MECHANICS

力　学（物理类）

舒幼生　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

力学/舒幼生编著. —北京:北京大学出版社,2005.9
ISBN 7-301-09401-9

Ⅰ.力… Ⅱ.舒… Ⅲ.力学-高等学校-教材 Ⅳ.03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 083871 号

书　　名:力学
著作责任者:舒幼生　编著
责 任 编 辑:瞿　定
标 准 书 号:ISBN 7-301-09401-9/O·0658
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
排 版 者:北京高新特打字服务社　82350640
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787 毫米×960 毫米　16 开本　25.5 印张　560 千字
2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数:0001—3000 册
定　　价:34.00 元

内容简介

本书系为大学物理类专业学生编写的普通物理力学教材，适用于综合性理科大学和师范类大学，也可用作工科类大学的力学教学参考书。全书分为经典力学和狭义相对论两部分。前7章阐述经典力学内容，其中第1,2,3,4章讲解质点运动学、牛顿定律和动量、能量、角动量定理，第5章讨论质心和刚体，第6章介绍流体，第7章专述振动与波，第8章阐述狭义相对论中的运动学和质点动力学内容。本书的经典力学部分采用传统的方式展现主体结构中内在的系统性，在狭义相对论章节的引文中，尤其注意内容之间的逻辑关联。全书在陈述方式上，始终顾及大学一年级学生的可接受性。考虑到课后练习的重要性，本书编写过程中刻意为学生编制和选录各章习题，按易、难程度分成A和B两组，并将全部题解汇集成册，书名为《力学习题与解答》，与教材配套出版，供学生解题后参考。

前 言

本书系为理科大学物理类专业学生编写的普通物理力学教材，主体内容是经典力学，其后，用适量的篇幅介绍了狭义相对论中的运动学和质点动力学。

力学是为大学一年级学生设置的专业基础课，基本内容在高中物理课上虽已讲授过，但较为粗浅。再则，多数学生受高考影响，偏重解题得分，对经典力学普遍缺乏较为系统的认识。考虑到这一欠缺对后续理论课程的学习将会十分不利，因此，在力学课程中应强调教学内容的融会贯通，在教材主体结构方面则采用传统的方式以展现经典力学内在的系统性。

经典力学主体结构的基础是实验定律，从现象观测直至定律成文，其间的过程始终是未完成的归纳。未完成性为后来的物理学家提供了进一步探索的可能，使得经典力学能经爱因斯坦的工作，修正、发展成为狭义相对论力学。归纳和演绎是必要的。定律之后，运用数理逻辑导出一系列定理、公式，乃至形成相当完整的理论体系，其后效应不仅仅在于社会应用，更在于深化了人类对自然界的认识。

经典力学包含两组定律，其一为牛顿三定律，其二为力的结构性定律。牛顿三定律是核心内容，具有普适性，由此演绎出动量、能量、角动量三组定理。力的结构性定律涉及物体（或物质）间具体的相互作用规律，其中包括牛顿万有引力定律、胡克弹性力定律、摩擦力定律、库仑定律等。两组定律结合展开成的经典力学体系，可以统一地解释宏观世界和部分宇观世界中出现的种种力学现象。

梳理经典力学系统，逻辑上的简洁性产生的美感，当能激起学生对牛顿和前辈学者的崇敬之心。

当前正在进行的中学物理教学改革，删去了部分经典的定量内容，增添了部分近代物理学的定性半定量的内容，旨在减轻应试负担，提高中学生的综合素质。改革的长远效果将会显现，但就近期而言，却难免会影响大一新生的物理基础。面对现实，力学课程既然不宜降低教学标准，就更需考虑如何化解学生听课的困难。为此，本教材在基础内容陈述方式上，力求兼顾多数学生的可接受性。例如将质心、刚体合并在同一章内，从刚体平动问题遇到的动力学困难引入质心，使学生感觉自然。又如狭义相对论一章中安排了一段内容，从逻辑上定性叙述了如何由光速不变原理导出惯性系之间时钟零点校准的差异，又由这一差异导出运动直尺长度的收缩，继而由长度收缩导出运动时钟计时率的变慢。帮助学生理清光速不变原理与时间度量相对性之间的因果关联，意在化难为

易。

从教多年,深感较好的题目不仅可以起到训练学生运用理论知识解决具体问题的能力,而且也能提升学生对物理学科的兴趣。本人在教材编写过程中刻意为学生编制和选录了各章习题,按易、难程度分成 A、B 两组,附于各章后,并将全部题解汇集成册,与教材配套出版,供学生解题参考。

舒幼生

2005 年 8 月于北京

目　　录

1 质点运动学

1.1 空间和时间

物体各个点部位的空间位置随时间而变化，形成运动，因此，空间和时间是运动的两个要素. 据我国古人所言："往古来今谓之宙，四方上下谓之宇"(《淮南子·齐俗训》)，可将空、时及其中包含的物质，全体合称宇宙.

1.1.1 空间

人类对空间的认识起源于对物体结构和运动的观察. 物体在结构方面有左右、前后、上下(即"四方上下")三对可延展的方向，物体在运动方面也有这三对可移位方向. 人们便自然地认为世界上首先存在的是什么都没有的空间，世间万物容纳于这一空间之中，运动在这一空间之中. 数学家依据生活经验建立了三维平直空间，其中点是空间的最基本结构单元，点沿一对方向延展成线，线沿第二对方向延展成面，面沿第三对方向延展成体. 空间的平直性表现为欧几里得平行线公理在其内成立，因此由三条直线两两相交所成三角形的内角之和恒为 180°，以及直角三角形两条直角边平方之和恒等于斜边平方. 平直空间可无限延伸，是无限空间. 在此基础上，经典物理学家建立了**绝对空间观**. 他们首先认为真实空间的存在是绝对的，也就是说没有物体和观察者的空间仍然是存在的. 他们还认为真实空间的内在几何性质是绝对的，不会因物体的存在和物体的运动而发生变化. 具体而言，经典物理学家认定真实空间是三维平直空间. 牛顿在《自然哲学的数学原理》中关于绝对空间观作过概括性的阐述："绝对空间，就其本性来说，与任何外在的情况无关，始终保持着相似和不变."

绝对空间观中还包括着空间量度的绝对性. 空间的最基本量度是几何线段长度的度量. 在三维平直空间中选取两点，定义其间直线段长度为 1 个单位，继而通过若干等分来获得更小的长度单位. 几何学中的度量都是静态重合的度量，在平直空间中存在一种假想的几何移位，任何一个静态线段从空间原有位置移动到其他位置后没有任何形变. 据此，移动上述标准直线段，便可测量其他直线段甚至曲线段的长度. 真实世界中必须将此标准线段物化为一把直尺，这一替代可取的前提是该直尺移位前后的静态长度不变，经典物理学认为理论上必定存在这样的一把直尺，称为刚尺. 刚尺处于静止状态时可以用来测量各个物体的线度，被测物体可以是静止的，也可以是运动着的. 经典物理学还认定，刚尺在移动过程中也不会发生任何形变，用动态刚尺测得的物体线度与用静态刚尺测得的物体线度相同. 这就是经典物理绝对空间观中空间量度的绝对性.

在长度单位方面，开始时把从北极到赤道通过巴黎某位置子午线的一千万分之一长度定义为 1 个标准长度单位，称为米，用字符 m 代表. 发现了原子光谱波长的稳定性后，在

1960 年的一次国际会议上，改用氪 86 原子光谱中一条橙黄色谱线对应光波波长的 1 650 763.73 倍定为 1 m. 在第 17 届国际计量大会(CGPM，1983)上又定义米为“光在真空中(1/299 792 458)s 时间间隔内所经路径的长度”.

20 世纪初，爱因斯坦先后建立了狭义相对论和广义相对论. 狭义相对论认为只有能被测量的空间才是真实的空间，或者说真实空间不能脱离测量者而单独存在. 每一个测量者都有相对其静止的真实空间. 由于测量者之间的相对运动，各自空间的度量属性彼此会有差异，这表现在刚尺的长度会因运动而缩短. 因此引发出一些有趣的现象，例如在测量者 A 的空间中，一个等边三角形，由于相对运动，在测量者 B 的空间中它可能会是一个等腰直角三角形. 在狭义相对论中，空间仍然是无限伸展的平直三维空间. 广义相对论进一步认为空间的几何性质取决于周围的物质分布，物质的运动又受到空间几何性质的制约. 物质的存在，使得空间不是平直的而是弯曲的三维空间. 与在球面这样一个弯曲的二维空间中不存在直线类似，弯曲的三维空间中也未必存在直线. 平直空间中两点之间最短的连线段是直线段，弯曲空间中两点之间最短的连线段称为短程线段(球面上短程线段是大圆弧段). 广义相对论指出，真实空间弯曲程度与物质密度有关. 天文观察显示物质在宇观尺度上的分布是均匀的，整个宇宙空间各处弯曲程度相同. 进一步的研究发现宇宙是不稳定的，事实上处于膨胀状态. 据此建立的宇宙大爆炸理论，认为宇宙起源于一个物质密度趋于无穷大的高温区域，而后急剧膨胀并降温，经历种种演变，物质又凝聚成团，形成了银河、太阳、地球等天体，地球上又出现了迄今为止仍可谓万物之灵的人类. 宇宙膨胀至今，从地球上能观察到的宇宙天体，理论上已可远至 10^{26} m 的距离.

对物质世界微观方面的研究也越来越深入. 惯于抽象思维的某些量子物理学家提出了超弦理论，认为物质的最小结构单元是活动于十维空间的弦，这意味着真实世界的空间在微观上是十维的而在宏观上表现为三维的. 类似的情况如一根麻绳，近看是三维体结构，远看却似一维线结构.

尽管近代物理学揭示物质世界空间并非经典物理学家认为的那么简单，但在人类日常生活涉及的那部分宏观物体活动区域内，据广义相对论导得的空间弯曲性则弱到可以忽略的程度. 狭义相对论指出的空间量度与运动间的关联，也仅在相对运动速度可以与真空光速相比较时才有显著的效应，宏观物体相对运动速度远小于真空光速，这一效应也可略去. 超弦理论一则尚欠成熟，再则如果讨论的是宏观物体，那么也不必涉及如此深入细化的微观十维空间结构.

本课程主要内容中限定的研究对象是宏观物体，因此除狭义相对论一章外，将只在经典力学绝对空间中展开.

1.1.2 时间

时间观念起源于由物体运动形成的事物演化中状态出现的先后顺序性. 世间某些事物的状态具有稳定的再现性，人们便自然地将相邻再现的状态之间顺序间隔定为 1 个时间单位，实现了时间的量化. 用日、月、年来计量时间，在人类历史上就是这样形成的. 此后，人们

又注意到某些结构稳定的宏观物体系统，不仅其运动状态具有再现性，而且相邻再现状态之间的时间间隔相同. 据此，设计制作了钟表，相应地有了新的计时单位，称为秒. 地球绕太阳沿椭圆轨道运行，日照周期时长时短，取其平均值称作平均太阳日. 国际上规定太阳日的 1/86 400 为 1 个平均太阳秒，简称 1 秒，用字符 s 表示. 近代实验观察到原子能级跃迁发出的光波频率格外稳定，在 1967 年的一次国际计量大会上，决定改取铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 9 192 631 770 个周期的持续时间为 1 s.

与绝对空间观平行，经典物理学家建立了**绝对时间观**. 绝对时间观首先认为时间的存在是绝对的，这种存在是独立于物体和物体运动形成的事物演化之外的. 反之，物体却必须在时间的流逝中实现其运动并形成物体的演化. 再者，时间的量度也是绝对的，不同运动状态的测量者所带的秒表，只要力学结构相同，秒针运动指示的 1 个时间间隔对应绝对时间中的 1 秒，测量者用这些秒表计量时间便完全相同. 牛顿在《自然哲学的数学原理》中对绝对时间观也作过概括性的阐述："绝对的、纯粹的数学的时间，就其本性来说，均匀地流逝而与任何外在的情况无关."

经典力学中的绝对时间观和绝对空间观，联合构成绝对时空观. 在绝对时空观中，时间与空间又相互独立，即各自的存在是独立的，各自的度量也是独立的.

在狭义相对论中，时间也不能脱离观察者单独存在，时间的度量也会随测量者而异. 例如，A，B 两个观察者之间若有相对运动，那么 A 会认为 B 携带的时钟要比 A 自己携带的时钟"走"得慢，反之，B 则认为 A 携带的时钟要比 B 自己携带的时钟"走"得慢. 相对运动速度越快，这样的效应就越显著. 广义相对论进一步认为物质的存在也会影响时间的度量. 如果把时空看成一个四维连续区域，由于其中物质的存在，整个四维连续区域会发生弯曲，这意味着不仅空间是弯曲的，而且时间也是"弯曲"的. 据宇宙大爆炸理论，时间的以往不是无限的，而是开端于宇宙创生状态，大爆炸至今大约经历了 100～200 亿年，这就是我们宇宙的"简史".

在经典力学范畴内，不考虑相对论时间度量效应，讨论的内容仍以绝对时间为基础展开.

1.1.3 参考系

力学首先描述物体的运动，进而研究物体运动的原因，前者构成运动学内容，后者构成动力学内容.

一般真实物体，在没有模型化处理之前，运动应包括它的各个点部位位置随时间的变化. 在全空空间中一个实物的某个点部位的位置是无从标定的，一个物体的某个点部位只有相对另一个物体(在特殊情况下，这另一个物体也可以是原物体的某个部分)，它的位置才有确切的意义，这另一个物体便称为**参考物**. 无论参考物的大小如何，均可将其沿左右、前后、上下 3 对方向无限沿展，构成三维平直空间，这一空间称为**参考空间**. 参考物与其对应的参考空间之间必须处处相对静止，因此参考物在理论上不可有形变，应是刚性的或者模型化为刚性的. 刚性参考物可大可小，但不能小到一个点，或者说不能模型化为点状物. 因为由一个点 P 延展而成的三维空间可有无穷多个，这些三维空间各自均可相对点 P 静止，彼此间却可绕着点 P 有相对转动. 其他物体中的每一个点部位相对于点 P，除了远近的变化，运动的

其他内容均无法确定. 总之,点状物因为没有体结构,不能作为其他物体运动的参考物,也就不存在它所对应的参考空间. 任一参考空间中对其他物体运动的描述都需要有时间的度量,经典力学认定各参考空间可有相同的时间度量. 每一参考物的参考空间与时间的组合,构成该参考物对应的**参考系**. 在参考系的参考空间中任选一点作为原点,可建立直角坐标系、柱坐标系、球坐标系等各种坐标系. 坐标系属于参考空间所有,坐标框架是由该参考空间各点组成的. 参考系中一个物体的任意一个点部位均可用相对坐标原点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表述. $\boldsymbol{r}$ 简称位矢,在直角坐标系有 x,y,z 三个分量. 参考系中时间是用诸如钟表之类的计时装置度量的,度量值常记作 t.

$\boldsymbol{r}$ 随 t 的变化,构成运动的基本内容. $\boldsymbol{r}$ 是相对于参考物建立起来的,运动也是相对于参考物而言的,同一物体相对于不同的参考物可有不同的运动内容. 物体 B 若相对于参考物 A 是运动的,那么反之,以 B 为参考物,物体 A 相对于 B 也是运动着的,这就是运动的相对性. 前人对运动相对性的认识曾经历了曲折的过程,日心说和地心说之争与其息息相关,布鲁诺为此献出了生命,已成世人皆知的一段悲壮史实.

在某参考系中,如果物体各部位运动情况相同,便可用其中任意一个点部位的运动来代表性地描述,这也可等效为将物体模型化为一个点,称为**质点**. 例如木块沿斜面平动滑下,虽将木块画成长方体,处理时却将其视为质点. 一般情况下,物体各部位运动不尽相同. 如果所讨论的范围远大于物体线度,各部位运动差异可以忽略,整个物体可处理成一个点状物,即为质点. 例如以太阳为参考物考察地球的运动时,可以略去地球各部位的运动差异,将地球视为一个质点. 各部位运动差异不能忽略的物体可分割成一系列足够小的部位,每个小部位可处理成点状小物体,又是质点. 这方面实例不胜枚举,从略为简.

综上所述,运动学中讨论的基本对象是质点. 对于质点,运动学中只阐述它的位置随时间的变化关系,本质上是点运动学,它既适用于有质的点,也适用于无质的点(例如投影点). 考虑到力学整体的研究对象是有质的物体,故仍称之为质点运动学.

1.2　直线运动

1.2.1　位移　速度　加速度

质点相对于某参考系在一条直线上运动时,为了方便,在这一参考系中可将 x (或 y 或 z) 坐标轴设置在此直线上,质点运动过程中的位置 x 随时间 t 的变化关系可表述成

$$x = x(t), \tag{1.1}$$

这可称为直线运动的**运动方程**.

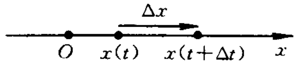


图　1-1

t 时刻质点位于 $x(t)$ 处,经 Δt 时间,质点位于 $x(t+\Delta t)$ 处,从 $x(t)$ 引一矢量到 $x(t+\Delta t)$ 称为位移矢量,简称**位移**,如图 1-1 所示. 这一位移可用带正负号的量

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \tag{1.2}$$

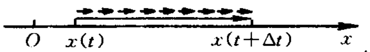
表示. Δx 为正时,位移指向 x 轴正方向,Δx 为负时,位移指向 x 轴负方向.

无穷小时间间隔对应的位移是无穷小位移,记作 $\mathrm{d}x$. 有限段时间间隔 Δt 对应的位移

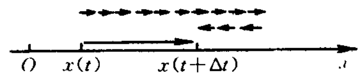
Δx 是一系列 $\mathrm{d}x$ 的叠加：

$$\Delta x = \sum_{t}^{t+\Delta t} \mathrm{d}x = \int_{t}^{t+\Delta t} \mathrm{d}x.$$

图 1-2(a)描述了质点运动方向不变情况下无穷小位移的叠加，图 1-2(b)描述了质点运动方向有一次改变的情况下无穷小位移的叠加.



(a)



(b)

图 1-2

路程 s 是另一个运动学量，意指 Δt 时间内质点经历的路线长度，计算公式为

$$s = \sum_{t}^{t+\Delta t} |\mathrm{d}x| = \int_{t}^{t+\Delta t} |\mathrm{d}x|.$$

参考图 1-2 所示的两种情况，可以理解 s 与位移绝对值 $|\Delta x|$ 间的普遍关系是

$$s \geqslant |\Delta x|.$$

Δx 给出的是 Δt 时间内质点运动的总效果，引入平均速度

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t,$$

可以在总效果的意义下描述质点的运动方向和在这一方向上运动的平均快慢程度. 平均速度也是矢量，$\bar{v}$ 为正时，指向 x 轴正方向，$\bar{v}$ 为负时，指向 x 轴负方向.

从上面的表述式可以看出，用 $\bar{v}$ 来描述质点运动的方向和快慢时，Δt 取得越大，描述越是粗略，Δt 取得越小，描述越是细致. 最细致的描述便是取 $\Delta t \to 0$，即取无穷小时间间隔量 $\mathrm{d}t$ 对应的 $\bar{v}$，这一平均速度称为瞬时速度，简称**速度**，记作

$$v = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

与平均速度一样，速度也是矢量. 在数学关系上，速度是位置对时间的一阶导数. 在 SI 单位制(即国际单位制)中，v 的单位是 m/s.

$\boldsymbol{v}$ 的绝对值 $|v|$ 称为速率，有时也省略地写作 v，阅读者需从行文中判定同一字符 v 究竟是表示速度还是速率.

许多实例中速度是会随时间变化的，v 也是 t 的函数. 为描述速度随时间变化的情况，可引入平均加速度

$$\bar{a} = \Delta v / \Delta t, \qquad \Delta v = v(t + \Delta t) - v(t),$$

其中 Δv 是 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻的过程中质点的速度增加量. 同样可以理解，用 a 来描述 v 的变化时，Δt 取得越小，描述越是细致. 于是，引入瞬时加速度，简称**加速度**，定义为

$$a = \mathrm{d}v / \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

加速度也是矢量，它的方向由 a 的正、负号确定. 某时刻 a 为正，意味着质点将朝 x 轴正方向加速. 此时，如果 v 为正，质点朝 x 轴正方向速度将加快；如果 v 为负，实际效果则是朝 x 轴负方向速度将变慢. 类似地可以讨论 a 为负时对应的两种情况，此处从略. 在 SI 单位制中，

a 的单位是 m/s².

(1.4)式表明，a 是 v 对 t 的一阶导数. 结合(1.3)式，可得

$$a = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2, \tag{1.5}$$

即 a 是 x 对 t 的二阶导数.

如果质点的位置 x 随时间 t 的变化关系已经给出，或者说质点的运动方程 $x=x(t)$ 已经获得，那么通过一阶、二阶导数可以确定质点的速度 v、加速度 a 随时间 t 的变化关系. 这表明，从数学观点来看，质点的运动方程已包括了运动的全部信息. 如果 a 也随 t 变化，数学上可以再求导数，引出一个譬如称为"加加速度"的量. 实际上没有普遍地这样做，原因是质点运动学的后续理论是质点动力学，其中的牛顿定律只涉及加速度，所以运动学主体内容也只介绍到加速度为止.

运动方程求导可得速度、加速度，反之，加速度积分可得速度，再积分可得运动方程. 例如已知质点在 $t=t_0$ 时刻的速度是 v_0，可据 $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，导出定积分算式：

$$\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t,$$

即得

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

再设 $t=t_0$ 时刻质点位于 x_0 处，类似地可得

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

v，a 随 t 的变化关系，也可分别用速度曲线、加速度曲线直观描述. 图 1-3(a)给出的是一个小球以 9.8 m/s 初速度从地面向上抛出，直到落地前一瞬间过程中的速度曲线和加速度曲线. 图 1-3(b)给出的是某质点作简谐振动时的速度曲线和加速度曲线，参量 v_m 是正方向最大振动速度，a_m 是正方向最大振动加速度，T 是振动周期.

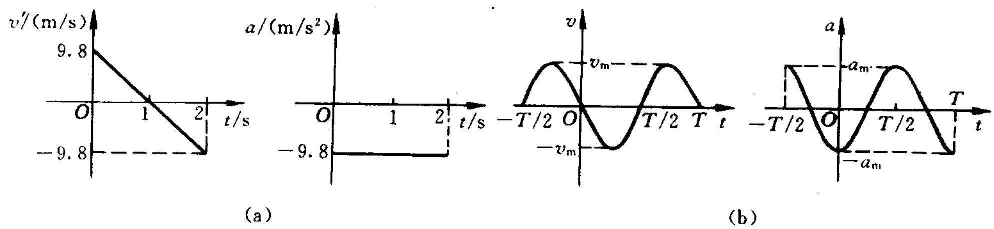


图 1-3

1.2.2 三类直线运动

直线运动可按加速度为零、常量、变量三种情况，分为**匀速**、**匀加速**、**变加速**三种类型.

匀速直线运动过程中速度是常量，质点的运动方向和速度大小保持不变. 火车在长直轨道上行驶，相当长的一段时间内可作匀速直线运动. 小球沿斜面滚落到水平大桌面上，桌面越光滑，小球在桌面上的运动越接近匀速直线运动. 雨滴从云层下落，速度从零开始增大，接

近某一极限值时，近似可认为不再变化，雨滴便是匀速直线降落. 这一极限值称为收尾速度，雨滴越大，收尾速度也越大. 收尾速度的存在，使得雨滴不会对人体有伤害.

匀加速直线运动过程中加速度是常量，记作

$$a = a_0.$$

如果 $t_0=0$ 时质点的速度为 v_0，位置为 x_0，由(1.6)、(1.7)式可得

$$v = v_0 + a_0 t, \tag{1.8}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.9}$$

此外，利用
$$a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v,$$

积分
$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a_0 \mathrm{d}x.$$

可得速度随位置的下述变换关系：

$$v^2(x) = v_0^2 + 2a_0(x - x_0). \tag{1.10}$$

上抛运动属于匀加速直线运动，加速度方向竖直向下，大小为常量 $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$. 物体向上抛出后，速度大小随时间线性减小，到最高点时降为零，而后速度方向朝下，速度大小随时间线性增大. 上抛运动中到达最高点后的下落运动，即为自由落体运动. 小木块沿平整的斜面向下滑动，如果木块与斜面间的摩擦情况处处相同，木块也作匀加速直线运动. 若无摩擦，斜面倾角设为 ϕ，小木块沿斜面向下的加速度便是常量 $g\sin\phi$.

变加速直线运动过程中，加速度不是常量. 宏观世界中影响物体运动的因素众多，观察到的直线运动多数属于变加速类型. 大气的阻碍作用不仅使得雨滴变加速下降，也使上抛物体的真实运动成为变加速直线运动.

变加速直线运动一例是弹簧振子的简谐振动，它的运动方程是

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0),$$

式中正量 A 称为振幅，ω 称为角频率，ϕ_0 称为初相位. 据(1.3)和(1.5)式，可得简谐振动的速度、加速度分别为

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0),$$

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x.$$

简谐振动的详细内容将在第 7 章中介绍.

例 1 在离地 36.0 m 高处，以 $v_0=11.8\,\mathrm{m/s}$ 的初速竖直上抛一小球，试求抛出后 1 s 和 3 s 末小球位置和速度，并确定小球可达到的最高位置和从抛出到落地所经时间.

解 为作基本练习，本题采用坐标法求解.

如图 1-4 所示. 以起抛点为原点，设置竖直向上的 y 坐标轴. 将抛出时刻定为 $t_0=0$，则有

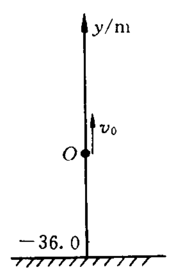


图 1-4

$$y_0 = 0, \qquad v_0 = 11.8\,\mathrm{m/s}, \qquad a = -g = -9.8\,\mathrm{m/s^2}.$$

依据关系式 $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \qquad v = v_0 + at,$

可算得

$t=1\,\mathrm{s}$ 时， $y_1=0+11.8\times1+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times1^2=6.9\,\mathrm{m}$ （在起抛点上方），

$v_1=11.8-9.8\times1=2.0\,\mathrm{m/s}$ （竖直向上），

$t=3\,\mathrm{s}$ 时， $y_2=\cdots=-8.7\,\mathrm{m}$ （在起抛点下方），

$v_2=\cdots=-17.6\,\mathrm{m/s}$ （竖直向下）.

小球到最高点 $y_{\max}$ 时，$v=0$，由 $v^2-v_0^2=2a(y-y_0)$，得

$$-v_0^2=-2gy_{\max}, \qquad y_{\max}=v_0^2/2g=7.1\,\mathrm{m}.$$

落地时刻记为 t_e，落地处 $y_e=-36.0\,\mathrm{m}$，结合 y-t 关系式，可解得

$$t_e=\begin{cases}4.17\,\mathrm{s},\\-1.76\,\mathrm{s}.\end{cases}$$

若小球不是题文所述，在 $t=0$ 时刻从 $y=0$ 处以 v_0 初速度向上抛出，而是在 $t_e=-1.76\,\mathrm{s}$ 时刻以某初速从 $y_e=-36.0\,\mathrm{m}$ 处(即从地面)向上抛出，那么到 $t=0$ 时刻，小球必达 $y=0$ 位置且具有题文所给向上速度 v_0. 然而，题文要求的是 $t_e>t_0$ 的解，故 $t_e=-1.76\,\mathrm{s}$ 解应舍去，小球从抛出到落地所经时间便是

$$\Delta t=t_e-t_0=4.17\,\mathrm{s}.$$

例 2 如图 1-5 所示，在倾角为 ϕ 的光滑斜面顶端有一小球 A 从静止开始自由下滑，与此同时，在斜面底部有一小球 B 从静止开始以匀加速度 a 在光滑水平面上背向斜面运动. 设 A 下滑到斜面底部能沿着光滑的小弯曲部分平稳地朝 B 运动，为使 A 不能追上 B，试求 a 的取值范围.

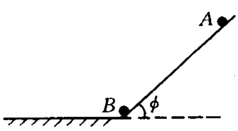


图 1-5

解 a 越小，A 越能追上 B. 设 a 取到某临界值时 A 恰能追上 B，超过此值 A 便不能追上 B. 下面先求 a 的这一临界值.

若将 A 到斜面底部的速度大小记为 v_A，则所经时间便是

$$t_1=v_A/g\sin\phi. \qquad ①$$

而后 A 匀速，B 匀加速，A 恰好能追上 B 的条件有两条：

(1) 又经 t_2 时间 A 追上 B，由路程有

$$v_At_2=\frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2, \qquad ②$$

(2) A 追上 B 时，B 的速度恰好已达 v_A，即有

$$v_A=a(t_1+t_2), \qquad ③$$

② ÷ ③ 式，可得 $$t_2=t_1,$$

继而有 $$v_A=2at_1. \qquad ④$$

①④式联立，即得 a 的临界值为

$$a=\frac{1}{2}g\sin\phi.$$

因此,为使 A 不能追上 B,则 a 的取值范围为

$$a > \frac{1}{2} g \sin\phi.$$

例 3 沿光滑直铁轨设置 x 轴,火车以额定功率在此铁轨上行驶时,它的加速度 a_x 与速度 v_x 的乘积是恒量,记作 C. 设 $t=0$ 时,火车的位置 $x=0$,速度 $v_x=v_0$,试求 v_x-t,a_x-t,v_x-x,x-t 诸关系式.

解 据题设,有

$$C = a_x v_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} v_x, \qquad v_x \mathrm{d}v_x = C\mathrm{d}t,$$

积分

$$\int_{v_0}^{v_x} v_x \mathrm{d}v_x = \int_0^t C\mathrm{d}t,$$

可得

$$v_x = \sqrt{v_0^2 + 2Ct}, \tag{①}$$

即有

$$a_x = C/v_x = C/\sqrt{v_0^2 + 2Ct},$$

可见火车作变加速直线运动.

由

$$C = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} v_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} v_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} v_x^2, \qquad v_x^2 \mathrm{d}v_x = C\mathrm{d}x,$$

积分

$$\int_{v_0}^{v_x} v_x^2 \mathrm{d}v_x = \int_0^x C\mathrm{d}x,$$

可得

$$v_x = \sqrt[3]{v_0^3 + 3Cx}, \tag{②}$$

①② 式联立,即得

$$x = \frac{1}{3C}\left[(v_0^2 + 2Ct)^{\frac{3}{2}} - v_0^3\right].$$

1.3 平面曲线运动

1.3.1 直角坐标系分解

将一个小球斜抛出,略去空气阻碍作用,落地前它会沿一条抛物线运动;同步卫星在赤道上空确定高度处绕着地球中心作圆周运动;相对于太阳,地球在作椭圆运动. 这些运动都是平面曲线运动.

在质点运动的平面上设置固定的直角坐标框架 Oxy,质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 可分解成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j},$$

运动中 $\boldsymbol{r}$ 随 t 的变化关系可表达成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \tag{1.11}$$

称为质点的平面曲线运动方程. 这一运动方程有两个分量式:

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \tag{1.12}$$

这意味着平面曲线运动可正交地分解为两个直线运动,如图 1-6 所示.