非线性方程的精确解

颜心力／著

FeiXianXing FangCheng De JingQueJie

经济科学出版社

非线性方程的精确解

颜心力 著

经 济 科 学 出 版 社

责任编辑：孟庆贺　王　瑛
责任校对：徐领弟
版式设计：代小卫
技术编辑：董永亭

非线性方程的精确解
颜心力　著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京海淀区阜成路甲28号　邮编：100036
总编室电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
毕诚彩印厂印刷
德力装订厂装订
880×1230　32开　5.5印张　140000字
2004年10月第一版　2004年10月第一次印刷
ISBN 7-5058-4457-1/F·3729　定价：11.80元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

科学家为了解开各种自然现象和工程技术问题的奥妙，想方设法建立了各式各样的数学模型，它们中的重要一类为数理方程。因此，数百年来，人们一直为求解这些方程而努力，相当多线性方程的精确解已经获得。但对于非线性数理方程的精确解，至今人们还知之甚少。比较可行的办法是：既然无法获得精确解，不得已退而求其次。其具体方法之一是将非线性简化为线性；其二是求它们的近似（数值）解。笔者正是基于此种情况，对非线性数理方程的求解方法作了有益探索，以期抛砖引玉。

本书前五章在泛函分析的基础上，介绍一条求解非线性数理方程的途径，其方法是将偏微分方程化为常微分方程再化为积分方程，然后利用距离空间与半序空间算子方程的求解（不动点、零点）理论（含笔者尚未发表的结果）求解，数学工作者由此可获知是否有解，而非数学（物理、力学等）工作者则可获得精确解。第六章在高等数学与工程数学的基础上，介绍一种求非线性偏微分方程（含方程组）解析解的方法，对物理、力学等专业的工作者会非常有用。

本书收录了作者近年来公开发表或尚未发表的一些论文，同时也收集了半序空间算子求解理论直至最近的主要成果。对此有兴趣的数学工作者，读完本书

后，即可进行研究。这套方法，将会逐渐完善，若干年后，可能会成为求解微分方程的重要工具。在本书撰写过程中，参阅了国内外的一些资料文献，在此，对原作者们致以深深的谢意。我校校长徐德龙院士以及研究生部、科技处、理学院领导给予笔者大力支持，特表示衷心致谢。

在本书的撰写中，因为无同类书籍可供借鉴，且相当部分结果出自作者的研究，虽与我校的研究生和中青年教师研讨过多次，但由于笔者水平有限，加之非线性方程求解这方面的内容非常丰富，故难免挂一漏万，书中不妥甚至错误之处，敬请指正。

颜心力

2004 年 1 月于西安建筑科技大学

目　录

第一章 方　　程

自然科学与工程技术中的各种问题，归结成数学模型，而模型中很大一类为方程。因此，方程求解就为科学工作者所关注。

方程有常微分方程、偏微分方程、积分方程、微分积分方程、代数方程，数学工作者把它们抽象成算子方程，再研究解的存在等性态，并力图求出其近似解或精确解。方程分线性与非线性两大类，因前者的求解较为方便，故通常教科书中的方程多为线性，本书侧重讨论非线性方程的精确解与解的存在性。

第一节　常微分方程

1. 线性：它的未知函数与各阶导数均为线性，如：

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = A\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + (1 - \frac{h^2}{t^2})x = 0(\text{Bessel 方程})$$

2. 半（拟）线性：它的高阶导数为线性，其余为非线性，如：

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n), (i = 1, \cdots, n)$$

3. 非线性：它的未知函数或各阶导数均非线性。

第二节　线性偏微分方程

椭圆型：$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$

抛物型：$u_{xx} - u_y = f$

双曲型：$u_{xx} - u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$

传统解法：分离变量法、积分变换法、格林函数法、差分法、有限元法等。

第三节　积分方程

线性：$x(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt + f(s)$

非线性：$x(s) = \int_a^b K(s,t)f(t,x(t))dt$

$$x(s) = \int_a^b K(s,t,x(t))dt$$

第四节　积分微分方程

$x'(s) = F(s,x(s),Vx(s))$，其中

$Vx(s) = \int_a^s K(s,t,x(t))dt$

第五节　微分差分方程

$x'(t) = F(t,x(t),x(t-r_1),x(t-r_2),\cdots,x(t-r_n))$

其中 r_i 为常数，称为偏差。

$$x'(t) = f(t,x(t),x(t-r_1),\cdots,x(t-r_n),\\ x'(t-\tau_1),\cdots,x'(t-\tau_m))$$

其中 r_i，τ_i 为常数，称为偏差。

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - r_1(t)), \cdots, x(t - r_n(t))$$

其中 r_i 是 t 的函数。

第六节　泛函微分方程

$x'(t) = f(t, x_t), x_t \in C$(连续函数空间), $f: R \times C \to R$。

注：上述方程与常微分方程　$x'(t) = f(t, x(t)), x(t) \in R, f: R \times R \to R$，有相似结果但也有一系列不同结果。

第二章　非线性算子（映象）

线性＝齐性＋加性

$A(\alpha x)=\alpha Ax$，α 为常数

$A(x+y)=Ax+Ay$

注 1：微分与积分均为线性算子。

注 2：对于线性算子，连续与有界等价；在一点连续与连续等价。

第一节　连续、有界

定义 2.1　设 E_1，E_2 为二实 Banach 空间，$D\subset E_1$，A：$D\to E_2$，$x_0\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，当 $x\in D$ 且 $\|x-x_0\|<\delta$ 时恒有 $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$，则称 A 在 x_0 连续；若 A 在 D 中的每点均连续，则称 A 在 D 上连续；若 δ 只与 ε 有关而与 x_0 无关，则称 A 在 D 上一致连续；若 A 将 D 中的有界集映成 E_2 中的有界集，则称 A 在 D 上有界。

结论　A 在 x_0 连续的充要条件是：对任何的 $x_n\in D$，$x_n\to x_0$ $\Rightarrow Ax_n\to Ax_0\Leftrightarrow\|Ax_n-Ax_0\|\to 0$，当 $n\to\infty$。

注：线性算子的连续与有界等价，但对于非线性算子，则无此关系。

第二节　全连续

定义 2.2　设 E_1，E_2 为实 Banach 空间，$D\subset E_1$，A：$D\to$

E_2，若 A 将 D 中的任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 $A(S)$（$A(S)$相对紧，$\overline{A(S)}$在 E_2 紧），则称 A 是映D 到E_2 的紧算子。

结论 1 A 在D 上紧的充要条件是：对 D 中的任何有界序列 $\{x_n\}$，必存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $\{Ax_{n_k}\}$ 在 E_2 中收敛。

结论 2 紧算子必有界。

定义 2.3 若算子 A：$D\to E_2$ 连续且紧，则称 A 是映D 到E_2 的全连续算子。

定理 2.1a 设 A_n：$D\to E_2$ 全连续（$n=1, 2, \cdots$），A：$D\to E_2$，若对任何有界集 $S\subset D$，当 $n\to\infty$时有 $\|A_nx-Ax\|$ 均一致收敛于 0（对于 $x\in S$），则 A：$D\to E_2$ 全连续。

证 A 连续：$\|Ax_0-Ax_n\|=\|Ax_0-A_kx_0+A_kx_0-A_kx_n+A_kx_n-Ax_n\|\leqslant\|Ax_0-A_kx_0\|+\|A_kx_0-A_kx_n\|+\|A_kx_n-Ax_n\|\to 0$

A 紧：设 $S\subset D$ 有界，由 $\|A_nx-Ax\|\to 0$(一致)，故 $\forall\varepsilon>0$，可取定 n，$\forall x\in S$ 恒有 $\|A_nx-Ax\|<\varepsilon$，故$A_n(S)$是 $A(S)$ 的一个ε——网，从而$A(S)$列紧。

定理 2.1b （Schauder）设 $D\subset E$ 有界凸闭，A：$D\to D$ 全连续，则必存在 $\bar{x}\in D$ 使$A(\bar{x})=\bar{x}$（$\bar{x}$ 称作A 的不动点）。

证 略。

注：近来有学者[3]用此定理讨论问题。

考察 Урысон 算子

$$K\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy$$

其中 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y)\in G\times G$，$-\infty<u<\infty$上定义，G 为R^n 上的有界闭集。 (2.1)

定理 2.2 若$k(x, y, u)$ 在 $(x, y)\in G\times G$，$-\infty<u<\infty$上连续，则 Урысон 算子 K：$C(G)\to C(G)$ 全连续。

证 K 紧：先证一致有界。设 S 是$C(G)$ 中的有界集：$\|\varphi\|\leqslant a,\forall\varphi\in S$，于是有 $M=\max\limits_{(x,y)\in G\times G,\|u\|\leqslant a}|k(x,y,u)|$，

从而

$|K\varphi(x)| = |\int_G k(x,y,\varphi(y))dy| \leqslant \int_G |k(x,y,\varphi(y))| dy \leqslant M\text{mes}G$，故 K（S）中诸函数一致有界。

再证 K（S）等度连续：$\forall \varepsilon > 0$，因 $k(x,y,u)$ 在 $(x,y) \in G \times G$，$\| u \| \leqslant a$ 上连续，又因 G 闭，从而一致连续，故当 x_1，$x_2 \in G$，$|x_1 - x_2| < \delta$，$\forall y \in G$，$\| u \| \leqslant a$ 时恒有：

$$|k(x_1,y,u) - k(x_2,y,u)| < \varepsilon / \text{mes}G$$

从而 $\forall \varphi \in S$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时恒有：

$$|K\varphi(x_1) - K\varphi(x_2)|$$

$$= |\int_G [k(x_1,y,\varphi(y)) - k(x_2,y,\varphi(y))] dy| \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{\text{mes}G} \cdot \text{mes}G = \varepsilon$$

故 K（S）中诸函数等度连续，从而 K 是映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 的紧算子。

证 K 连续：设 φ_n，$\varphi_0 \in C$（G），$\| \varphi_n - \varphi_0 \| \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。因收敛列有界，故可令 $a = \sup\{\| \varphi_0 \|，\| \varphi_1 \|，\cdots\}$，$\forall \varepsilon > 0$，由 k（x，y，u）在（x，y）$\in G \times G$，$\| u \| \leqslant a$ 的连续性知，$\exists \delta > 0$，当 $\| u_1 - u_2 \| \leqslant \delta$ 时，有：

$$|k(x,y,u_1) - k(x,y,u_2)| < \varepsilon / \text{mes}G, \forall (x,y) \in G \times G$$

存在 N，　当 $n \geqslant N$ 时恒有：

$$|K\varphi_n(x) - K\varphi_0(x)| \leqslant \int_G |k(x,y,\varphi_n(y)) - k(x,y,\varphi_0(y))| dy$$

$< \dfrac{\varepsilon}{\text{mes}G} \cdot \text{mes}G = \varepsilon$，从而 $|K\varphi_n - K\varphi_0| \to 0$。

例　考察 Урысон 积分方程

$$\varphi(x) = \int_G k(x,y,\varphi(y))dy \tag{2.2}$$

其中 G 是 R^n 中的有界闭集，设 k（x，y，u）在 $x \in G$，$y \in G$，$-\infty < u < \infty$ 上连续，且满足不等式 $|k(x,y,u)| \leqslant a + b|u|$，$\forall x$，$y \in G$，$-\infty < u < \infty$，其中 $a > 0$，$b > 0$，$b\text{mes}G < 1$，则方

程（2.2）有连续解。

证 由定理 2.2 知 $A\varphi(x)=\int_G k(x,y,\varphi(y))dy$ 映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 全连续，令 $R=a\text{mes}G/(1-b\text{mes}G)$；令 $D=\{\varphi\in C(G)\mid\|\varphi\|\leqslant R\}$，于是当 $x\in D$ 时：

$$|A\varphi(x)|\leqslant\int_G|k(x,y,\varphi(y))|dy\leqslant(a+b\|\varphi\|)\text{mes}G$$

从而 $|A\varphi|\leqslant(a+bR)\text{mes}G=R$，由此可知 $A(D)\subset D$，依上述 Schauder 不动点定理知 A 在 D 中有不动点，即（2.2）有解。

第三节 微分（参见 [1]、[55]）

将微分学中的全微分与方向导数概念推广到 Banach 空间。

设 $[a,b]\subset R$，E 为实 Banach 空间，算子 $x(t)$：$[a,b]\to E$ 称为抽象函数（自变量 t 取实数，函数值属于 Banach 空间）。

例 设 E 为实 Banach 空间，$\Omega\subset E$ 凸，A：$\Omega\to E$，u，$v\in\Omega$，则 $x(t)=(1-t)ut+v$，$[0,1]\to E$ 为抽象函数。

定义 2.4 设 $x(t):[a,b]\to E$ 为一抽象函数，对 $[a,b]$ 的任一分法 T

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots t_n=b$$

作和 $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$，其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，$\Delta t=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$

若当 $d(T)=\max\limits_i\Delta t_i\to 0$ 时，σ 在 E 中趋于某极限I，即 $\exists I\in E$，当 $d(T)\to 0$ 时恒有 $\|\sigma-\text{I}\|\to 0$，则称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积（简称可积），I叫做 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分，记作 $\int_a^b x(t)dt$，即 $\int_b^a x(t)dt=I=\lim\limits_{d(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$。

定理 2.3 若 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必在 $[a,b]$ 上可积。

证 略。

定义 2.4.1 设$x(t)$: $[a, b] \to E$ 为一抽象函数，$t_0 \in [a, b]$，若∃$z_0 \in E$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} - z_0 \right\| = 0 \tag{2.3}$$

则称$x(t)$在 $t=t_0$ 可微，z_0 叫做 $x(t)$ 在 t_0 的导数，记作 $x'(t_0)$，即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} \tag{2.4}$$

若$x(t)$在 $[a, b]$ 中每点均可微（a 点右可微，b 点左可微），则称$x(t)$在 $[a, b]$ 上可微，导函数 $x'(t)$: $[a, b] \to E$ 也是抽象函数。

注：可微⇒连续

定理 2.4 (i) 若 $x'(t)$ 在 $[a, b]$ 上存在且连续，则有

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b)-x(a)$$

(ii) 若$x(t)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微，则必存在$\xi \in (a,b)$使

$$\|x(b)-x(a)\| \leqslant (b-a)\|x'(\xi)\|$$

(iii) 设 $x(t)$ 在$[a,b]$连续，则

$$y(t)=\int_a^t x(s)ds \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

在 $[a, b]$ 可微，且$y'(t)=x(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$

证 参见 [1] 的 P.46～47.

定义 2.5 设 E_1，E_2 为 Banach 空间，D 为E_1 的开集，A: $D \to E_2$，$x_0 \in D$，若存在 $B \in (E_1 \to E_2)$（$(E_1 \to E_2)$ 表映 E_1 至 E_2 的有界线性算子的全体所构成的 Banach 空间），在 x_0 附近使

$$A(x_0+h)-Ax_0=Bh+\omega(x_0, h) \tag{2.5}$$

这里$\lim_{\|h\| \to 0} \|\omega(x_0, h)\| / \|h\| = 0$，则称 A 在x_0处 Frechet 可微（简称 F 可微）。Bh 叫做A 在x_0 处对于 h 的 F 微分，记作 $d[A(x_0)h]$；B 称作 A 在 x_0 的 F 导算子，记作$A'(x_0)$。从而

(2.5) 可写成

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h)$$

推论 (i) F 导算子唯一。

(ii) 若 A_1，A_2 在 F 可微，α、β 为实数，则 $(\alpha A_1+\beta A_2)'(x_0)=\alpha A'_1(x_0)+\beta A'_2(x_0)$。

(iii) 若 $Ax\equiv y_0\in E_2$，$\forall x\in E_1$，则 $A'(x_0)=\theta$，$\forall x_0\in E_1$。

例 若 Урысон 算子 (2.1) 的 $k(x,y,u)$ 与 $k'_u(x,y,u)$ 均在 $(x,y)\in G\times G$，$-\infty<u<\infty$ 上连续，则对于任何的点 $\varphi_0(x)\in C(G)$，算子 K 是 F 可微的且

$$K'(\varphi_0)h(x)=\int_G k'_u(x,y,\varphi_0(y))h(y)dy$$

证 参见 [1] 的 P.50～51。

定理 2.5 设 E_i $(i=1,2,3)$ 为 Banach 空间，开集 $D\subset E_1$，$H\subset E_2$，A：$D\to E_1$，B：$H\to E_3$，且 $A(D)\subset H$，设 A 在 $x_0\in D$ 处 F 可微，B 在 $y_0=Ax_0$ 处 F 可微，则 BA：$D\to E_3$ 在 x_0 处 F 可微，且

$$(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0) \tag{2.6}$$

证 由假设

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h)$$

其中当 $\|h\|\to 0$ 时 $(\|\omega(x_0,h)\|/\|h\|)\to 0$，令 $k=A(x_0+h)-Ax_0=A(x_0+h)-y_0$；

$$B(y_0+k)-By_0=B'(y_0)k+\omega_1(y_0,k)$$

其中当 $\|k\|\to 0$ 时 $(\|\omega_1(y_0,k)\|/\|k\|)\to 0$，从而

$$\begin{aligned}BA(x_0+h)-BA(x_0)&=B(y_0+k)-By_0\\&=B'(y_0)k+\omega_1(y_0,k)\\&=B'(y_0)(A(x_0+h)-Ax_0)+\omega_1(y_0,k)\\&=B'(y_0)(A'(x_0)h+\omega(x_0,h))+\omega_1(y_0,k)\\&=B'(y_0)A'(x_0)h+B'(y_0)\omega(x_0,h)+\omega_1(y_0,k)\end{aligned}$$

故 (2.6) 成立。

推论 1 设 A：$D\to E_2$，B：$E_2\to E_3$ 有界线性，若 A 在点 $x_0\in D$ 处 F 可微，则

$$(BA)'(x_0)=BA'(x_0)$$

推论 2 直线段

$$l=\{x\mid x=x_0+th,x_0,h\in E_1,0\leqslant t\leqslant 1\}\subset D$$

设 $A:D\to E_2$ 在 l 上 F 可微,则存在 $\tau\in(0,1)$ 使

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\leqslant\|A'(x_0+\tau h)h\|$$

推论 3 若算子 A：$D\to E_2$ 在 $l\subset D$ 上 F 可微，且 $A'(x)$ 在 l 上连续，则

$$A(x_0+h)-Ax_0=\int_0^1 A'(x_0+th)hdt$$

证 上述推论的证明参见 [1]、[55]。

例 设 E 为实 Hilbert 空间，$f(x)=\|x\|$，则当 $x_0\neq 0,h\to\theta$ 时有

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0)&=\|x_0+h\|-\|x_0\|\\&=\frac{\|x_0+h\|^2-\|x_0\|^2}{\|x_0+h\|+\|x_0\|}\\&=[2(x_0,h)+\|h\|^2]/[\|x_0+h\|+\|x_0\|]\\&=(x_0/\|x_0\|,h)+\omega(x_0,h)\end{aligned}$$

因 $E^*=E$,故 $f'(x_0)=x_0/\|x_0\|$。

定义 2.6 设 D 为 E_1 中的开集，A：$D\to E_2$，$x_0\in D$，若对任何 $h\in E_1$，$x_0+th\in D$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}\tag{2.7}$$

均存在（是 E_2 中的元），则称 A 在点 x_0 处 Gateaux 可微（简称 G 可微），(2.7) 叫做 A 在 x_0 处沿方向 h 的 G 微分，记作 $D[A(x_0)h]$,即

$$D[A(x_0)h]=\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}$$

若 $D[A(x_0)h]=Bh$，这里 $B\in(E_1\to E_2)$，则 B 叫做