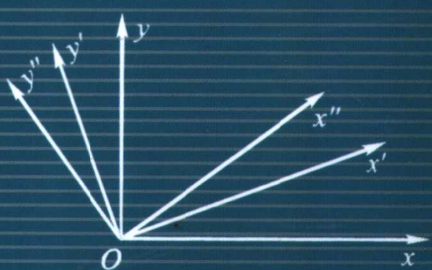
北京市高等教育精品教材立项项目

线性代数



高宗升 周 梦 编著

XIANXING DAISHU

北京航空航天大学出版社

北京市高等教育精品教材立项项目

线性代数

高宗升　周　梦　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是为理工科大学（非数学专业）本科生编写的线性代数教材。全书共分9章，主要内容有：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的相似变换、二次型、线性空间、线性交换以及线性代数的一些应用。各章后均附有适量的习题，书后附有习题答案。

本书难易适度，结构严谨，重点突出，理论联系实际；特别注重学生对基础理论的掌握和思想方法的学习，以及对他们的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力和自学能力的培养。

本书不但可作为理工科大学本科生的线性代数教材，也可作为高等教育自学考试教材及考研参考书，还可供有关教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/高宗升等编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2005.9

ISBN 7-81077-588-X

Ⅰ.线… Ⅱ.高… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第083834号

线性代数

高宗升 周 梦 编著

责任编辑 宋淑娟

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:16.5 字数:370千字

2005年9月第1版 2005年9月第1次印刷 印数:5 000册

ISBN 7-81077-588-X 定价:22.00元

前言

线性代数是理工科大学生的一门重要基础课，也是在自然科学和工程技术各个领域中广泛应用的数学工具。随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数在理论和应用上的重要性更加突出，同时也对线性代数的教学内容从深度和广度上提出了更高的要求。

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的大学数学理工科线性代数课程的基本要求，结合理工科大学的专业特点和不同专业对线性代数内容的需要，以及作者多年来讲授线性代数的教学经验和体会编写而成。本书吸收了国内外多种线性代数教材的优点，在编写过程中，广泛征求了师生的意见，努力做到重点突出，难易适度，使各章内容不仅便于教师讲解，而且易于学生接受；考虑到计算机、物理、电子工程、自控和航空航天等专业的需要，还加强了线性空间和线性变换等近代部分的内容。本书具有如下特点：

1. 条理清楚，重视基础

从内容的讲解上，在注意到科学性和系统性的同时，做到由浅入深，由近及远，条理清楚，生动活泼，通俗易懂。概念的引入清楚、自然、准确；定理的证明清晰、简洁，文笔通顺流畅。例如，在讲解行列式一章时，先通过解二元和三元线性方程组，引进二阶和三阶行列式的概念，然后给出 n 阶行列式的定义；接着围绕行列式计算这一主题，介绍行列式性质的应用、行列式按行（列）展开和拉普拉斯定理等内容。

本书特别注重学生对基础理论的掌握和思想方法的学习，以及对他们的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力和自学能力的培养。对本书中涉及的主要定理，不仅给出了严格的证明，而且对定理的成立背景和使用方法也进行了介绍和说明。

2. 结构合理，综合性强

对内容的处理采用模块式的方法，把内容相近的部分尽可能地写在一章。这样，不仅可以把相关内容讲深、讲透，一气呵成，节约篇幅和学时，而且可以使学生对相应部分的内容有一个全面、清晰、系统的了解。例如，把矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组的解法及解的结构、矩阵的相似变换、二次型、线性空间及线性变换等有关内容都独立成章，使学生便于掌握和学习。

3. 例题丰富，便于自学

线性代数的特点是概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强，初学者较难适应。为了帮助学生

加深对基本概念的理解和对基础理论与方法的掌握，书中配有典型例题，每章后面还附有较多的精选习题。通过这些练习来巩固和掌握所学的内容，训练解题的方法和技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力。

自学者通过研读本书并独立完成书中习题，便可基本掌握本书内容。

4. 联系实际，适用面广

本书的最后一章，专门介绍线性代数在图论、最小二乘逼近和线性经济模型等方面的应用，可作为选学内容或学生课外阅读，以便学生对线性代数这门课加深了解、提高兴趣、开拓视野，增强他们对科技和社会经济的参与能力，提高他们理论联系实际的能力。

本书共分 9 章，前 6 章为基础部分（不带 * 号的内容），讲授这部分内容大约需要 40 个学时，讲授全书主要内容大约需要 60 个学时。

本书可作为理工科大学线性代数课教材，也可作为有不同教学要求的其他专业相关课程的教材，还可作为高等教育自学考试教材及考研参考书。

本书由高宗升主编。前 4 章由高宗升执笔，后 5 章由周梦执笔，最后由高宗升整理定稿。本书的编写工作得到了北京航空航天大学教务处教材科、理学院有关领导以及同事们的关心和支持，并被北京市教委作为市级精品教材立项项目予以资助；王日爽教授对书稿进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的修改意见。作者在此一并表示衷心的谢意。由于作者的水平所限，本书在编写和内容的组织上可能存在一些不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2005 年 6 月于北京航空航天大学

目 录

第1章 行列式

第2章 矩 阵

第 5 章　矩阵的相似变换

第 6 章　二次型

第 7 章　线性空间

第 1 章　行列式

行列式是由解线性方程组引进的，是研究线性代数的重要工具，它在自然科学的许多领域中有着广泛的应用。本章首先给出 n 阶行列式的定义，然后分别介绍行列式的性质、计算方法和应用。

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　排列与逆序

定义 1.1.1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列，记为 $j_1j_2\cdots j_n$。

例如，4213 是一个四阶排列，52341 是一个五阶排列。由 1，2，3，4 可组成 $24=4!$ 个不同的四阶排列。$1,2,\cdots,n$ 可组成 $n!$ 个不同的 n 阶排列。按数字的自然顺序由小到大的 n 阶排列 $123\cdots n$ 称为*标准排列*或*自然排列*。

定义 1.1.2　在一个排列中，若一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数构成一个*逆序*。一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的*逆序数*。用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。逆序数是偶数的排列称为*偶排列*，逆序数是奇数的排列称为*奇排列*。

对一个 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$，如何求它的逆序数呢？设这个排列中排在 j_1 后面比 j_1 小的数的个数为 $\tau(j_1)$，排在 j_2 的后面比 j_2 小的数的个数为 $\tau(j_2)$，……排在 j_{n-1} 后面比 j_{n-1} 小的数的个数为 $\tau(j_{n-1})$，则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(j_1)+\tau(j_2)+\cdots+\tau(j_{n-1})$$

例 1.1.1　求排列 32514 与 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数。

解　$\tau(32514)=2+1+2+0+0=5$，为奇排列；

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$，当 n 等于 $4k$ 和 $4k+1$ 时为偶排列，当 n 等于 $4k+2$ 和 $4k+3$ 时为奇排列。

定义 1.1.3　把一个排列中某两个数的位置互换，其余的数不动，就得到一个新的排列，这种变换称为排列的一个*对换*。

如果将排列 32514 中的 2 与 4 对换，则得到新排列 34512，它的逆序数 $\tau(34512)=2+2+2+0=6$，为偶排列。这说明，经过一次对换，排列的奇偶性发生了变化。一般地有如下定理。

定理 1.1.1　一次对换改变排列的奇偶性。

证 分两种情况考虑。

① 相邻两个数对换的情况。

设排列为

$$\cdots ij \cdots \tag{1.1.1}$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots ji \cdots \tag{1.1.2}$$

这里“…”表示对换前后排列中不变的数。由于这两个排列只交换 i 和 j 两个数的位置,其余数的位置没有改变,所以各数的逆序数中只有 $\tau(i)$ 和 $\tau(j)$ 有可能变化,而其余各数的逆序数不变。当 $i<j$ 时,排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)的逆序数增加1;当 $i>j$,排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)的逆序数减少1。因此排列(1.1.1)与排列(1.1.2)的奇偶性相反。

② 一般情况。

设某个排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1.1.3}$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1.1.4}$$

由排列(1.1.3)变为排列(1.1.4)可以通过一系列两两相邻的对换来实现。先将排列(1.1.3)中的 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 经过 $s+1$ 次相邻对换,对换后排列(1.1.3)变为

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots \tag{1.1.5}$$

再将排列(1.1.5)中的 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_1$ 经过 s 次相邻对换,把排列(1.1.5)变成排列(1.1.4)。于是将排列(1.1.3)化为排列(1.1.4)总共做了 $2s+1$ 次相邻对换;而每经过一次相邻对换,都会改变排列的奇偶性,由于 $2s+1$ 为奇数,所以排列(1.1.3)与排列(1.1.4)的奇偶性相反。证毕。

推论 任何一个 n 阶排列都可以通过对换化成标准排列,并且所做对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同。

1.1.2 二阶与三阶行列式

本小节的目的是讲解行列式概念的形成。这需要从解线性方程组谈起。

设二元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

应用消元法解此方程组。先用 a_{22} 和 $-a_{12}$ 分别去乘方程组(1.1.6)第一式和第二式的两端,然后再将得到的两式相加,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

用类似方法,从方程组(1.1.6)中消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1.6)有惟一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.7}$$

为了便于记忆，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1.8}$$

把式(1.1.8)称为二阶行列式。D 中横写的称为行，竖写的称为列。D 中共有两行两列，其中数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素。它的第一个下标 i 表示这个元素所在的行，称为行指标；第二个下标 j 表示这个元素所在的列，称为列指标。例如，a_{21} 就是位于 D 中第二行、第一列上的元素。把行列式中从左上角到右下角的连线称为主对角线，从右上角到左下角的连线称为副对角线。由式(1.1.8)可知，二阶行列式的值是主对角线上元素 a_{11}，a_{22} 的乘积减去副对角线上元素 a_{12}，a_{21} 的乘积。按照这个规则，又有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元一次线性方程组(1.1.6)的解可用二阶行列式表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

同理，考虑三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.9}$$

应用消元法先后消去 x_2 和 x_3，得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1=$$
$$b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

把 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.10}$$

由于 D 中共有三行三列，故把它称为三阶行列式。因为它是由方程组(1.1.9)中变元的系数

组成，所以又称其为方程组(1.1.9)的系数行列式。如果 $D\neq0$，容易算出方程组(1.1.9)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 分别是将 D 中第 j 列的元素换成方程组(1.1.9)右端的常数项 b_1,b_2,b_3 得到的。

三阶行列式是六项的代数和，其中每一项都是 D 中不同行不同列的三个元素的乘积并冠以正负号。为了便于记忆，可写成如图 1.1.1 所示的形式。

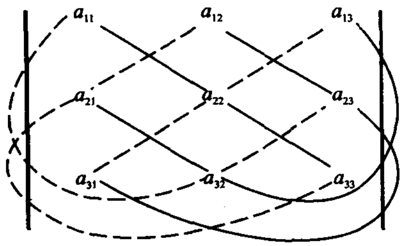


图 1.1.1　对角线法则示意图

图 1.1.1 中实线上三个元素的乘积项取正号，虚线上三个元素的乘积项取负号。这种方法称为三阶行列式的对角线法则。

根据以上讨论，自然会想到如何把二阶、三阶行列式推广到一般的 n 阶行列式，并用它来表达包括 n 个未知量的 n 个方程所组成的线性方程组的解。通过观察二阶、三阶行列式，发现它们有以下特点：

① 二阶、三阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积，其代数和即为该行列式之值。二阶行列式有 2!项，三阶行列式有 3!项。

② 代数和中每一项前的符号有以下规律，即行指标取成标准排列时，由列指标组成的排列的奇偶性来决定每项前的正负号，偶者为正，奇者为负。

综上所述，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

式中，$\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 这两个数的所有排列取和，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 这三个数的所有排列取和。

推而广之，则可以定义 n 阶行列式。

1.1.3　n 阶行列式的定义

定义 1.1.4　由 n^2 个元素排成 n 行 n 列，以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之，称其为 n 阶行列式，它代表一个数值。此数值是取自上式中不同行不同列的 n 个元素 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 乘积的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数字 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列，故共有 $n!$ 项。每项前的符号按下述规定：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.1.11)$$

式中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和。当 $n=1$ 时，即为一阶行列式，并规定 $|a|=a$；当 $n=2,3$ 时，即为前面定义的二阶和三阶行列式。

为了书写方便，n 阶行列式也可记为 $D_n=|a_{ij}|_n$。

例 1.1.2 计算 n 阶下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式的定义，展开式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，要计算该行列式的值，只需把其中的非零项求出来即可。

在这个行列式中，第一行除了 a_{11} 外，其余元素都是零，所以只能取 $j_1=1$；在第二行中，除了 a_{21}，a_{22} 外，其余元素都是零，而 a_{11}，a_{21} 同在第一列，所以只能取 $j_2=2$；如此下去，在第 n 行只能取 $j_n=n$。因此该行列式展开式中不为零的项只有一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由于该项的列指标的排列是标准排列，其逆序数为零，所以取正号，故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

同理，对于上三角形行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对于对角形行列式，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

例 1.1.3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 用类似于例 1.1.2 的方法。该行列式的展开式中，只有下列一项

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

其值不为零，这一项列指标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321) = \frac{n(n-1)}{2}$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

在行列式的定义中规定，每一项都是行列式中不同行不同列的 n 个元素相乘，而元素的行指标按标准排列时，由列指标排列的逆序数决定各项前的正负号。那么，能否在定义中 n 个元素的相乘项里把元素的列指标按标准排列，而由行指标排列的逆序数决定各项前的正负号呢？下面的定理回答了这一问题。

定理 1.1.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1.1.12}$$

式中 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 求和。

证 对于式(1.1.11)右端的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

当列指标组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 p 次对换变成标准排列 $j_1j_22\cdots j_n$ 时，相应的行指标组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过 p 次对换变成排列 $i_1i_2\cdots i_n$，由于乘法的可交换性，则

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

根据定理 1.1.1 的推论，可知对换次数 p 的奇偶性与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性相同。同样，p 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 也有相同的奇偶性。因此 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 具有相同的奇偶性，即

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

这意味着式(1.1.11)右端的任一项总有且仅有式(1.1.12)右端的某一项与之对应并相等，反之也是如此，于是定理成立。

1.2　行列式的性质

由行列式的定义知道，当行列式的阶数较高时，直接按定义计算它的值是比较麻烦的，为此本节将介绍行列式的一些基本性质，利用这些性质，可以将复杂的行列式化成形式特殊的行列式，如上三角形行列式等，再计算它的值。

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将这个行列式的行和列互换，不改变它们的先后顺序得到的新行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$。

证　设 D^{T} 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

按行列式的定义，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=$$
$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}=D$$

性质 1 说明行列式中行与列的地位是等同的，凡是对行成立的性质对列也同样成立。因

此下面的一些性质只对行进行证明。

性质 2 如果行列式中某一行(列)元素有公因数 k,则 k 可以提到行列式符号外边,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由行列式的定义,

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} =$$

$$k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}$$

推论 如果行列式中某一行(列)元素全为零,那么行列式等于零。

性质 3 如果行列式中两行(列)互换,那么行列式只改变一个符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式的定义及定理 1.1.1,

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} =$$

$$- \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}$$

推论 1 若行列式中有两行(列)相同,则行列式的值为零。

证 设行列式 D 的第 i 行与第 k 行相同,将第 i 行与第 k 行互换,行列式不变;但由性质 3 知,它们应当反号,即 $D=-D$,亦即 $2D=0$,故 $D=0$。

推论 2 如果行列式中两行(列)的对应元素成比例,那么行列式的值为 0。

证 由性质 2 和性质 3 的推论 1 即可得到。

性质 4 如果行列式某行(列)的各元素都可以写成两数之和,例如 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n)$,则此行列式等于两个行列式之和,即