考研数学真题与典型题详解系列

线性代数

（经济类）

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

线性代数 解 经济类

汇总众多高校考研专业课真题，并进行详细解答！

精选名校题库、讲义和笔记，汇集专业典型试题！

题量充足，来源广泛，突出热点，参考答案详尽！

中国石化出版社

考研数学真题与典型题详解系列

线性代数(经济类)

考研真题与典型题详解

金圣才　主编

中国石化出版社

内 容 提 要

本书是一本考研数学(经济类)真题与典型题详解的复习资料，是根据最新硕士研究生入学考试经济类数学大纲，参考并整理了众多线性代数题库和相关资料精编而成。全书共分6章，每章包括4个部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加数学(三)或数学(四)科目的考生，也适用于各大院校学习线性代数的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习线性代数的一本不可多得的复习资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(经济类)考研真题与典型题详解/金圣才主编.
—北京:中国石化出版社,2005
(考研数学真题与典型题详解系列)
ISBN 7-80164-806-4

Ⅰ.线… Ⅱ.金… Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第040015号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
北京精美实华图文制作中心排版
北京大地印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
*
787×1092毫米 16开本 30.25印张 773千字
2005年5月第1版 2005年5月第1次印刷
定价:49.80元

编　委　会

前　言

本书根据最新硕士研究生入学考试数学大纲，参考并整理了众多数学资料精编而成。全书共分6章，每章包括4部分，第1部分是考试内容及要求，第2部分是重要公式、性质及结论，第3部分是历年考研真题详解，第4部分是典型题详解。

本书具有如下特点：

(1) 题量较大，来源广泛。主要选自200多本数学复习资料(含近10年考研真题)、名校题库以及众多教材和相关资料，经编著而成。可以说本书的试题都经过了精心挑选，博选众书，取长补短。

(2) 解答详细，突出重难点。对每一道题，包括选择题和填空题，都进行了详细的解答。有些试题提供了多种解题方法，便于读者进一步理解。

(3) 难点归纳，理论知识和考试要点归纳有特色。有些试题的结论在一般教材上并没有作为定理或结论，但在考研中却可以直接使用，这些内容本书都进行了总结和分析。

需要特别说明的是：

本书的每道题都是一道典型的例题，读者如果把本书的每一道题认真地看懂、研读，相信在考研中一定能够取得很好的成绩！

本书特别适用于硕士研究生入学考试中数学科目的考生，也适用于各大院校学习数学的师生参考，对于参加职称考试、自考及其他相关专业人员来说，也是学习数学的一本不可多得的复习资料。

由于题量较大，解答详细，错误、遗漏不可避免，诚请读者指正，不妥之处和建议可与编者联系，不甚感激。

为了帮助读者更好地学习数学等各门课程，圣才考研网开设了数学等公共课和专业课的论坛及专栏，还提供各个高校最新考研专业真题、各专业试题库、笔记、讲义及大量专业课复习资料。

限于篇幅，有些试题和资料未能在本书收录，如有建议或需试卷，请登录网站：

圣才考研网 www.100exam.com

金圣才

目　录

第1章 行列式

1.1 考试内容及要求

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质。

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式。

1.2 重要公式、性质及结论

1. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的转置行列式的值 $|\boldsymbol{A}^T|$ 相等。

2. 交换行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

3. 行列式中某行(列)元素的非零公因子可以提到行列式的外面，如：$|\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}| = 2|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}|$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量。

4. 行列式某两行(列)的对应元素成比例，或行列式中有一行(列)的元素全为0，则此行列式的值为0。如：$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{\alpha}| = 0$；$|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, 0| = 0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量。

5. 行列式某行(列)元素是两数之和，则此行列式等于下述两个行列式之和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用向量形式表示为：

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}'_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \\ = & |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}'_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维列向量。

6. 将行列式的某行(列)的各元素乘以常数 k 加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变。

用向量形式表示为：

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \\ = & |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j + k\boldsymbol{\alpha}_i, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| \end{aligned}$$

7. 行列式 D 按某一行(列)展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk} = \begin{cases} \boldsymbol{D}, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, i = j, \\ 0, i \neq j; \end{cases} (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

8.
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \iddots & \\ & \lambda_{n-1} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.3 历年考研真题详解

1.3.1 填空题

1.(1989 数四)行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ______

【分析】 考虑到行列式的各行元素之和相同，先将第二、三、四列都加到第一列上去，再利用行列式的性质及展开定理即可。

解：把二、三、四列均加到第一列，得

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=-x^2\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&0&x\\0&x&0\end{vmatrix}=x^4$$

2.(1996 数四)五阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$ ________

【分析】 按第一行(列)展开，可得到行列式的递推关系式。

解： 按第一行展开，得递推关系式

$$\begin{aligned}D_5&=(1-a)D_4+aD_3=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3\\&=[(1-a)^2+a]D_3+a(1-a)D_2\\&=(1-a+a^2)[(1-a)D_2+a(1-a)]+a(1-a)D_2\\&=(1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2)+a(1-a)]+a(1-a)(1-a+a^2)\\&=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5\end{aligned}$$

【评注】 对于 $\begin{vmatrix}a&b&&&\\c&a&b&&\\&c&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&a&b\\&&&c&a\end{vmatrix}$ 型行列式，一般用递推法求解，另外，对于本题，如先将第二到第五行都加到第一行上去，再按第一行展开，所得的递推公式更简单。

3.(2001 数四)设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________。

【分析】 注意本题是求第四行各元素余子式之和，而不是求第四行各元素代数余子式之和，这是有差别的。一种方法是直接计算，分别求出四个余子式；另一种方法是将其和转化为代数余子式，再根据行列展开定理归结为一个四阶行列式的计算。

解：方法一： 用 $M_{4j}(j=1,2,3,4)$表示第四行各元素的余子式，则

$$M_{41}=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}=-56,M_{42}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{43}=\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=42,M_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-14$$

故 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-28$。

方法二：用 $A_{4j}(j=1,2,3,4)$表示第四行各元素的代数余子式，由于 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}$，于是有

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-28$$

【评注】 本题最容易出现的是计算错误，特别是审题不细心，误将求第四行各元素余子式之和当作求第四行各元素代数余子式之和，于是得出和为

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$$

的错误答案，因此仔细审题是非常必要的。

一般地，设$|A|=|a_{ij}|_{n\times n}$，则 $\sum\limits_{j=1}^{n}k_jA_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&a_{i-1,2}&\cdots&a_{i-1,n}\\k_1&k_2&\cdots&k_n\\a_{i+1,1}&a_{i+1,2}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$，其中 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式。

4.(1991 数四)n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=$________

【分析】 利用展开定理按第一列或第 n 行展开即可。

【详解】 按第一列展开，有

$$\text{原式} = a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

【评注】 如行列式中有很多元素为零，一般利用展开定理求解。

1.3.2 选择题

1.(1993 数四)若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$，则四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, (\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|$ 等于(　　)。

(A) $m+n$　　　　(B) $-(m+n)$

(C) $n-m$　　　　(D) $m-n$

【答】 应选(C)。

【详解】 由题设 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| = m$，$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = n$

于是 $|\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, (\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)| = |\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2|$

$$= -|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|$$

$$= -m+n = n-m$$

1.3.3 解答题

1.(1992 数四)已知实矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件：

(1) $a_{ij} = A_{ij}(i, j=1, 2, 3)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；

(2) $a_{11} \neq 0$。

计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$。

【分析】 题设中与代数余子式有关，联想到 $\boldsymbol{A}^*$，进而联想到公式 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，问题就简化了。

【详解】 因为 $a_{ij} = A_{ij}$，所以

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$$

由 $\boldsymbol{AA}^T = \boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两边取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|^3$$

从而 $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 $|\boldsymbol{A}| = 0$。

由于 $a_{11} \neq 0$，可知 $|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^3 \neq 0$。

于是 $|\boldsymbol{A}| = 1$。

2.(2002 数四)设实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形

矩阵，并计算行列式$|A-E|$的值。

【分析】 先求出 A 的特征值与特征向量，即可求得可逆阵 P 及对角阵，再由 A 的特征值求出$A-E$ 的特征值，即可求出行列式$|A-E|$。

【详解】 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2)$$

由此得矩阵 A 的特征值$\lambda_1=\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$。

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，可得对应的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$$

对于特征值 $\lambda_3=a-2$，可得对应的特征向量

$$\alpha_3=(-1,1,1)^T$$

令矩阵

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2\end{pmatrix}$$

则
$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2\end{pmatrix}$$

由 A 的特征值可得$A-E$ 的特征值为a，a，$a-3$，所以，$|A-E|=a^2(a-3)$。

1.4 典型题详解

1.4.1 填空题

1. 行列式 $D_5=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0\\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0\\ 4 & 10 & 11 & -5 & 0\\ 8 & 1 & 3 & 7 & 5\end{vmatrix}=$__________

解： 按照行列式的定义，第 1 行只能取第 4 列的元素 1；然后第二行不能取第 4 列的元素 7，则只剩下第 3 列的元素 2 不为 0；同理，第三行只能取元素 3；同理，第 4 行取第 1 列元素 4；于是第 5 行只能取第 5 列元素 5。因为

$$\tau(43215)=6$$

所以 $D_5=(-1)^6\times1\times2\times3\times4\times5=120$。

2. 设 a，b，c 为方程$x^3+px+q=0$的三个互异的实根，则

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$$

解：
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

而由于 a，b，c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个实根，故有 $a+b+c=0$，从而

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$

解：

$$\text{原式} \xlongequal[\text{加到第 1 列}]{\text{第 2、3、4 列均}} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到第 2、3、4 行}]{\text{第 1 行乘以}(-1)\text{分别}} x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 4 行展开}} -x^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = x^4$$

4. 若 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8$，则行列式

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c+2 & 3 & -1 & 2 \\ d+4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$$

解:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c+2 & 3 & -1 & 2 \\ d+4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ b & 1 & 0 & 2 \\ c & 3 & -1 & 2 \\ d & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 0 & 1 \\ d & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & 1 & 3 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 2 & 0 & 1 \\ d & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

5. 行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$

解:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \overset{r_1 - r_2}{\underset{r_3 - r_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \overset{r_2 - r_1}{\underset{r_4 - r_1}{=\!=\!=}} ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = -a^2b\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2b^2$$

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1994 & 1995 & 1996 \\ 1997 & 1998 & 1999 \\ 2000 & 2001 & 2002 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}$

解：第 2 列乘以(-1)加到第 3 列，得

$$\begin{vmatrix} 1994 & 1995 & 1 \\ 1997 & 1998 & 1 \\ 2000 & 2001 & 1 \end{vmatrix}$$

第 1 列乘以(-1)加到第 2 列，得

$$\begin{vmatrix} 1994 & 1 & 1 \\ 1997 & 1 & 1 \\ 2000 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________

解：把第 2 列、第 3 列、…、第 n 列都加到第 1 列，有

$$|\boldsymbol{A}| = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{用第 }2,3,\cdots,n\text{ 行减去第 1 行}}$$

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

8. 若 $\tau(124659783) = 9$，则 $\tau(387956421) =$ ________

解：直接套用公式

$$\tau(124659783) + \tau(387956421) = C_9^2 = 36$$

即
$$9 + \tau(387956421) = 36$$

所以
$$\tau(387956421) = 27$$

注：以下公式课本上没有，但考研时可作为公式直接使用。请牢记！

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1) = C_n^2$$

9. 已知 a，b 为整数，且满足

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0,\text{则 } a = \_\_\_\_\_\_\_\_,b = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

解：

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1000 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8(a^2+b^2)=0$$

故有 $a^2+b^2=0$，又由 a，b 为整数，故

$$a = 0, b = 0$$

10. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 3，则行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}| = \_\_\_\_\_\_\_\_$

解： n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是关于 λ 的 n 次多项式，即

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

因为有一个特征值为 3，所以 λ_i 中有一个值为 3。不妨设 $\lambda_1=3$，则

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = (\lambda - 3)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

令 $\lambda=3$，得

$$|\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| = (3-3)(3-\lambda_2)\cdots(3-\lambda_n) = 0$$

11. 设 $\boldsymbol{B}$ 为 2001 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{B}^T=-\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}| = \_\_\_\_\_\_\_\_$

解： 根据矩阵与矩阵的转置关系，易得

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}^T|$$

又因为 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^T$，所以

$$|\boldsymbol{B}| = |-\boldsymbol{B}^T| = (-1)^{2001}|\boldsymbol{B}^T|$$

即

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{B}^T|$$

于是

$$2|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}^T| + (-|\boldsymbol{B}^T|) = 0$$

所以

$$|\boldsymbol{B}| = 0$$

12. 设 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$，则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44} = \_\_\_\_\_\_\_\_$

解： 4 阶行列式第 2 列先提出公因式，然后把第 2 列，第 3 列，第 4 列都加到第 1 列，得

$$D_4 = b\begin{vmatrix} a & 1 & c & d \\ c & 1 & d & a \\ d & 1 & c & a \\ a & 1 & d & c \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a+c+d+1 & 1 & c & d \\ a+c+d+1 & 1 & d & a \\ a+c+d+1 & 1 & c & a \\ a+c+d+1 & 1 & d & c \end{vmatrix}$$