普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程

郁中丹 黄海洋 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

偏微分方程

郁中丹　黄海洋　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书以数学分析、线性代数和常微分方程等本科课程所提供的工具为依据来选择偏微分方程课程的内容.把分部积分、场论、Sturm－Liouville 等理论与偏微分方程结合起来讨论以便揭示其作用与意义,对极值原理也作了较仔细的论证.本书内容以微积分理论所能容纳的程度为限.具体内容包括:一阶方程、变分问题、常系数线性方程求解方法、二阶线性方程等.

本书力求尽可能保持物理模型讲述的完整性以及偏微分方程中逻辑性与历史性的统一.在各部分内容的讨论中,除了保证数学上的严密性之外,还注意对其实际意义的解释,并穿插有关的历史事例,希望能为讨论注入活力并向学生介绍正确的数学观.

本书可作为高等院校数学系偏微分方程课程的教材.

图书在版编目(C I P)数据

偏微分方程/郇中丹,黄海洋编.—北京:高等教育出版社,2004.7

ISBN 7－04－013983－9

Ⅰ.偏...　Ⅱ.①郇...　②黄...　Ⅲ.偏微分方程—高等学校－教材　Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062059 号

策划编辑　李　蕊　　**责任编辑**　李　蕊　　**封面设计**　王凌波
责任绘图　吴文信　　**责任印刷**　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　北京鑫海金澳胶印有限公司

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	13.25	**印　　次**	2004 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	17.00 元

前 言

偏微分方程是数学学科中的一个极其重要的领域，它是数学与其它科学学科联系的重要桥梁之一，也是基础数学发展的基本源泉之一. 然而，由于这一领域学科背景的多样化和复杂性，在如何开设这门课程和讲授哪些内容等方面都还有不少值得深入研究和探讨的问题.

我们认为，从数学史来看，很难找到一个数学学科的发展是与偏微分方程没有关系的；再就培养数学系学生的角度来看，种种数学门类的学习与数学技能的训练，其原委大多能较好地在偏微分方程课程的学习过程中获得较好的理解. 不仅如此，偏微分方程课程还是学习前人数学思想、方法和观点所难得的一门课程. 以往我们差不多把数学理解成了“智力游戏”，在数学的讲授过程中也往往将其变成了一些神奇技巧的传授（新近又有一种将数学变成其他学科附庸的倾向），这些都反映我们对数学（乃至科学）理解方面的偏差. 因此，编写一本适合我国高校情况的偏微分方程教材是非常迫切的.

从 1994 年 9 月以来，基于对偏微分方程及数理方程课程和教材的现状，我们开始了对该课程教改的思考与实践并着手编写讲义. 从 1996 年 9 月开始在我系 1994 级至 2000 级基础数学专业本科生偏微分方程课程中使用. 使用效果是良好的，这表现在两方面：一是通过这门课程的讲授，可以使学生熟悉和逐步习惯于以问题为中心的学习方式，从而能主动地进行学习，并使学生掌握解决问题的基本步骤，了解数学分析和常微分方程及泛函分析等学科中的一些问题的由来，特别是一些具体问题在这些学科中的相关理论创立中的作用；另一方面，学生在学习过程中，尤其暴露出他们在前期数学教育中养成的思维方法上和知识层面上存在的问题：学生希望并习惯于等着教师把题目的条件都设计得天衣无缝，而自己只需要作几个三段论（他们觉得数学就是推理，与此无关的一切他们都不应该去做）；在知识层面，学生的一元微积分计算还可以，但对矩阵运算、分部积分、多元微积分及级数的基本运算则很不熟练，甚至在心理上有巨大的排斥感.

基于这样一些认识，我们试图从数学理论的完整性，物理模型刻画的完整性和逻辑性与历史性的统一性等三个层面来设计教材.

数学理论的完整性：是指以本科数学专业的数学分析、线性代数与常微分方程等课程提供的工具，以此作为选择偏微分方程课程内容的依据. 具体地说，分部积分、场论、 Sturm-Liouville 理论等工具在讨论偏微分方程的过程中一步步展开，使其作用与意义能够得到揭示. 书中对极值原理也做较仔细的讨论. 古典解所用的函数空间一般不是偏微分方程的“自然”解空间，为此必然要涉及广义

函数与种种函数空间，对此，我们不刻意回避也不过于展开．既然本书以微积分理论所能容纳的程度为限，我们的处理方式是"点到为止"，给感兴趣的学生留下思考探索的余地．

物理模型刻画的完整性：许多微积分定理是对一些基本物理现象的数学描述，而一个微分方程大多是某种守恒律的表述．为此，对基本方程尽可能给出详尽的推导．这里既注意讲清数学推导方面的严格性，也注意讲清简化的根据或假设．

逻辑性与历史性的统一：我们不赞成把微分方程或其他教学上的后继课程说成是前面课程的逻辑推论或应用，因为它颠倒了数学的历史和人类认识的实际过程．为此，在对有些部分内容的讨论中，本书注意穿插有关的历史，这一方面为数学讨论注入活力，另一方面也向学生介绍正确的数学观，在观念上不轻视实际问题和想法．

应当说，这三方面是我们编写时力求做到的，但限于我们的知识和思想水准以及其他局限性，还有不少有待改进的地方．希望读者不吝赐教，我们对此不胜感激．

本书是在参考编者郇中丹（数学系 91 级与 92 级）和黄海洋（数学系 93 级）教案的基础上开始编写的，郇中丹具体设计和编写全书的文字部分和讲授（数学系 94 、 95 、 98 和 00 级），黄海洋设计和绘制了全书的图．需要特别指出的是，保继光老师先后五次（数学系 96 、 97 、 99 级和两届函授数学本科生）使用了本书讲义，并认真审阅了本书的书稿，提出了许多很好的建议，在此作者向他表示衷心的感谢．在本书的最后成书过程中，编者还得到了北京师范大学数学系，特别是系主任郑学安老师的关心和支持，对此我们也深表谢意．在本书的使用过程中，我们还得到了北京师范大学数学系本科学生的反馈意见，特别是 2000 级的赵孝平同学，她仔细地阅读了讲义的有关部分并指出了若干较严重的笔误，为此，编者也在此一并感谢．

最后，我们要感谢高等教育出版社的各方面支持，特别是责任编辑李蕊的悉心指导．

全书的内容在一学期（周四学时）内是能够讲授完成的．如果课时紧，可以酌情删除下列内容中的几部分，而不会影响教学上的连贯性：第一章第二节的第三小节、第一章第三节、第三章第二节和第三节中较复杂的例子、第五章第四节的第四和第五小节以及第六章的第五节．

另外，为阅读上的方便，定义、定理、命题、引理、注及证明都以 □ 结尾．

编 者

2004 年 5 月

目 录

第一章　基本概念和一阶偏微分方程

§1.1　记号和基本概念

1.1.1　记号

在本书中，将使用以下记号：

1. 与欧氏空间有关的记号：$\mathbb{R}$ 表示实直线.

欧氏空间：$\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,n\}$，$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 为其标准基;

当 $n=2$ 时，也记 $\mathbb{R}^2$ 为 $\{(x,y):x,y\in\mathbb{R}\}$;

当 $n=3$ 时，也记 $\mathbb{R}^3$ 为 $\{(x,y,z):x,y,z\in\mathbb{R}\}$;

欧氏内积：对于 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x\cdot y=\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$;

带时间的欧氏空间：$\mathbb{R}^{n+1}=\{(x,t):x\in\mathbb{R}^n,t\in\mathbb{R}\}$;

Ω: $\mathbb{R}^n$ 中的区域 ((非空) 连通开集), $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

特别，$B_R(\hat{x})$ 或 $B(\hat{x},R)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中球心在 $\hat{x}$, 半径为 R 的球体; $S_R(\hat{x})$ 或 $S(\hat{x},R)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中球心在 $\hat{x}$, 半径为 R 的球面. 在本书中，仅考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n-1$ 维曲面，其面积元记作 $\mathrm{d}\sigma$, $\mathrm{d}\sigma_y$ 或 $\mathrm{d}\sigma(y)$.

2. 与偏导数有关的记号：$u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^n$ 的某个区域上的函数.

偏导算子：$\mathrm{D}_i=\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 这里 $i=1,\cdots,n$. $\partial_i u=u_{x_i}=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ 代表 $u(x)$ 对 x_i 的偏导数;

梯度算子 :$\mathrm{D}=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$, $\mathrm{D}u(x)=(\partial_1u(x),\cdots,\partial_nu(x))$ 表示 $u(x)$ 的梯度 (向量), $\mathrm{D}u$ 也常被记为 $\mathrm{grad}\,u$ 或 ∇u.

拉普拉斯 (Laplace) 算子：$\Delta=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$；

散度算子：设 $F=(F_1,\cdots,F_n)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一个区域上到 $\mathbb{R}^n$ 的连续可微函数. 定义 F 的散度为 $\mathrm{div}\,F=\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

也可把拉普拉斯算子记为：$\Delta u=\mathrm{div}\,\mathrm{D}u=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u=\nabla^2u$.

当 $u(x,t)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个区域上的函数时，仍用 $\partial_iu(x,t)$ 或 $\partial_{x_i}u(x,t)$ 表示 u 对 x_i 的偏导数，并记 $\partial_x=D_x=(\partial_1,\cdots,\partial_n)$, 而用 $u_t(x,t)=\partial_tu=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 表示对 t 的偏导数，$u_{tt}=\partial_t^2u$ 则表示对 t 的二阶偏导数. 并且 $\Delta u(x,t)$ 仍表示 $\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i^2}$.

为了给出高阶导数的表示方法，先引入下面的多重指标记法：称集合

$$\mathbb{N}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \cdots, n\}$$

为多重指标集合，其元素 α 称为一个多重指标，这里 $\mathbb{N}$ 表示非负整数的集合. 记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

我们定义

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha = \mathrm{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

对于正整数 k, 记 $\mathrm{D}^k u(x) = (\partial^\alpha u(x) : |\alpha| = k)$, 并定义

$$\left|\mathrm{D}^k u(x)\right|^2 = \sum_{|\alpha|=k} \left|\partial^\alpha u(x)\right|^2$$

特别地，当 $k=1$ 时，把 $\mathrm{D}u(x)$ 理解为行向量，而当 $k=2$ 时，我们把 $\mathrm{D}^2 u(x)$ 理解为 $n \times n$ 对称矩阵.

对于 (x,t) 的函数，记 $\partial_x^\alpha = \mathrm{D}_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

对于向量值函数 $F = (F_1, \cdots, F_m)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $G = (G_1, \cdots, G_p)$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, 它们的一阶偏导数记作：

$$\mathrm{D}F(x) = \left(\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}, \qquad \mathrm{D}G(y) = \left(\frac{\partial G_k(y)}{\partial y_l}\right)_{p\times m}$$

则有连锁法则

$$\mathrm{D}(G \circ F)(x) = \mathrm{D}G(F(x))\mathrm{D}F(x)$$

其中等式右端表示 $p \times m$ 矩阵 $\mathrm{D}G(F(x))$ 与 $m \times n$ 矩阵 $\mathrm{D}F(x)$ 的 **矩阵** 乘积. 特别地，对于实值函数 :g:$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 有 $\mathrm{D}(g \circ F)(x) = \mathrm{D}g(F(x))\mathrm{D}F(x)$, 此时等式右端表示行矩阵 $\mathrm{D}g(F(x))$ 与 $m \times n$ 矩阵 $\mathrm{D}F(x)$ 的 **矩阵** 乘积.

本书还要用到下面的函数集合记号：$C(\Omega)$ 代表 Ω 内的全体连续实函数的集合，而 $C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \mathrm{D}^\alpha u \in C(\Omega), |\alpha| \le k\}$, 其中 $k = 1, 2, \cdots$. 特别 $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$.

习题 1.1.1

1\. 对于 $\alpha \in \mathbb{N}^n$, 记 $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. 证明：

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha, \quad m = 1, 2, \cdots$$

2. 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. 证明：

(1)

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(x+ty) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} y^\alpha \mathrm{D}^\alpha f(x+ty), \quad m = 1, 2, \cdots$$

(2) f 在 $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 点的 Taylor 级数为

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha f(\hat{x}) y^\alpha$$

3. 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,$\beta \le \alpha$ 表示 $\beta_i \le \alpha_i$, $\forall\, i = 1, \cdots, n$. 证明：对于 $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathrm{D}^\alpha(uv) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \left(\mathrm{D}^\beta u\right) \left(\mathrm{D}^{\alpha-\beta} v\right)$$

4. 记 $Q_m[x]$ 为全体 n 元 m 次实系数齐次多项式的集合. 对于

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$$

定义

$$p(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha$$

在 $Q_m[x]$ 上引入如下运算：对于 $p, q \in Q_m[x]$,

$$\langle p, q \rangle = p(\mathrm{D}) q(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha(q(x))$$

(1) 证明：上述运算定义了 $Q_m[x]$ 上的一个内积.

(2) 考虑 Laplace 映射 Δ: $Q_m[x] \to Q_{m-2}[x] (m = 2, 3, \cdots)$. 记 $H_m[x]$ 为 Δ 的核， $G_m[x] = \{|x|^2 p(x)\colon\ p(x) \in Q_{m-2}[x]\}$, $m = 2, 3, \cdots$.

证明：$H_m[x]$ 和 $G_m[x]$ 互为正交补，因而， $Q_m[x]$ 为 $H_m[x]$ 和 $G_m[x]$ 的直和.

1.1.2 基本概念

这一节将给出与偏微分方程及其解有关的一些概念、术语和记号.

定义 1.1. 一个偏微分方程是一个含有多元未知函数及其偏导数的方程. 方程中所含偏导数的最高阶数称为该方程的阶数，或简称为该方程的阶.

由多个偏微分方程构成的方程组称为偏微分方程组，这些偏微分方程中的最高阶数称为这个偏微分方程组的阶数. □

因而一个 m 阶偏微分方程的一般形式为：

$$F(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^m u) = 0 \tag{1.1.1}$$

其中 F 一般是 $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^m}$ 上的已知函数.

一个 Ω 内的实函数 u 如果在某种意义下满足方程 (1.1.1), 就称 u 为 (1.1.1) 在 Ω 内的解. 这里有两个问题需要解答：一个是 u 本身所应有的性质，比如其偏导数的意义；另一个是 u 如何满足方程 (1.1.1).

一般把解分成两类：古典解和广义解. 在本书中，我们主要是围绕古典解讨论，也适当讨论一些广义解. 下面先引入古典解的定义.

定义 1.2. $u \in C(\Omega)$ 称为方程 (1.1.1) 在 Ω 内的古典解，如果所有出现在方程 (1.1.1) 中的偏导数 $\mathrm{D}^\alpha u$ 都是 Ω 上的连续函数，并且，对于 $x \in \Omega$,

$$F(x, u(x), \mathrm{D}u(x), \cdots, \mathrm{D}^m u(x)) \equiv 0$$

成立. □

如同数域的扩张一样，广义解可以被理解为古典解的推广，也就是古典解应当是广义解. 所谓广义解，首先要推广偏导数的概念，即对偏导数的意义作某种推广，其次对如何满足方程加以说明. 例如：Sobolev 意义下的广义解、Schwartz 分布意义下的广义解、守恒律意义下的广义解和粘性解意义下的广义解. 基于技术上的原因，一些广义解的定义将在引入时给出.

人们通常按照偏微分方程理论的基本历史发展过程，将偏微分方程的分成线性、半线性、拟线性和完全非线性等四类.

(I) **线性偏微分方程** (**简称线性方程**): 称方程 (1.1.1) 为 m 阶线性偏微分方程当且仅当该方程能被写成

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha u + f(x) = 0 \tag{1.1.2}$$

其中 $a_\alpha(x)(|\alpha| \le m)$ 和 $f(x)$(称为方程的非齐次项) 是 Ω 上的已知实函数并且至少有一个 α 满足 $|\alpha| = m$ 使得 $a_\alpha(x)$ 在 Ω 上不恒为零. 下面看几个常见的例子.

例 1.1. 波动方程 $u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$, 其中 a 为正常数. 当 $n = 1, 2$ 时，相应的波动方程也分别称为弦振动方程和膜振动方程.

例 1.2. 热传导方程 $u_t - a^2 \Delta u = 0$.

例 1.3. 位势 (Laplace) 方程 $\Delta u = 0$.

例 1.4. Maxwell 方程 $\epsilon E_t = \mathrm{curl}\, H$, $\mu H_t = -\mathrm{curl}\, E$ 和 $\mathrm{div}\, E = \mathrm{div}\, H = 0$, 这里 $E = (E_1, E_2, E_3)$ 表示电场强度向量， $H = (H_1, H_2, H_3)$ 表示磁场强度向量.

例 1.5. Schrödinger 方程 $u_t = \mathrm{i}\Delta u$, 其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ (**注意**: 这里 u 是复值函数, 如果将其按实部和虚部展开, 它是一个含有两个未知函数的偏微分方程组).

(II) **半线性偏微分方程** (**简称半线性方程**): 当 (1.1.1) 能写成

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha u + b(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^{m-1}u) = 0$$

时, 称之为半线性方程, 这里 $a_\alpha(x)$ ($|\alpha| = m$) 和 b 是已知函数, 至少有一个 $a_\alpha(x)$ 不恒等于零, 而 $b(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^{m-1}u)$ 关于 u, $\mathrm{D}u$, $\cdots$, $\mathrm{D}^{m-1}u$ 不是线性的. 半线性方程也有许多很有意义的例子.

例 1.6. KdV(Korteweg-de Vries) 方程 $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$.

例 1.7. 反应扩散方程 $u_t = au_{xx} + bu_{yy} + u(1-u)$, 其中 a, b 是正常数.

(III) **拟线性偏微分方程** (**简称拟线性方程**): 此时 (1.1.1) 能写成

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^{m-1}u)\mathrm{D}^\alpha u + b(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^{m-1}u) = 0$$

其中 a_α 及 b 为已知函数, 并且至少有一个 $a_\alpha(x, u, \mathrm{D}u, \cdots, \mathrm{D}^{m-1}u)$ 真含有 u, $\mathrm{D}u$, $\cdots$, $\mathrm{D}^{m-1}u$ 中的项. 有下面的例子.

例 1.8. 多孔介质方程 $u_t - \Delta(u^m) = 0$, 其中 $m > 1$ 为常数.

例 1.9. p-Laplace 方程 $u_t - \Delta_p u = 0$, 这里 $\Delta_p u = \mathrm{div}\left(|\mathrm{D}u|^{p-2}\mathrm{D}u\right)$, 而 $p > 2$ 为常数.

(IV) **完全非线性偏微分方程** (**简称完全非线性方程**): 如果方程 (1.1.1) 不能够写成上述三种形式之一, 则称之为完全非线性偏微分方程. 这方面的例子是大量的.

例 1.10. Hamilton-Jacobi 方程 $u_t + H(\mathrm{D}u) = 0$, 其中 $H(\mathrm{D}u)$ 是 $\mathrm{D}u$ 的非线性函数.

例 1.11. 短时距 (eikonal) 方程 $|\mathrm{D}u|^2 = 1$.

例 1.12. Monge-Ampère 方程 $\det\left(\mathrm{D}^2 u\right) = f(x)$, 其中 f 为已知函数.

例 1.13. Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

$$u_t + \min_{j\in J}\{\langle a_j(x,t), \mathrm{D}u\rangle + g_j(x,t)\} = 0$$

这里 J 为指标集, a_j 和 g_j 为已知函数.

偏微分方程的上述分类大体上反映了偏微分方程理论发展的历程. 当然这一分类是相对的, 可以相信, 随着理论的发展, 有关的分类也会有些变化. 要指出的是 : 一般来讲, 线性方程比非线性方程要简单些. 但这又不是绝对的. 实际

上，每一类方程都有不少问题需要作进一步的讨论，只是非线性方程的问题相对多一点而已．从另一个观点来看，非线性方程可以视为对实际现象比线性方程更精确的描述．

1.1.3 定解条件和定解问题

与常微分方程类似，一个偏微分方程可以有无穷多个解，而人们所关心的往往是某一种或某一个解，为此就必然要加一定的条件把所求的解与方程的其他解区分开来．这样的条件就称为定解条件．对一个偏微分方程附加上一个或若干个定解条件的求解问题就称为这个偏微分方程的一个定解问题．

事实上，求得一个偏微分方程的所有解一般是不可能的，而一个定解问题的求解则常常是可行的．因此，定解问题的研究是偏微分方程理论的中心问题．

对于一个具体的定解问题，我们要求它是适定的，即这个定解问题能够保证有解 (称之为存在性条件)，至多只有一个解 (称之为惟一性条件)，并且其解连续依赖方程和定解条件中的某些参数和函数．否则，就称之为不适定的．

在这一节中，仅局限于上面的概念．对于具体的定解条件和定解问题，留待讨论到具体方程时再说．

1.1.4 偏微分方程小史

偏微分方程这一学科并不是数学家自觉创立的，而是在讨论自然现象 (特别是物理现象) 的过程中逐步建立起来的．时至今日，虽然偏微分方程已经发展成了一个理论丰富并且应用广泛的数学学科，但比起其他一些数学学科来，还远不是完善的．这大体上是由偏微分方程所反映的自然现象的复杂性所决定的．从另一个角度来看，这大概也是偏微分方程这一学科生命力特别旺盛的原因．

偏微分方程理论的起源可以追溯到 18 世纪对弦振动现象的讨论，这一讨论吸引了众多的数学家的注意，其中有 Euler, d'Alembert, Taylor, Daniel Bernoulli, Laplace 和 Lagrange. 这里特别要指出的是他们对三角级数的争论．

19 世纪初，在对热传导问题研究的过程中， Fourier 确立了三角级数作为函数的一种表达方式的位置．这大大改变了人们对函数的认识，从此人们开始接受用级数作为表示函数的一种合法手段．

偏微分方程理论是在 19 世纪发展起来的．随着 (物理) 科学所研究的现象在广度和深度上的扩展，偏微分方程变成并继续成为数学的中心之一．这归结为两方面，一方面是由于偏微分方程对于 (物理) 科学的重要性，另一方面是从数学自身的角度，偏微分方程的求解也促使数学在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等方面的发展．

在 19 世纪，数学家们找到了许多定解问题的解的表达式，这些表达式除了

利用有限形式外，还利用了级数和积分．这大大促进了人们对函数及数学本身的理解．人们还发现，并非每个定解问题的解都可以用这些方式表达出来，即使表达出来了，也未必能够看清其意义．

19 世纪末至 20 世纪上半叶发展起来的积分方程、泛函分析以及各种广义解的理论为人们提供了研究偏微分方程的新手段和新思想．人们不再迷恋于求出解的表达式，而是把注意力放在确定解的存在性和讨论解的性质这两方面．这里特别要记住 Fredholm, Banach, Schauder, Sobolev 和 Schwartz 等人的工作．

目前，偏微分方程所涉及的领域越来越广，研究的问题也越来越深入．各种新理论和新结果大量涌现，众多的问题有待人们去探讨．这里特别注意微分几何与数学物理仍然是偏微分方程的思想和方法的重要来源．另外，科学技术的进步也在不断扩大偏微分方程的研究领域遥感和图象处理中的种种模型和反问题．

1.1.5 本课程的打算

任何一门或几门课都不可能囊括偏微分方程理论的基本内容．目前的这门课程将提供古典的基本求解方法，并力求与现代偏微分方程理论相沟通．我们特别强调可计算性，力求通过本门课程的学习，为今后进一步学习研究和应用打下良好的基础．值得强调的是，本课程所涉及到的内容是偏微分方程理论中的最基本部分，也是讨论其他更专门和深入的问题时所经常要借鉴的“模型”．

习题 1.1

1. 判别下列方程的类型 (线性、半线性、拟线性和完全非线性) 并且指出其阶数：

(1) Holmholtz 方程：$-\Delta u=\lambda u$, 其中 λ 是常数；

(2) 交通方程：$u_t+\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j}=0$, 其中 $b_j(x), j=1,\cdots,n$ 是已知函数；

(3) Kolmogolov 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

这里 $a_{ij}(x)$ 和 $b_i(x)$ 都是已知函数；

(4) $-\Delta u=f(u)$, 其中 f 为已知函数；

(5) 极小曲面方程 :div $\left(\dfrac{\mathrm{D}u}{\sqrt{1+|\mathrm{D}u|^2}}\right)=0$;

(6) $u_t-\Delta u=f(u)$, 其中 f 是已知函数；

(7) $u_t-\det\left(\mathrm{D}^2 u\right)=f(x,t)$, 其中 $f(x,t)$ 是已知函数．

2. 证明 Maxwell 方程中的未知函数 E_i, H_j $(i,j=1,2,3)$ 都是波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0$$

的解，其中 $a^2=(\mu\epsilon)^{-1}$.

3. 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的任一各边分别平行一坐标轴的矩形区域上的所有 C^2 解.

§1.2 一阶偏微分方程的求解

这一节将讨论拟线性和完全非线性一阶方程的 Cauchy 问题以及一阶方程的通积分和完全积分. 把线性方程和半线性方程作为拟线性方程的一个特例来讨论.

1.2.1 拟线性方程的 Cauchy 问题

一阶拟线性方程的形式一般记为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(x,u) \tag{1.2.1}$$

这一节总假定 a_i 和 b 是其变量的 C^1 函数. 当 $n=2,3$ 时， (1.2.1) 分别记为

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u) \tag{1.2.2}$$

和

$$a(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z}=d(x,y,z,u) \tag{1.2.3}$$

这里自然也假定有关系数是 C^1 的. 为了便于直观理解，先对两个自变量的情形进行讨论，然后再对三个变量和一般的情形做些附加的讨论或留作习题.

首先刻画 (1.2.2) 的解. 设 $z=u(x,y)$ 是 (1.2.2) 的一个解，把它理解为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面，记为 Σ. 与此同时，把方程 (1.2.2) 的系数理解为 $\mathbb{R}^3$ 中的向量场 $(a(x,y,z),b(x,y,z),c(x,y,z))$. 在这些记法下， $(u_x(x,y),u_y(x,y),-1)$ 是曲面 Σ 在 $(x,y,u(x,y))$ 点的一个法向量. 因而，方程 (1.2.2) 表明：曲面 Σ 与向量场

$$(a(x,y,z),b(x,y,z),c(x,y,z))$$

相切. 由此不难推想 (1.2.2) 的解和向量场 $(a(x,y,z),b(x,y,z),c(x,y,z))$ 所确定的曲线族有密切关系. 事实也的确如此. 为了把这些说清楚引入下面的定义：

定义 2.1. 常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x,y,z) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x,y,z) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = c(x,y,z) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

的解曲线称为一阶偏微分方程 (1.2.2) 的 (全) 特征线. 方程组 (1.2.4) 称为一阶偏微分方程 (1.2.2) 的特征方程组.

□

由此对方程 (1.2.2) 的解可以按图 1.2.1 作图示.

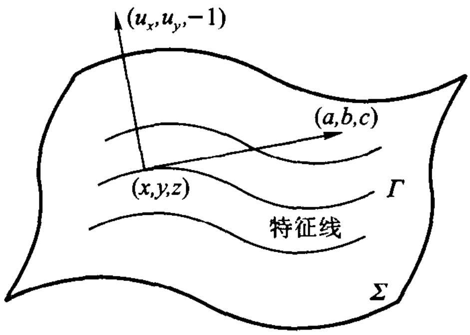

图 1.2.1 方程 (1.2.2) 解曲面 $z=u(x,y)$ 的图示

下面的定理说明这的确给出了对方程 (1.2.2) 古典解的刻画.

定理 2.1. 函数 $u(x,y)$ 是 (1.2.2) 的古典解 $\Longleftrightarrow$ 过曲面 Σ: $z=u(x,y)$ 上任一点的特征线完全落在曲面 Σ 内. □

证明：“$\Longrightarrow$”先证条件的充分性. 这就要证明：对于任意点 (x_0,y_0),$u(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 满足方程 (1.2.2), 也就是, 由特征线组成的曲面是解曲面.

设 Γ: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 是方程 (1.2.2) 过点 $(x(0),y(0),z(0)) = (x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ 的特征线. 由条件 $\Gamma\subset\Sigma$, 即 $z(t)=u(x(t),y(t))$, 就有

$$c(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}a(x(t),y(t),z(t)) + \frac{\partial u}{\partial y}b(x(t),y(t),z(t))$$

特别取 $t=0$ 可得到

$$\begin{aligned} c\left(x_0,y_0,u(x_0,y_0)\right) = a\left(x_0,y_0,u(x_0,y_0)\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+ \\ b\left(x_0,y_0,u(x_0,y_0)\right)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$