现代数学基础丛书 93

模李超代数

张永正　刘文德　著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要讨论 Cartan 型模李超代数，其中包括作者近年来在模李超代数方向上的研究成果. 书中构造了四类 Cartan 型模李超代数，讨论了李超代数的结合型与深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数，介绍了形式向量场上的两类无限维的 Cartan 型李超代数.

本书可作为数学系、计算机系的研究生读物，也可供相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

模李超代数/张永正，刘文德著. —北京：科学出版社，2004
(现代数学基础丛书；93)
ISBN 7-03-014009-5
Ⅰ.模… Ⅱ.①张… ②刘… Ⅲ.李代数 Ⅳ.O152.5
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 075889 号

责任编辑：吕 虹 张 扬／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年9月 第 一 版 开本：B5(720×1000)
2004年9月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—3 000 字数：234 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003年8月

前　言

在物理学中，为了建立相对论的费米子与玻色子的统一理论，1974 年 Wess 和 Zumino 提出了超对称性，将普通时空满足的 Poincarè 李代数(即非齐次 Lorentz 代数)扩充为超 Poincarè 代数. 于是将有限个具有不同内部量子数的玻色子与费米子放在李超代数的一个不可约表示中，从此关于李超代数的研究有了迅速的发展. 从数学的角度来看，在非模的李超代数(即特征零的域上的李超代数)的研究中，具有里程碑意义的结果当属 V.G.Kac 于 1977 年完成的特征零代数闭域上有限维单李超代数的分类. 现在，非模李超代数的研究已经取得了相当系统的结果. 于是自然地考虑到模李超代数(即素特征域上的李超代数) 的情况. 但是，由于基础域的特征数不同，非模李超代数的主要研究方法不能转移到模李超代数. 因此不能相仿于非模的情形研究模李超代数.

我们知道，自从 1968 年 A.I.Kostrikin 的文章发表以后，模李代数(即素特征域上的李代数) 的研究有了长足的发展. 经过多位数学家几十年的共同努力，特别是 H. Strade 的杰出工作，最终于 1989 年完成了特征数大于 7 的代数闭域上单的有限维李代数的分类. 至今，模李代数已经有了丰富的理论. 尽管模李代数与模李超代数有很大的差异，但是模李代数的理论为模李超代数的研究提供了考虑问题的方法和途径，从而我们进行了模李超代数的某些研究工作. 本书主要反映了作者近年来在模李超代数方向上的研究成果.

目前模李超代数的研究仍处在前期的发展阶段，研究结果较少，尚无模李超代数的专门书籍. 现根据我们的工作撰写了这本书. 因为非模的李超代数与模李超代数的差别在于 Cartan 型代数，所以本书主要讨论 Cartan 型模李超代数.

本书共分六章. 第一章首先介绍了本书所需要的基本概念.然后通过刻画除幂代数与外代数的张量积的特殊导子，构作了四类有限维 Cartan 型模李超代数. 它们的 $\mathbb{Z}$ -阶化与 $\mathbb{Z}_2$ -阶化是不相容的，在非模的情形不存在这样的有限维 Cartan 型李超代数.

第二章证明了四类有限维 Cartan 型模李超代数的单性. 进而分别确定了它们的导子超代数.

第三章构造了任一李超代数到 W 型李超代数的同态, 从而得到了任一单李超代数均同构于 W 型李超代数的一个子代数. 进而, 本章证明了四类 Cartan 型模李超代数的滤过不变性, 于是得出定义它们的整数 m, n 与 m 元整数组 $\underline{t}$ 是内蕴的.

第四章讨论了有限维李超代数的结合型. 首先讨论了单李超代数的结合型,进而刻画了单的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数的结合型, 之后确定了 Cartan 型模李超代数的结合型, 并且证明了有限维李超代数的任一表示的迹型必为偶的结合型.

第五章证明了深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数的嵌入定理. 利用嵌入定理, 通过旗的方法确定了底部分别为一般与特殊线性李超代数的具有可迁 $\mathbb{Z}$-阶化的模李超代数.

第六章讨论了深度 1 的 $\mathbb{Z}$-阶化模李超代数的表示, 首先将沈光宇的混合积的方法推广到李超代数. 从而构造了 W, S 与 H 型李超代数的阶化模, 并且给出了 H 型李超代数的阶化模为不可约模的一个充分条件. 讨论了 V. G. Kac 在 1998 年分类无限维的线性紧致单李超代数中的两个重要的例子: 形式向量场的一般与特殊李超代数. 目的是使读者看到 ad-拟幂零元在 $\mathbb{Z}$-阶化李超代数研究中的作用.

由于有限维的单的非模李超代数的分类早已解决, 所以, 有限维的单的模李超代数的分类就成为重要的研究课题. 我们希望本书构造的四类有限维 Cartan 型模李超代数、嵌入定理以及利用底部确定 $\mathbb{Z}$-阶化模李超代数等结果能为有限维模李超代数的分类起到抛砖引玉的作用. 除了分类问题之外, 模李超代数的表示也有许多重要问题需要解决. 我们知道限制李超代数是满足特定条件的模李超代数. 限制李超代数的结构、分类与表示也都有相当大的研究空间. 我们还希望本书能够成为研究以上诸问题人员的有益的参考书.

最后, 作者对哈尔滨师范大学优秀专著出版基金为本书的资助表示感谢.

作　者

2004 年 6 月

目　　录

第一章　Cartan 型模李超代数的构作

§1　基 本 概 念

本节主要介绍基本概念. 在本节中, 基域 $\mathbb{F}$ 的特征数可以是任意的. 我们知道, 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 A 称作 $\mathbb{F}$ 上的代数, 如果除了数乘和 A 的加法运算外, A 还有一个乘法运算 (用 xy 表示 x 与 y 的乘积, $\forall x, y \in A$), 并且满足以下条件:

1) $x(y+z) = xy + xz,\quad (y+z)x = yx + zx,$

2) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y),\ \forall x, y, z \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}.$

如果代数 A 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间, 则称 A 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维代数.

如果代数 A 的乘法满足结合律, 则称 A 为结合代数; 如果代数 A 的乘法满足交换律, 则称 A 为交换代数.

如果代数 A 的乘法满足以下条件:

1) $x^2 = 0,\ \forall x \in A,$

2) $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0,\quad \forall x, y, z \in A,$ (Jacobi 等式),

则称 A 为李代数.

在本书中, $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别表示整数集、正整数集与非负整数集, $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 表示整数模 2 的剩余类环. 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上代数, 并且 A 还是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间, 即 A 可分解为子空间的直和: $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$. 如果 $A_\theta A_\mu \subseteq A_{\theta+\mu},\ \forall \theta, \mu \in \mathbb{Z}_2$, 则称 A 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数. 同样, 若超代数 A 的乘法适合结合律, 则称 A 为结合超代数.

若 T 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的子集, 则本书用 $\mathrm{span}_{\mathbb{F}}T$ 表示由 T 张成的 V 的子空间.

例 1.1　设 $\Lambda(n)$ 是由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的有 1 的 $\mathbb{F}$ 上的结合代数, 且满足关系式: $x_i x_j = -x_j x_i$, 其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 则称 $\Lambda(n)$ 是具有 n 个变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $\mathbb{F}$ 上的外代数. 令

$$\Lambda(n)_{\bar{0}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{1, x_{i_1}, \cdots, x_{i_r} \mid 1 \le i_1, \cdots, i_r \le n,\ 2 \le r \le n,\ r\text{是偶数}\},$$

$$\Lambda(n)_{\bar{1}} = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r} \mid 1 \le i_1, \cdots, i_r \le n,\ 1 \le r \le n,\ r\text{是奇数}\},$$

则 $\Lambda(n) = \Lambda(n)_{\bar{0}} \oplus \Lambda(n)_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数, 并称如上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化为 $\Lambda(n)$ 的自然 $\mathbb{Z}_2$- 阶化.

设 $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ 是超代数, 若 $x \in A_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$, 则称 x 是次数 θ 的 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素, 并记 $\mathrm{d}(x) = \theta$. 在本书中, 若 $\mathrm{d}(x)$ 出现在超代数的某个表达式中, 则约定 x 是 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素. 当然, 此表达式可按超代数的性质扩张到超代数的任意元素上 (扩张后的表达式的形状可能有所改变). 我们用 $\mathrm{hg}(A)$ 表示超代数 A(或 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间 A) 的所有 $\mathbb{Z}_2$- 齐次元素的集合. 显然 $\mathrm{hg}(A) = A_{\bar{0}} \cup A_{\bar{1}}$.

定义 1.2 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数, 它的乘法运算用 $[\ ,\ ]$ 表示. 如果

$$[x,\ y] = -(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ x], \quad \forall x, y \in \mathrm{hg}(L), \tag{1.1}$$

$$(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}[x,\ [y,\ z]] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ [z,\ x]] + (-1)^{\mathrm{d}(y)\mathrm{d}(z)}[z,\ [x,\ y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathrm{hg}(L), \tag{1.2}$$

则称 L 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数.

我们称 (1.2) 式为阶化 Jacobi 等式. 由于李超代数是超代数, 故 $[\ ,\ ]$ 运算是双线性的.

在定义 1.2 中, 若 $L_{\bar{1}} = 0$, 则 L 就是李代数. 因此, 如不特别声明, 我们总设 $L_{\bar{1}} \neq 0$.

下面我们证明, 以上定义中的 (1.2) 式可由下式代替:

$$[x,\ [y,\ z]] = [[x,\ y],\ z] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y,\ [x,\ z]], \quad \forall x, y \in \mathrm{hg}(L), \quad z \in L. \tag{1.3}$$

事实上, 若 (1.3) 式成立, 设 $z \in \mathrm{hg}(L)$, 将 (1.3) 式两边同乘以 $(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}$, 利用 (1.1) 式, 即可得到 (1.2) 式. 反之, 若 (1.2) 式成立, 将 (1.2) 式两端同乘以 $(-1)^{\mathrm{d}(z)\mathrm{d}(x)}$, 利用 (1.1) 式同样可知 (1.3) 式对任意 $x, y, z \in \mathrm{hg}(L)$ 成立. 任取 $z \in L$, 可设 $z = z_0 + z_1$, 其中 $z_0 \in L_{\bar{0}},\ z_1 \in L_{\bar{1}}$, 则有

$$\begin{aligned}
[x, [y, z]] &= [x, [y, z_0 + z_1]] = [x, [y, z_0]] + [x, [y, z_1]] \\
&= [[x, y], z_0] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z_0]] \\
&\quad + [[x, y], z_1] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z_1]] \\
&= [[x, y], z] + (-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}[y, [x, z]].
\end{aligned}$$

所以, 对任意 $x, y \in \mathrm{hg}(L),\ z \in L$, (1.3) 式均成立.

设 H, K 是李超代数 L 的子空间, 令

$$[H, K] = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}\{[x, y] \mid x \in H,\ y \in K\}.$$

显然, $[H, K] = \{\sum_i [x_i, y_i] \mid x_i \in H,\ y_i \in K\}$, 这里 $\sum_i [x_i, y_i]$ 表示有限个 $[x_i, y_i]$ 之和. 设 H, K, I 是 L 的子空间, 利用 (1.3) 与 (1.1) 式可得

$$\begin{aligned}
[H, [K, I]] &\subseteq [[H, K], I] + [K, [H, I]] \\
&= [I, [H, K]] + [K, [I, H]].
\end{aligned} \tag{1.4}$$

定义 1.3 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是李超代数, H 是 L 的子空间, 令 $H_\theta = H \cap L_\theta,\ \forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 若 $H = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$, 则称 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

引理 1.4 以下命题成立.

1) 设 H 是李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的子空间, 则 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间当且仅当 H 中任一元素 x 均可表为 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta,\ \theta \in \mathbb{Z}_2$.

2) 若 H, K 是李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 则 $H+K$, $H \cap K$ 与 $[H, K]$ 也是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

证明 由 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间的定义可直接推得 1). 下面证 2).

任取 $x+y \in H+K$, 其中 $x \in H$, $y \in K$. 因为 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 故可设 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta$, $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 同理可设 $y = y_{\bar{0}} + y_{\bar{1}}$, 其中 $y_\theta \in K_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 则

$$x + y = (x_{\bar{0}} + y_{\bar{0}}) + (x_{\bar{1}} + y_{\bar{1}}).$$

因为 $x_\theta + y_\theta \in H_\theta + K_\theta = H \cap L_\theta + K \cap L_\theta \subseteq (H+K) \cap L_\theta = (H+K)_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$, 所以, 由 1) 知 $H+K$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

任取 $x \in H \cap K$, 则 $x \in H$. 因 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 故可设 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in H_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 由 $x \in K$, 同理可设 $x = x'_{\bar{0}} + x'_{\bar{1}}$, 其中 $x'_\theta \in K_\theta$. 因为 x 在 $L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 中的分解式是惟一的, 所以 $x_\theta = x'_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 因此

$$\begin{aligned} x_\theta = x'_\theta \in H_\theta \cap K_\theta &= (H \cap L_\theta) \cap (K \cap L_\theta) = (H \cap K) \cap L_\theta \\ &= (H \cap K)_\theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

由 1) 知 $H \cap K$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

任取 $x \in [H, K]$, 则 $x = \sum_i [x_i, y_i]$, 这里 $x_i \in H$, $y_i \in K$. 因为 H 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 故可设 $x_i = x_{i\bar{0}} + x_{i\bar{1}}$, 其中 $x_{i\theta} \in H_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 同理可设 $y_i = y_{i\bar{0}} + y_{i\bar{1}}$, 其中 $y_{i\theta} \in K_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 于是

$$\begin{aligned} x &= \sum_i [x_{i\bar{0}} + x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}} + y_{i\bar{1}}] \\ &= \sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{0}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{1}}]) + \sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{1}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}}]). \end{aligned}$$

显然

$$\sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{0}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{1}}]) \in [H, K] \cap L_{\bar{0}} = [H, K]_{\bar{0}},$$

$$\sum_i ([x_{i\bar{0}}, \ y_{i\bar{1}}] + [x_{i\bar{1}}, \ y_{i\bar{0}}]) \in [H, K]_{\bar{1}}.$$

由 1) 知, $[H, K]$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. □

若 H 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且 H 关于 L 的方括号运算是封闭的, 则称 H 是 L 的子代数. 设 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 如果对任意 $x \in I$, $y \in L$, 均有 $[x, y] \in I$, 则称 I 是 L 的理想.

我们的定义要求子代数与理想必为 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 以下的引理指出了这一要求的理由.

引理 1.5 设 I 是李超代数 L 的理想, 则 $L/I := \{x + I \mid x \in L\}$ 关于 L 的诱导的加法与数乘是一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间, 进而 L 的 $[\,,\,]$ 运算诱导了 L/I 的一个 $[\,,\,]$ 运算, 使得 L/I 是一个李超代数.

证明 我们记 $\overline{L}=L/I$. L 的加法与数乘自然地诱导了 $\overline{L}$ 的加法与数乘运算, 使得 $\overline{L}$ 是一个线性空间. 设 $\overline{L}_\theta=\{x+I\mid x\in L_\theta\}$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$. 显然 $\overline{L}=\overline{L}_{\bar{0}}+\overline{L}_{\bar{1}}$. 令

$$0\neq x+I\in\overline{L}_{\bar{0}},\quad 0\neq y+I\in\overline{L}_{\bar{1}},$$

则有

$$x\in L_{\bar{0}}\backslash I,\quad y\in L_{\bar{1}}\backslash I. \tag{1.5}$$

若 $x+I=y+I$, 则 $x+(-y)\in I$. 因为 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 所以 $x\in I\cap L_{\bar{0}}$, $-y\in I\cap L_{\bar{1}}$. 此与 (1.5) 式矛盾, 于是 $x+I\neq y+I$, 因此 $\overline{L}_{\bar{0}}\cap\overline{L}_{\bar{1}}=0$, 从而 $\overline{L}=\overline{L}_{\bar{0}}\oplus\overline{L}_{\bar{1}}$. 这就证明了 $\overline{L}$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间.

易见 L 的 $[\,,\,]$ 运算自然地诱导了 $\overline{L}$ 的 $[\,,\,]$ 运算, 使得 $\overline{L}$ 是一个李超代数. □

我们称李超代数 L/I 为 L 对理想 I 的商代数.

设 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 则 I 与 J 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 由引理 1.4 知 $[I,J]=[I,J]_{\bar{0}}\oplus[I,J]_{\bar{1}}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 利用阶化 Jacobi 等式可以证明 $[I,J]$ 还是 L 的理想. 特别地, $[L,L]$ 是 L 的理想, 当然它是 L 的子代数. 借用李代数与群论的语言, 称 $[L,L]$ 为 L 的换位子代数.

定义 1.6 *若李超代数 L 只有平凡理想, 并且 $[L,L]\neq 0$, 则称 L 是单李超代数.*

定义 1.6 中的条件 $[L,L]\neq 0$ 使得零李超代数与一维交换李超代数不是单李超代数.

设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 与 $A'=A'_{\bar{0}}\oplus A'_{\bar{1}}$ 是超代数, $\phi:A\to A'$ 是线性映射. 若 $\phi(A_\theta)\subseteq A'_\theta$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$, 则称 ϕ 是偶的线性映射. 若偶的线性映射 ϕ 还满足: $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$, $\forall x,y\in A$, 则称 ϕ 是 A 到 A' 的同态映射. 如果 ϕ 是 A 到 A' 的满的同态映射, 我们称 A' 是 A 的同态象, 或称 A 与 A' 同态, 记为 $A\sim A'$. 若同态映射 ϕ 是双射, 则称 ϕ 是同构映射, 此时称 A 与 A' 同构, 记为 $A\cong A'$. 易见, 同构关系是一个等价关系. 此外, A 到 A 自身的同构映射称为 A 的自同构. 当然, 以上同态与同构的概念适合于李超代数, 但是需要将代数的乘法写成方括号的形式. 李代数的同态与同构定理对李超代数仍然成立.

1) 若 $\phi:L\to L'$ 是李超代数的同态映射, 则 $\ker\phi:=\{x\in L\mid\phi(x)=0\}$ 是 L 的理想, 并且 $L/\ker\phi\cong\mathrm{Im}\phi$.

2) 若 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 使得 $I\subseteq J$, 则 J/I 是 L/I 的理想, 并且 $(L/I)/(J/I)$ 自然同构于 L/J.

3) 若 I 与 J 是李超代数 L 的理想, 则 $(I+J)/J$ 同构于 $I/(I\cap J)$.

例 1.7 *设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 是结合超代数. 在 A 上定义双线性的方括号乘法, 使得*

$$[x,y]=xy-(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}yx,\qquad\forall x,y\in\mathrm{hg}(A).$$

直接验证可知, 关于此方括号乘法, A 是一个李超代数, 称它为与结合代数 A 关联的李超代数, 记为 A^-.

例 1.8 设 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间, $\mathrm{End}(V)$ 是 V 的所有线性变换构成的线性空间. 任取 $\theta\in\mathbb{Z}_2$, 令

$$\mathrm{End}_\theta(V)=\{x\in\mathrm{End}(V)\mid x(V_\mu)\subseteq V_{\mu+\theta},\forall\mu\in\mathbb{Z}_2\}.$$

易见, $\mathrm{End}(V)=\mathrm{End}_{\bar{0}}(V)\oplus\mathrm{End}_{\bar{1}}(V)$. 于是, 关于线性变换的乘法, $\mathrm{End}(V)$ 是一个结合超代数. 由例 1.7 知, $\mathrm{End}(V)^-$ 是李超代数. 我们简记 $\mathrm{End}(V)^-$ 为 $\mathrm{pl}(V)$. 于是 $\mathrm{pl}(V)=\mathrm{pl}_{\bar{0}}(V)\oplus\mathrm{pl}_{\bar{1}}(V)$, 其中 $\mathrm{pl}_\theta(V)=\mathrm{End}_\theta(V)$, $\forall\theta\in\mathbb{Z}_2$. 因为 $\mathrm{pl}(V)$ 在李超代数中的作用与 $\mathrm{gl}(V)$ 在李代数中的作用相仿, 所以称 $\mathrm{pl}(V)$ 为 V 的一般线性李超代数.

定义 1.9 设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $V=V_{\bar{0}}+V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间. 则称李超代数的同态映射 $\rho: L\to\mathrm{pl}(V)$ 为 L 在 V 上的一个表示.

定义 1.10 设 $L=L_{\bar{0}}\oplus L_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化线性空间. 若 V 被赋予一个运算 $L\times V\to V$, 使得 $(x,v)\mapsto xv$, $\forall x\in L$, $v\in V$, 且满足:

1) $(\lambda x+\eta y)v=\lambda(xv)+\eta(yv)$, $\quad\forall\lambda,\eta\in\mathbb{F}$, $x,y\in L$, $v\in V$,

2) $x(\lambda v+\eta w)=\lambda(xv)+\eta(xw)$, $\quad\forall\lambda,\eta\in\mathbb{F}$, $x\in L$, $v,w\in V$,

3) 若 $x\in L_\theta$, $v\in V_\mu$, 其中 $\theta,\mu\in\mathbb{Z}_2$, 则 $xv\in V_{\theta+\mu}$,

4) $[x,y]v=x(yv)-(-1)^{\mathrm{d}(x)\mathrm{d}(y)}y(xv)$, $\forall x,y\in\mathrm{hg}(L)$, $v\in V$,

则称 V 是一个 L- 模.

设 ρ 是 L 在 V 上的一个表示. 令 $xv:=\rho(x)(v)$, $\forall x\in L$, $\forall v\in V$. 直接验证可知, 如上定义的乘法使得 V 是一个 L- 模, 称之为表示 ρ 提供的 L- 模. 反之, 给出一个 L- 模 V, 可定义映射 $\rho: L\to\mathrm{pl}(V)$, 使得 $\rho(x)(v):=xv$, $\forall x\in L$, $v\in V$, 则 ρ 是 L 在 V 上的一个表示. 因此, 李超代数的表示的研究可以转化为李超代数的模的研究, 反之亦然.

例 1.11 设 L 是李超代数, $x\in L$, 令 $\mathrm{ad}\,x(z)=[x,z]$, $\forall z\in L$. 易见 $\mathrm{ad}\,x\in\mathrm{pl}(L)$. 设 $\mathrm{ad}: L\to\mathrm{pl}(L)$ 是映射, 使得 $x\mapsto\mathrm{ad}\,x$, $\forall x\in L$. 显然 ad 是偶的线性映射. 利用 $\mathrm{d}(\mathrm{ad}\,x)=\mathrm{d}(x)$, $\mathrm{d}(\mathrm{ad}\,y)=\mathrm{d}(y)$ 以及 (1.3) 式可得

$$[\mathrm{ad}\,x,\mathrm{ad}\,y](z)=\mathrm{ad}[x,y](z),\quad\forall x,y\in\mathrm{hg}(L),\quad\forall z\in L,$$

于是 $\mathrm{ad}[x,y]=[\mathrm{ad}\,x,\mathrm{ad}\,y]$, $\forall x,y\in L$. 所以 ad 是 L 在 L 上表示, 称 ad 为 L 的伴随表示.

定义 1.12 设 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的超代数, $D\in\mathrm{pl}_\theta(A)$, 其中 $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 如果

$$D(xy)=D(x)y\oplus(-1)^{\theta\mathrm{d}(x)}xD(y),\quad\forall x\in\mathrm{hg}(A),\quad\forall y\in A,$$

则称 D 是 A 的次数为 θ 的齐次导子.

令 $\mathrm{Der}_\theta(A)$ 为 A 的所有次数为 θ 的齐次导子的集合, 这里 $\theta\in\mathbb{Z}_2$. 定义

$$\mathrm{Der}(A):=\mathrm{Der}_{\bar{0}}(A)\oplus\mathrm{Der}_{\bar{1}}(A).$$

可以证明, $\mathrm{Der}(A)$ 是 $\mathrm{pl}(A)$ 的子代数. 称李超代数 $\mathrm{Der}(A)$ 为 A 的导子超代数, 并称 $\mathrm{Der}(A)$ 的元素为 A 的导子.

例 1.13 设 L 是李超代数, $x \in L_\theta$, 其中 $\theta \in \mathbb{Z}_2$. 利用 (1.3) 式可知, $\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Der}_\theta(L)$, 我们称 $\mathrm{ad}\,x$ 为 L 的内导子.

定义 1.14 设 $A = A_{\overline{0}} \oplus A_{\overline{1}}$ 是超代数. 若 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$, 其中 A_i 是 A 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且 $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, 则称 A 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数. 若 $A_{\overline{0}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i}$, $A_{\overline{1}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_{2i+1}$, 则称 A 的 $\mathbb{Z}$- 阶化与 $\mathbb{Z}_2$- 阶化是相容的.

定义 1.15 设 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数, 若 $x \in A_i$, 则称 x 是 $\mathbb{Z}$- 齐次元素, 并且称 x 的 $\mathbb{Z}$- 次数为 i, 记为 $\mathrm{zd}(x) = i$. 为方便, 我们约定零元素的 $\mathbb{Z}$- 次数可以是任何整数. 此外, 当我们称 $A = \bigoplus_{i\geq -r} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数时(这里 r 是非负整数), 我们约定：当 $i < -r$ 时, $A_i = 0$. 同样, 若 $A = \bigoplus_{i=-r}^{t} A_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化超代数(这里 r 与 s 是非负整数), 则约定：当 $i < -r$ 或者 $i > t$ 时, $A_i = 0$.

显然, 若 $\mathrm{zd}(x) = i$, $\mathrm{zd}(y) = j$, 其中 $x, y \in A$, 则 $\mathrm{zd}(xy) = i + j$.

若李超代数 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化的, 则 L_0 是 L 的子代数. 由 $[L_0, L_i] \subseteq L_i$ 知, L_i 是 L_0- 模, 其中 $i \in \mathbb{Z}$.

设 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数.

1) 若对任意 $i \in \mathbb{N}_0$, 均有 $\{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\} = 0$, 则称 L 在此 $\mathbb{Z}$- 阶化之下是可迁的, 或简称 L 是可迁的.

2) 若 L_0- 模 L_{-1} 是不可约的, 则称 L 在此 $\mathbb{Z}$- 阶化之下是不可约的, 或简称 L 是不可约的.

命题 1.16 设 $L = \oplus_{i\geq -1} L_i$ 是 $\mathbb{Z}$- 阶化李超代数, 并且 $L_{-1} \neq 0$. 若 L 是单李超代数, 则

1) L 是可迁的,

2) L 是不可约的,

3) $[L_{-1}, L_1] = L_0$.

证明 设 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 使得

$$[L_0, I] \subseteq I, \quad [L_{-1}, I] \subseteq I. \tag{1.6}$$

令 $L^+ = \oplus_{i\geq 1} L_i$. 显然

$$[L_0, L^+] \subseteq L^+. \tag{1.7}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}_0$, 置

$$I^n = [L^+, [L^+, \cdots, [L^+, I] \cdots]] \qquad (\text{共 } n \text{ 个 } L^+).$$

设 $\widetilde{I} = \sum_{n\geq 0} I^n$. 由引理 1.4 的 2) 可推得, $\widetilde{I}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 显然

$$[L^+, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}. \tag{1.8}$$

我们对 n 用归纳法证明

$$[L_0, I^n] \subseteq \widetilde{I}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.9}$$

当 $n = 0$ 时, 由 (1.6) 式知, $[L_0, I^0] = [L_0, I] \subseteq I \subseteq \widetilde{I}$. 假设 $[L_0, I^{n-1}] \subseteq \widetilde{I}$, 利用 (1.4), (1.7)~(1.9) 式知

$$\begin{aligned}
[L_0, I^n] &= [L_0, [L^+, I^{n-1}]] \\
&\subseteq [[L_0, L^+], I^{n-1}] + [L^+, [L_0, I^{n-1}]] \\
&\subseteq [L^+, I^{n-1}] + [L^+, \widetilde{I}] \\
&\subseteq I^n + \widetilde{I} \\
&= \widetilde{I},
\end{aligned}$$

归纳法完成. 相仿地, 利用 (1.4), (1.6)~(1.9) 式, 对 n 用归纳法可证得 $[L_{-1}, I^n] \subseteq \widetilde{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. 所以

$$[L_0, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}, \quad [L_{-1}, \widetilde{I}] \subseteq \widetilde{I}. \tag{1.10}$$

由 (1.8) 与 (1.10) 式知, $\widetilde{I}$ 是 L 的理想.

1) 令 $I = \{x \in \oplus_{i \geq 0} L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\}$.

显然 I 是 L 的子空间, 设 $L_{(0)} = \oplus_{i \geq 0} L_i$. 由引理 1.4 知, $L_{(0)}$ 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 任取 $x \in I$, 则 $x \in L_{(0)}$. 故 $x = x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}$, 其中 $x_\theta \in (L_{(0)})_\theta \subseteq L_\theta$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 由 $x \in I$ 知 $[x, L_{-1}] = 0$. 故

$$[x_{\bar{0}} + x_{\bar{1}}, (L_{-1})_\theta] = 0, \ \forall \theta \in \mathbb{Z}_2.$$

于是 $[x_{\bar{0}}, (L_{-1})_\theta] = 0$, $\forall \theta \in \mathbb{Z}_2$. 因 L_{-1} 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化的, 所以 $[x_{\bar{0}}, L_{-1}] = 0$. 因此 $x_{\bar{0}} \in I$, 故 $x_{\bar{0}} \in I \cap L_{\bar{0}} = I_{\bar{0}}$. 同理 $x_{\bar{1}} \in I_{\bar{1}}$. 由引理 1.4, I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间.

由 (1.4) 式知, $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间 I 适合 (1.6) 式. 由 (a) 知 $\widetilde{I}$ 是 L 的理想. 因为 $I \subseteq L_{(0)}$, 所以 $\widetilde{I} \subseteq L_{(0)}$. 因此 $\widetilde{I}$ 是 L 的真理想. 由于 L 是单李超代数, 因而 $\widetilde{I} = 0$. 于是对任意 $i \in \mathbb{N}_0$, 有

$$\{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] = 0\} \subseteq \widetilde{I} = 0.$$

这就证明了 L 是可迁的.

2) 设 I 是 L_0- 模 L_{-1} 的非零子模. 则 I 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间, 并且满足 (1.6) 式. 由 (a) 知 $\widetilde{I}$ 是 L 的理想. 因为 $I \neq 0$, 故 $\widetilde{I} \neq 0$. 由于 L 是单的, 所以 $\widetilde{I} = L$. 由 $\widetilde{I}$ 的定义知 $\widetilde{I} \subseteq I \oplus L_{(0)}$, 从而 $L \subseteq I \oplus L_{(0)}$. 这就迫使 $I = L_{-1}$. 因此 L 是不可约的.

3) 设 $J = L_{-1} \oplus [L_{-1}, L_1] \oplus L^+$. 由引理 1.4 知, J 是 L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化子空间. 易见 $[L_{-1}, J] \subseteq J$, $[L^+, J] \subseteq J$. 利用 (1.4) 式知, $[L_0, J] \subseteq J$. 所以 $[L, J] \subseteq J$, 于是 J 是 L 的理想. 因为 L 是单的, 故 $J = L$. 这就迫使 $[L_{-1}, L_1] = L_0$. □

定义 1.17 设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, U 是 $\mathbb{F}$ 上的结合超代数. 设 $i: L \to U^-$ 是李超代数的同态. 若对 $\mathbb{F}$ 上任意结合超代数 A 与任意李超代数的

同态 $f: L \to A^-$, 都存在惟一的结合超代数的同态 $\bar{f}: U \to A$, 使得 $f = \bar{f}i$, 那么我们称 (U, i) 为李超代数 L 的泛包络代数, 通常简称 U 为 L 的泛包络代数.

我们可构造 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 的泛包络代数如下: 设 $T(L) = \bigoplus_{r\geq 0} T^r(L)$ 是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化空间 L 的张量代数, 其中 $T^r(L) = L \otimes L \otimes \cdots \otimes L$ (r个 L). L 的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $T(L)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 使得 $T(L)$ 是一个结合超代数. 令 R 是由所有形如

$$[x, y] - x \otimes y + (-1)^{\mathrm{d}(x)\,\mathrm{d}(y)} y \otimes x, \quad x, y \in \mathrm{hg}(L),$$

的元素生成的 $T(L)$ 的理想. 置 $U = T(L)/R$. 显然, 自然映射 $L \to U$ 诱导了李超代数的同态 $i: L \to U^-$, 则 (U, i) 是 L 的泛包络代数. 所以李超代数 L 的泛包络代数是存在的. 由定义 1.17 知, 在同构的意义下, L 的泛包络代数是惟一的.

文献 [46] 证明了李超代数 L 的泛包络代数 U 的基元素定理, 也称为 PBW 定理, 下面叙述这个定理.

PBW 定理　设 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的李超代数, $x_1, \cdots, x_m$ 是 $L_{\bar{0}}$ 的 $\mathbb{F}$- 基底, $y_1, \cdots, y_n$ 是 $L_{\bar{1}}$ 的 $\mathbb{F}$- 基底. 设 U 是 L 的泛包络代数, 则所有形如

$$x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} y_{i_1} \cdots y_{i_t}$$

的元素构成了 U 的 $\mathbb{F}$- 基底, 其中 $k_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, m$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$.

§2　Cartan 型模李超代数的构作 [106]

为定义 Cartan 型模李超代数, 我们需要外代数的导子超代数的自由基. 为此, 我们确定外代数的导子超代数. 首先叙述 $\mathbb{F}$ 上自由代数的定义. 考察用字母 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 作成的一切形式元

$$\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_m \leq n. \tag{2.1}$$

设 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是以这些形式元为基底张成的 $\mathbb{F}$ 上的线性空间. 在 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的基底 (2.1) 上规定如下的乘法表

$$(\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m})(\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_k}) = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\xi_{j_2}\cdots\xi_{j_k}.$$

这样, 利用基底 (2.1) 乘法表可以定义 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的一个关于加法分配的乘法, 使得 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的结合代数. 我们称 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 为非交换未定元 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 生成的自由代数.

显然, $\mathrm{d}(\xi_i) = \bar{1}$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 定义了 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化, 使得 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是一个结合超代数. 设

$$S = \{\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

显然 $S \subseteq \widetilde{\Lambda}(n)_{\bar{0}} \subseteq \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$. 设 I 是由 S 生成的 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的理想.

引理 2.1　*设 $Q \in \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 则 $Q\xi_j - (-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_j Q \in I$, 其中 $j = 1, 2, \cdots, n$.*

证明 1) 先证 Q 是 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的单项式的情形. 设 $Q=\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}$. 对 k 用归纳法证明引理结论成立. 当 $k=1$ 时结论显然成立. 假设对 $k-1$ 结论成立. 设 $Q_1=\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_{k-1}}$, 则 $Q=Q_1\xi_{i_k}$. 由归纳假设,

$$\begin{aligned}&Q\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ\\&=Q_1\xi_{i_k}\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ_1\xi_{i_k}\\&=-Q_1\xi_j\xi_{i_k}+Q_1(\xi_j\xi_{i_k}+\xi_{i_k}\xi_j)+(-1)^{\mathrm{d}(Q_1)}\xi_jQ_1\xi_{i_k}\\&=-(Q_1\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q_1)}\xi_jQ_1)\xi_{i_k}+Q_1(\xi_j\xi_{i_k}+\xi_{i_k}\xi_j)\in I,\end{aligned}$$

所以结论对 k 也成立.

2) 设 $Q=\sum_{i=1}^t y_i$, 其中 y_i 是 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 的单项式, 并且 $\mathrm{d}(y_1)=\mathrm{d}(y_2)=\cdots=\mathrm{d}(y_k)$. 由 1) 知

$$\begin{aligned}Q\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_jQ&=\left(\sum_{i=1}^t y_i\right)\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(Q)}\xi_j\left(\sum_{i=1}^t y_i\right)\\&=\sum_{i=1}^t(y_i\xi_j-(-1)^{\mathrm{d}(y_i)}\xi_jy_i)\in I.\qquad\square\end{aligned}$$

设 $\Lambda(n)=\widetilde{\Lambda}(n)/I$. 令 $x_i=\xi_i+I\in\widetilde{\Lambda}(n)/I,\ \ i=1,\cdots,n$. 易见 $\Lambda(n)$ 就是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的外代数.

引理 2.2 *以下命题成立.*

1) *任取* $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\widetilde{\Lambda}(n)_\theta$, *其中* $\theta\in\mathbb{Z}_2$, *则存在* $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$, *使得* $\widetilde{D}(\xi_i)=z_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

2) *任取* $y_1,y_2,\cdots,y_n\in\Lambda(n)_\theta$, *其中* $\theta\in\mathbb{Z}_2$, *则存在* $D\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$, *使得* $D(x_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

3) *任取* $y_1,y_2,\cdots,y_n\in\Lambda(n)$, *则存在* $D\in\mathrm{Der}(\Lambda(n))$, *使得* $D(x_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$.

证明 1) 设 $\widetilde{\Lambda}(n)_1=\mathbb{F}\xi_1+\mathbb{F}\xi_2+\cdots+\mathbb{F}\xi_n\subseteq\widetilde{\Lambda}(n)$. 显然, 存在线性映射 $\widetilde{D}:\widetilde{\Lambda}(n)_1\to\widetilde{\Lambda}(n)_\theta$, 使得 $\widetilde{D}(\xi_i)=z_i,\ \ i=1,\cdots,n$. 因为 $\widetilde{\Lambda}(n)$ 是由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 生成的自由代数, 所以 $\widetilde{D}$ 可以自然地扩张为 $\mathrm{Der}(\widetilde{\Lambda}(n))$ 的元素. 由于 $\widetilde{\Lambda}(n)_1\subseteq\widetilde{\Lambda}(n)_{\bar{1}}$, 故 $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$.

2) 令 $\phi:\widetilde{\Lambda}(n)\to\widetilde{\Lambda}(n)/I$ 是超代数的自然同态. 则存在 $h_1,h_2,\cdots,h_n\in\widetilde{\Lambda}(n)$, 使得 $\phi(h_i)=y_i,\ \ i=1,\cdots,n$. 因为 ϕ 是偶的线性映射, 所以 $h_i\in\widetilde{\Lambda}(n)_\theta, i=1,\cdots,n$. 由 1) 知, 存在 $\widetilde{D}\in\mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 使得 $\widetilde{D}(\xi_i)=h_i, i=1,\cdots,n$. 由引理 2.1,

$$\begin{aligned}&\widetilde{D}(\xi_i\xi_j+\xi_j\xi_i)\\&=\widetilde{D}(\xi_i)\xi_j+(-1)^{\theta+\bar{1}}\xi_i\widetilde{D}(\xi_j)+\widetilde{D}(\xi_j)\xi_i+(-1)^{\theta+\bar{1}}\xi_j\widetilde{D}(\xi_i)\\&=(\widetilde{D}(\xi_i)\xi_j-(-1)^{\theta}\xi_j\widetilde{D}(\xi_i))+(\widetilde{D}(\xi_j)\xi_i-(-1)^{\theta}\xi_i\widetilde{D}(\xi_j))\in I.\end{aligned}$$

于是 $\widetilde{D}(I)\subseteq I$. 故 $\phi\widetilde{D}(I)=0$, 即 $I\subseteq\ker\phi\widetilde{D}$. 所以存在线性映射 $D:\Lambda(n)\to\Lambda(n)$, 使得下图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Lambda}(n) \arrow[r, "\phi\widetilde{D}"] \arrow[d, "\phi"'] & \Lambda(n) \\ \Lambda(n) \arrow[ur, "D"'] & \end{tikzcd}$$

是交换的, 即 $\phi\widetilde{D} = D\phi$. 因此

$$D(x_i) = D(\xi_i + I) = D\phi(\xi_i) = \phi\widetilde{D}(\xi_i) = \phi(h_i) = y_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

由于 $x_i \in \Lambda(n)_{\bar{1}}$, $y_i \in \Lambda(n)_\theta$, $i = 1, \cdots, n$, 所以 $D \in \mathrm{pl}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$.

任取 $x, y \in \mathrm{hg}(\Lambda(n))$, 则存在 $x', y' \in \mathrm{hg}(\widetilde{\Lambda}(n))$, 使得 $\phi(x') = x$, $\phi(y') = y$. 于是

$$\begin{aligned} D(xy) &= D(\phi(x')\phi(y')) = D\phi(x'y') = \phi\widetilde{D}(x'y') \\ &= \phi(\widetilde{D}(x')y' + (-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x')}x'\widetilde{D}(y')) \\ &= \phi\widetilde{D}(x')\phi(y') + (-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x)}\phi(x')\phi\widetilde{D}(y') \\ &= D\phi(x')\phi(y') + (-1)^{(\theta+\bar{1})\mathrm{d}(x)}\phi(x')D\phi(y') \\ &= D(x)y + (-1)^{(\theta+\bar{1})}xD(y). \end{aligned}$$

所以 $D \in \mathrm{Der}_{\theta+\bar{1}}(\Lambda(n))$.

3) 设 $y_i = y_{i0} + y_{i1}$, 其中 $y_{i0} \in \Lambda(n)_{\bar{0}}$, $y_{i1} \in \Lambda(n)_{\bar{1}}$, $i = 1, \cdots, n$. 由 2) 知存在 $D' \in \mathrm{Der}_{\bar{0}}(\Lambda(n))$, $D'' \in \mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(n))$, 使得

$$D'(x_i) = y_{i1}, \quad D''(x_i) = y_{i0}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

令 $D = D' + D''$, 则 $D \in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 易见 $D(x_i) = y_i$, $i = 1, \cdots, n$. □

由引理 2.2 的 2) 知, 存在 $\partial_i \in \mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(n))$, $i = 1, \cdots, n$. 使得 $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \cdots, n$. 令 $D \in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 设 $D(x_j) = y_j$, $j = 1, \cdots, n$. 显然 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i \in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 另一方面, 由于 $\{x_j \mid j = 1, \cdots, n\}$ 生成了 $\Lambda(n)$, 以及

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i\partial_i\right)(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i\partial_i(x_j) = y_j, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

所以 $D = \sum_{i=1}^n y_i\partial_i$. 于是我们证明了以下命题.

命题 2.3　$\mathrm{Der}(\Lambda(n)) = \left\{\sum_{i=1}^n y_i\partial_i \mid y_i \in \Lambda(n), \quad i = 1, \cdots, n.\right\}$.

我们在上节给出了李超代数上的模的定义. 类似地, 可定义结合超代数 A 上的模 V, 这只需将定义 1.10 中的 4) 改为 $(xy)v = x(y(v))$, $\forall x, y \in \mathrm{hg}(A)$, $\forall v \in V$. 于是 $\mathrm{Der}(\Lambda(n))$ 是一个 $\Lambda(n)$- 模. 设 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i \in \mathrm{Der}(\Lambda(n))$. 若 $\sum_{i=1}^n y_i\partial_i = 0$, 则可推得 $y_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$. 再由命题 2.3 知, $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(n))$ 的一个自由 $\Lambda(n)$-基, 并且称 $\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n$ 为 $\Lambda(n)$ 的特殊导子.

我们称素特征域上的李超代数为模李超代数. 下面构作四类 Cartan 型模李超代数. 设 $\mathbb{F}$ 是特征数 $p > 2$ 的域 (因为 $p = 2$ 时, $\mathbb{F}$ 上的李超代数就是 $\mathbb{Z}_2$- 阶化李代数,

所以我们不考虑 $p=2$ 的情形). 以下总是用 p 表示基域 $\mathbb{F}$ 的特征数, 仍然用 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别表示正整数集与非负整数集. 设 $m,n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. 若 $r,t\in\mathbb{N}_0$, 令 $\binom{r}{t}$ 表示二项式系数 $\frac{r!}{(r-t)!t!}$. 若 $r<t$, 约定 $\binom{r}{t}=0$. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 令 $|\alpha|=\sum_{i=1}^m\alpha_i$. 设 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 定义 $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m)$, $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^m\binom{\alpha_i}{\beta_i}$, $\alpha\leq\beta\Longleftrightarrow\alpha_i\leq\beta_i$, $i=1,2,\cdots,m$. 设 $\mathcal{U}(m)$ 是具有生成元集 $\{x^{(\alpha)}\mid\alpha\in\mathbb{N}_0^m\}$ 的 $\mathbb{F}$ 上的除幂代数, 则 $\mathcal{U}(m)$ 中有以下运算公式:

$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)}=\binom{\alpha+\beta}{\alpha}x^{(\alpha+\beta)},\qquad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m\tag{2.2}$$

置 $\varepsilon_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{im})$, 其中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

简记 $x^{(\varepsilon_i)}$ 为 x_i, 这里 $1\leq i\leq m$. 我们用 $\Lambda(n)$ 表示具有 n 个不定元 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_s$ 的外代数, 其中 $s=m+n$. 令 $\Lambda(m,n)=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)$. 则 $\mathcal{U}(m)$ 的平凡的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化与 $\Lambda(n)$ 的自然的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化诱导了 $\Lambda(m,n)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化:

$$\Lambda(m,n)_{\bar{0}}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar{0}},\qquad\Lambda(m,n)_{\bar{1}}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar{1}},$$

从而 $\Lambda(m,n)$ 是一个结合超代数.

设 $f\in\mathcal{U}(m),g\in\Lambda(n)$, 简记 $\Lambda(m,n)$ 中的元素 $f\otimes g$ 为 fg. 于是在 $\Lambda(m,n)$ 中, 除了 (2.2) 式外, 还有以下运算公式:

$$x_ix_j=-x_jx_i,\qquad i,j=m+1,\cdots,s.$$

$$x^{(\alpha)}x_j=x_jx^{(\alpha)},\quad\forall\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ j=m+1,\cdots,s.$$

对 $k=1,\cdots,n$, 定义

$$B_k=\{\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\mid m+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq s\}.$$

设 $B(n)=\cup_{i=0}^nB_k$, 其中 $B_0=\varnothing$. 若 $u=\langle i_1,i_2,\cdots,i_k\rangle\in B_k$, 则令 $|u|=k$, $\{u\}=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 与 $x^u=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$. 约定 $|\varnothing|=0$, $x^{\varnothing}=1$. 则 $\{x^{(\alpha)}x^u\mid\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ u\in B(n)\}$ 构成了 $\Lambda(m,n)$ 的一个 $\mathbb{F}$- 基底.

为简便, 令 $Y_0=\{1,2,\cdots,m\}$, $Y_1=\{m+1,\cdots,s\}$, $Y=Y_0\cup Y_1$.

引理 2.4 设 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\cdots,\mathrm{D}_s$ 是 $\Lambda(m,n)$ 的线性变换, 并且满足

$$\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)=\begin{cases}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u, & \forall\ i\in Y_0,\\ x^{(\alpha)}\partial_i(x^u), & \forall\ i\in Y_1,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 ∂_i 是 $\Lambda(n)$ 的特殊导子, $\forall i\in Y_1$. 则 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar{0}}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_0$; $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in Y_1$.