、增加或改变级数的有限个项, 不会影响级数的敛散性(只影响级数的和).

(2) 在收敛级数的项中任意加括号, 既不改变级数的收敛性, 也不改变级数的和.

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则对任意常数 a, b , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

这称为收敛级数的线性性质.

7° 级数

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

称为级数(1.1)的第 n 个余项. 级数(1.1)收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

8° 级数(1.1)收敛的必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

我们常用 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ 来判别级数(1.1)发散.

释疑解惑

问题 1 有人说, 既然一个级数是无限多个数“相加”的结果, 而数的加法满足交换律和结合律, 所以在一个级数中, 可以任意交换项的次序, 也可以任意加括号. 这种说法对吗?

答 不对. 一个收敛级数, 适当改变项的次序以后, 可能得到一个发散级数; 即使得到的仍为收敛级数, 其和也可能与原级数的和不同(参见教材下册 p. 20 的例). 这就是无限项相加与有限项相加的质的不同. 当然, 如果仅仅交换一个级数的有限项的次序, 则级数的敛散性不变. 在后两节中将看到, 如果一个级数是

正项级数或是绝对收敛的级数,则可以任意改变一个级数的项的次序,其收敛性不变,且和也不变.

类似地,一个收敛级数可以任意加括号,加括号后的级数与原来的级数有相同的收敛性与相同的和;但一个发散级数,经适当添加无限个括号后,可能变成一个收敛级数(参见教材下册 p.5 上的例).有一种特殊情形,如果添加括号后,每个括号中的项都保持同一正、负号,则所得级数与原级数同敛散,且和(如有的话)也不变(参见本节习题之 10).

问题 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 的敛散性之间有何联系?

答 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n;$$

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中一个收敛,一个发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 必发散.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 可能收敛,也可能发散.例

如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$$

都发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 收敛 (其部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$).

问题 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是发散级数,讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{v_n}$ ($v_n \neq 0$)

0) 是否必定收敛或必定发散?

答 无肯定结论.例如对于发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} 2^n, \sum_{n=1}^{\infty} 3^n,$$

有下列不同情形:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ (收敛); } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \text{ (发散);}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \text{ (收敛); } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \text{ (发散).}$$

问题 4 据理回答以下问题:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$?

(2) 若对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项加括号后所得级数发散, 则原级数是否也发散?

答 (1) 否. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但仍有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(2) 是. 因若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对它任意加括号后所得级数必收敛, 这与已知条件矛盾.

三 范例解析

例 1 按收敛级数的定义, 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (1.2)$$

当 $p > 1$ 时收敛, 当 $0 < p \leq 1$ 时发散.

证 考察级数(1.2)的部分和数列

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n = 1, 2, \cdots$$

的收敛性. 由于级数(1.2)的各项为正, 因此 $\{S_n\}$ 是递增数列, 下面分别讨论 $\{S_n\}$ 是否有上界.

(1) 当 $p \neq 1$ 时, 由微分中值定理得

$$\frac{1}{1-p} [n^{1-p} - (n+1)^{1-p}] = -\frac{1}{\xi^p}, \xi \in (n, n+1). \quad (1.3)$$

当 $p > 1$ 时, 由(1.3)式得

$$\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{\xi^p} = \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right], n = 1, 2, \cdots;$$

于是

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \\ &< 1 + \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) + \frac{1}{p-1} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} \right) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right] \\ &= 1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} \\ &< 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

由单调有界定理知 $\{S_n\}$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛.

当 $0 < p < 1$ 时, 由(1.3)式又得

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{\xi^p} = \frac{1}{1-p} [(n+1)^{1-p} - n^{1-p}], n = 1, 2, \dots;$$

于是

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \\ &> \frac{1}{1-p} (2^{1-p} - 1) + \frac{1}{1-p} (3^{1-p} - 2^{1-p}) + \dots + \frac{1}{1-p} [(n+1)^{1-p} - n^{1-p}] \\ &= \frac{1}{1-p} [(n+1)^{1-p} - 1] \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$$

由此得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $0 < p < 1$ 时发散.

(2) 当 $p = 1$ 时, (1.3) 为发散的调和级数 (参见教材下册 p. 3 上的例 3), 这里介绍另一种证明方法. 这可由

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

出发, 得到

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ &> \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln(n+1) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p = 1$ 时发散. □

注 应用级数收敛的定义来判别级数的敛散性, 关键就在于讨论 $\{S_n\}$ 的敛散性. 通常要把 S_n 表示为比较简略的形式, 或者通过适当放大或缩小, 得到 S_n 的估计式, 以便于讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 的存在性.

例 2 试用柯西收敛准则证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \tag{1.4}$$

收敛.

证 由于对任意的 $n > m > 1$, 有

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2} + \frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2} \right| \\
& \leq \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
& < \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
& = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
& = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m},
\end{aligned}$$

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > m > N$ 时, 满足

$$\left| \frac{\sin(m+1)}{(m+1)^2} + \frac{\sin(m+2)}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2} \right| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

故由柯西收敛准则推知级数(1.4)收敛. \square

例 3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

分析 为了应用柯西收敛准则证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散, 根据“内容提要”之 5°, 需要找到某 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall N > 0, \exists m_0 > N$ 及 p_0 , 满足

$$\left| \frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}} + \cdots + \frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}} \right| \geq \varepsilon_0. \quad (1.5)$$

为此, 我们将(1.5)式左边适当缩小, 化为

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}} + \cdots + \frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}} \right| &= \frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}} + \cdots + \frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}} \\
&\geq \frac{a_{m_0+1} + \cdots + a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}} \\
&= \frac{S_{m_0+p_0} - S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}} \\
&= 1 - \frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}}. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

由此可见, 只要取合适的 p_0 , 使 $\frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}} < \frac{1}{2}$, 则可得 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

证 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \forall N > 0, \exists m_0 = N + 1 > N$, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $a_n > 0$, 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} S = +\infty$, 由此可知 $\exists p_0 > 0$, 使

$$S_{m_0 + p_0} > 2S_{m_0}.$$

于是由以上(1.6)式, 得到

$$\left| \frac{a_{m_0+1}}{S_{m_0+1}} + \cdots + \frac{a_{m_0+p_0}}{S_{m_0+p_0}} \right| \geq 1 - \frac{S_{m_0}}{S_{m_0+p_0}} > \frac{1}{2} = \epsilon_0.$$

从而由柯西收敛准则证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散. □

例 4 试求下列级数的和 S :

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n};$$

$$(3) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots.$$

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n^2 + n - 2} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 + k - 2} = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

由此求得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}.$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{2n-3}{3^{n-1}} + \frac{2n-1}{3^n}, \\ \frac{1}{3} S_n &= \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{2n-3}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

两式相减后又得

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} S_n &= S_n - \frac{1}{3} S_n \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}, \end{aligned}$$

所以有

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}} \right) = 1.$$

(3) 对此级数的部分和作如下处理:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\ &= \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

而

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

于是求得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

注 级数求和的问题,一般来说是一个比较困难的问题,没有一定之规可循.我们在上面介绍了三种方法:(1)拆项法;(2)变形法;(3)逐项积分法.这些方法的共同使命都是为了把 S_n 化为有限形式(原来的 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 随 n 无限增大而为一无限形式),以便求出 S_n 的极限.

以后,我们还可以借助幂级数(第十四章)和傅里叶级数(第十五章)去求级数的和.此外,应用数学软件的符号求和程序,也能求出级数和.下面是用 MATLAB 求本例三个级数和的程序与结果:

```
syms n
S1 = symsum(1/(n^2 + n - 2), 2, inf)
S2 = symsum((2 * n - 1)/3^n, 1, inf)
S3 = symsum((-1)^(n-1)/(2 * n - 1), 1, inf)
```

$$S1 = 11/18$$

$$S2 = 1$$

$$S3 = 1/4 * \pi$$

四、习题选解(教材下册 p. 5)

1. 证明下列级数的收敛性, 并求和:

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.$$

解 令 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$, 则

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{2^k} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

于是

$$S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3,$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3.$$

级数的和存在, 则显然级数收敛.

5. 证明: 若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 发散;

(2) 当 $b_n \neq 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

证 (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1,$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_1) = \infty,$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 发散.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$ 的部分和

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}}.$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \frac{1}{b_1}$.

9. 举例说明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = 0,$$

此级数仍可能不收敛.

解 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 已知此级数发散, 但对每个固定的 p ,

$$u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1}.$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0,$$

从而也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right) = 0.$$

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足: 加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_k+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$$

收敛 ($n_1 = 0$), 且在同一括号内的加数 $u_{n_k+1}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 符号相同 (注: 对不同的括

号, 这个符号可以是不同的). 试证原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 亦收敛.

证 分别记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 加括号后的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_{k+1}})$$

的部分和为 T_k , 则

$$\begin{aligned} T_k &= \sum_{i=1}^k v_i = \sum_{i=1}^k (u_{n_{i-1}+1} + \cdots + u_{n_{i+1}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_{k+1}} u_j = S_{n_{k+1}}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 中同一括号内的所有加数有相同的符号, 因此当 $n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}$ 时, S_n 将单调地变化, 因而

$$\begin{aligned} T_{k-1} = S_{n_k} &\leq S_n \leq S_{n_{k+1}} = T_k \\ &(\text{或 } T_k \leq S_n \leq T_{k-1}). \end{aligned}$$

又因 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 则存在极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 随之有 $n \rightarrow \infty$ (反之亦然), 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = T.$$

这就证得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且与 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 有相同的和.

§2 正项级数

一、内容提要

1° 各项符号相同的级数称为同项级数; 各项都是正数的级数称为正项级数; 各项都是负数的级数称为负项级数. 负项级数可以转化为正项级数来处理.

2° 正项级数收敛的充分必要条件是: 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 即存在正数 M , 使对一切正整数 n , 有

$$S_n \leq M.$$

3° 比较原则 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 如果存在某正数 N , 使对一切 $n > N$, 有

$$u_n \leq v_n,$$