高等学校教材

简明线性代数

主编 欧阳克智

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

简明线性代数

主编　欧阳克智

编者　李富民　高军安　燕列雅
　　　李艳丽　李选民　欧阳克智

高等教育出版社

内容简介

本书是根据近几年高校大量扩招后，普通高校一般学生的实际水平，以及2003年新修订的全国"工科类本科数学课程教学基本要求"，所编写的一本《线性代数》教材。

本书突出的特点是实用简明、易教易学。在内容选材上，以必需、够用为原则，且符合教学大纲的最基本要求；在编排处理上，采取了一些新的推理次序及结构体系，尽量做到由浅入深、循序渐进、起点低，坡度小，易自学；在叙述论证上，条理清晰，重点突出，概念讲解详尽，推理简单明了。在保持系统性和科学性的前提下，适当弱化严格抽象的理论推导，有时代之以直观扼要的说明或例证，使学生易于抓住理论推导的基本思路及实质。适当淡化解题技巧的训练，侧重学生基本能力的培养和提高。

本书可作为普通高校理工、经管、师范、成人教育等类（非数学专业）的线性代数课程的教材，书中打"*"号的内容还可供不同教学需要，灵活选择。

图书在版编目（CIP）数据

简明线性代数／欧阳克智主编．—北京：高等教育出版社，2005 重印
ISBN 7-04-014403-4

Ⅰ．简…　Ⅱ．欧…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 021362 号

策划编辑 王　瑜　**责任编辑** 李　陶　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹文军
版式设计 金　伟　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 孔　源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市卫顺印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年4月第1版
印　　张	11.25	印　　次	2005年1月第3次印刷
字　　数	200 000	定　　价	12.40元

物料号：14403-00

前　言

为了适应我国高等院校，近几年大量扩招后，普通高校一般学生的实际水平。教育部非数学专业数学教学指导委员会于2003年暑期新修订了全国“工科类本科数学课程教学基本要求”。本书就是根据这个新修订的教学基本要求，所编写的一本《线性代数》教材。

本书突出的特点是实用简明、易教易学。在内容选材上，以必需、够用为原则，且符合教学大纲的最基本要求；在编排处理上，采取了一些新的推理次序及结构体系，尽量做到由浅入深，循序渐进，起点低，坡度小，易自学；在叙述论证上，条理清晰，重点突出，概念讲解详尽，推理简单明了，没有令人费解的冗长证明。在保持该门课程的系统性和科学性的前提下，适当弱化严格抽象的理论推导，有时代之以直观扼要的说明或例证，使学生易于抓住理论推导的基本思路及实质。适当淡化解题技巧的训练，侧重学生基本能力的培养和提高。

本书可作为普通高校理工、经管、师范、成人教育等类（非数学专业）的线性代数课程的教材。讲授全书大约需要40学时左右。书中打“*”号的内容和习题，可不作为教学最基本的要求，可供不同教学需要，灵活选择，或供学有余力的学生自学参考。

本书是在陕西省大学数学教学委员会的积极倡导和组织下，由西安石油大学、西安理工大学、西安建筑科技大学、西安邮电学院、西安工业学院等高校联合编写的。本书由欧阳克智教授主编，并负责修改、统稿、定稿。参加编写的有李富民、高军安、燕列雅、李艳丽、李选民、欧阳克智等同志。

作者对高等教育出版社的大力支持，对高教出版社数学策划编辑王瑜同志的热情帮助，表示最诚挚的谢意。

作者衷心欢迎广大读者对本教材多提宝贵意见，以便进一步修改完善。

编　者

2003年11月20日

目　　录

第一章 行 列 式

本章通过解二元和三元一次方程组,引入二阶与三阶行列式的定义,进而给出 n 阶行列式的定义,讨论行列式的性质,行列式的展开及行列式的计算.最后应用行列式给出求解 n 元线性方程组的克拉默(Gramer)法则.

§1.1 二、三阶行列式

考虑二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得解为

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

式(1.2)的分子与分母都是四个数,分两对相乘再相减而得到的.例如分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的未知数的四个系数确定的.为了便于记忆,引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称之为二阶行列式(横排称行,竖排称列),它表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.3}$$

如果把 a_{11}、a_{22} 的连线称为主对角线,把 a_{12}、a_{21} 的连线称为副对角线,则二阶行列式的值就等于主对角线上元素的乘积减去副对角线上元素的乘积.这种算法称为二阶行列式的对角线法则.按此法则,方程组(1.1)的解(1.2)可用二阶行列式表示为

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

这里,行列式 D 称为方程组的系数行列式.行列式 D_1,D_2 是分别将 D 的第

一列、第二列换为常数项 b_1, b_2 得到的.

为了求解三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

可引入如下记号：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示如下六项的代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.6}$$

并称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为一个三阶行列式.

其中，$a_{ij}(i,j = 1,2,3)$ 为三阶行列式的第 i 行第 j 列的元素，且称 i 为行指标，j 为列指标.

为了便于记忆，我们给出图1.1，图中实线上三个元素的乘积组成的三项取正号，虚线上的三个元素的乘积组成的三项取负号. 这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

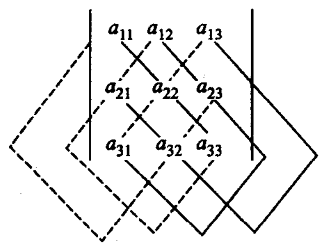

图 1.1　三阶行列式的对角线法则

引入三阶行列式后，三元一次方程组(1.5)当 $D \neq 0$ 时有惟一解

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

称 D 为方程组(1.5)的系数行列式. 而行列式 D_1, D_2, D_3，简言之，是分别将 D 中的第1,2,3列换成常数项 b_1, b_2, b_3 得到的. 这种方法称为三元一次方程组的行列式解法.

例 1.1　求解线性方程组

$$\begin{cases} x-2y+z=12, \\ -2x+y=-7, \\ 3x-2y+z=21. \end{cases}$$

解　用行列式方法求解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1+4-4-3=-2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \\ 21 & -2 & 1 \end{vmatrix}=12+14-14-21=-9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ -2 & -7 & 0 \\ 3 & 21 & 1 \end{vmatrix}=-7-42+24+21=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 12 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix}$$

$$=21+42+48-14-84-36=-23,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{9}{2},\quad y=\frac{D_2}{D}=2,\quad z=\frac{D_3}{D}=\frac{23}{2}.$$

§1.2　n 阶行列式的定义

在上一节中,我们引进了二、三阶行列式的概念,得到了求解二元一次方程组及三元一次方程组的行列式解法.该方法使得方程组的求解公式化,程序化.那么,对于一般的 n 元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

能否类似引入 n 阶行列式的概念.从而得到 n 元一次方程组的行列式解法呢?

为此,先介绍排列及逆序数的概念.

一、排列及其逆序数

我们把正整数 $1,2,\cdots,n$ 的每一种有确定次序的排列,称为一个 n 元排列,

记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$. 显然, n 元排列一共有 $n!$ 种. 比如 3 元排列有如下 $3! = 6$ 种:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

在 $n!$ 个 n 元排列中, 只有 $123\cdots n$ 是按数码从小到大的自然顺序组成的一个排列(称为标准排列), 其余的排列或多或少, 会出现大的数排在小的数前面的情况. 我们引入

定义 1.1 在一个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n$ 中, 如果 $j < k$, 而 $i_j > i_k$, 则称数对 (i_j, i_k) 构成该排列中的一个逆序. 一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序总数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 标准排列看成是偶排列.

我们可按以下方法来计算一个排列的逆序数: 先看有多少个数码排在 1 的前面, 设为 m_1 个, 那么就有 m_1 个数码与 1 构成逆序; 然后把 1 划去, 再看有多少个数码排在 2 的前面, 设为 m_2 个, 那么就有 m_2 个数码与 2 构成逆序; 再把 2 划去, $\cdots$, 如此继续下去. 这样, 一个 n 元排列的逆序数就等于 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$(注意 $m_n = 0$).

例 1.2 求 5 元排列 2 5 3 4 1 的逆序数

解
$$\tau(25341) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$
$$= 4 + 0 + 1 + 1 = 6.$$

可见, 2 5 3 4 1 是一个偶排列.

定义 1.2 将一个排列中某两个数码的位置互换, 而其余数码不动, 称为是一次对换. 将一个排列中的相邻位置的两个数码互换, 而其余数码不动, 称为一次轮换. 轮换是特殊的对换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

* **证** (1) 显然当对一个排列 $i_1 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 施行一次轮换, 交换 i_k 及 i_{k+1} 的位置, 得到排列 $i_1 \cdots i_{k+1} i_k \cdots i_n$ 时, 仅改变 i_k 与 i_{k+1} 之间的逆序, 其逆序数或增加 1, 或减少 1, 排列的奇偶性改变.

(2) 至于一般的对换, 比如将排列 $\cdots k j_1 j_2 \cdots j_s l \cdots$, 经一次对换($l$ 与 k 换位), 得到排列 $\cdots l j_1 j_2 \cdots j_s k \cdots$, 就可以通过 $2s + 1$ 次轮换来实现: 先将 l 与 j_s 轮换, 再与 j_{s-1} 轮换 $\cdots$, 与 j_1 轮换, 最后与 k 轮换, 共经 $s + 1$ 次轮换, 就可得到排列 $\cdots l k j_1 j_2 \cdots j_s \cdots$ 然后依次把 k 与 $j_1 j_2 \cdots j_s$ 轮换, 共经 s 次轮换, 即可得到排列 $\cdots l j_1 j_2 \cdots j_s k \cdots$. 这说明任一次对换都可通过奇数次轮换来实现. 从而, 一次对换改变排列的奇偶性. □

推论 任何一个 n 元排列都可通过若干次对换变成标准排列, 且所需对换次数, 与该排列的逆序数有着相同的奇偶性.

证 不妨设排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇排列, 要将它经若干次对换变成标准排列

$12\cdots n$. 而标准排列是偶排列. 因每次对换改变一次奇偶性. 将奇排列变成偶排列,就需经奇数次对换才能实现. □

二、n 阶行列式的定义

为了引入 n 阶行列式的定义,我们先来观察三阶行列式的特点:

$$\text{观察}\quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}- a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

可见,一个三阶行列式是六项的代数和,其中每一项都是行列式中三个元素的乘积,且每项中元素的行标都是三个正整数 1、2、3 由小到大的排列 123. 这说明每项中的元素都是来自不同的行;每项中元素的列标也不同,这说明每项中的元素都是来自不同的列;又各项中元素的列标分别为三个自然数 1、2、3 的六个不同的全排列 123、231、312、321、132、213,而由 1、2、3 三个正整数能且仅能构成六个不同的全排列.

三阶行列式是 D 中所有取自不同行不同列的三个元素乘积的代数和. 那么,对三阶行列式来讲,各项前面所冠的正负号是否具有一定的规律性呢?

有了逆序数的概念,就会发现:三阶行列式中,六项的行标均为标准排列 123,冠正号的项其列标构成的排列分别为 123、231、312,均为偶排列,冠负号的项其列标构成的排列分别为 321、132、213,均为奇排列.

$$\text{于是}\qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中,$j_1j_2j_3$ 是一个 3 元排列. $\tau(j_1j_2j_3)$ 是排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有 3 元排列求和.

定义 1.3 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1.7}$$

其中,a_{ij} 是第 i 行第 j 列的元素. 每取由 1 至 n 的一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$,做 n 个元素 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 的乘积,并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,得到一项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这样的项共有 $n!$个.称这 $n!$项的和为与表(1.7)相对应的 **n 阶行列式**,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.8}$$

其中,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的n元排列求和.通常,我们又称上式右端为行列式D的展开式.有时,也将这个行列式记为 $\Delta(a_{ij})$

例 1.3 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 四阶行列式应有 $4!=24$ 项,在每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中,只要有一个元素等于零,乘积就是零.由于第4行中的元素除了 a_{44} 外都是0,故只需取 $j_4=4$,第3行中的元素除 a_{33},a_{34} 外都是0,现已取 $j_4=4$,只需取 $j_3=3$.同理,只需取 $j_2=2,j_1=1$.于是这个行列式的展开式中不为0的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而排列1234的逆序数是0,所以 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

同理,可以证明一般的上三角(形)行列式(主对角线以下元素都为0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

下三角(形)行列式(主对角线以上的元素都为0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似可得,副对角线以下元素都为0的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中,我们将行列式展开式中每一项的 n 个元素的乘积按行标的正整数次序排列.事实上,数的乘法是可交换的.因此这 n 个元素的乘积次序是可以任意排列的,比如说可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$ 是行标的一个排列,$j_1j_2\cdots j_n$ 是列标的一个排列,下面我们来说明,该项前面所冠的符号,也可如下确定,它等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

事实上,交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中任两个因子后,$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 和 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性同时改变(例如将四阶行列式中的项 $a_{23}a_{42}a_{14}a_{31}$ 的第 1 个因子与第 3 个因子交换,得到 $a_{14}a_{42}a_{23}a_{31}$.行标的逆序数由 $\tau(2\ 4\ 1\ 3)=3$,变为 $\tau(1\ 4\ 2\ 3)=2$.列标的逆序数由 $\tau(3\ 2\ 4\ 1)=4$,变为 $\tau(4\ 2\ 3\ 1)=5$),从而 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不变(比如在上例中:$(-1)^{3+4}=(-1)^{2+5}$).由此可见,若经一系列因子的交换过程,将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变成 $a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n}$,应有

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} &= (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(l_1l_2\cdots l_n)} \\ &= (-1)^{\tau(l_1l_2\cdots l_n)},\end{aligned}$$

特别地,当 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 经若干次因子交换变为 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 时,就有:

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}$$

即
$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

于是 n 阶行列式的定义又可写成

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.9}$$

由 n 阶行列式的这两个等价定义(1.8)及(1.9),可以看出对于行列式而言,行与列完全处于对称的地位.

§1.3 行列式的展开

一、行列式按一行(列)展开

定义1.4 在 n 阶行列式 D 中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的元素按照原来的位置组成的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的余子式,而将 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如在三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中,元素 a_{23} 的余子式为 $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$,代数余子式为 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. 元素 a_{31} 的余子式为 $M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$,代数余子式为

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

观察三阶行列式知

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}- \\ &\quad a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31})+ \\ &\quad (a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

即三阶行列式等于它的第一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和.还可以验证,三阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.

一般地,有

定理1.2 n 阶行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.10}$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{1.11}$$

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则,利用这一定理可将行列式降阶,从而简化行列式的运算.

我们称(1.10)式为行列式 D 按第 i 行的展开式;称(1.11)式为行列式 D 按第 j 列的展开式.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1} +$$

$$(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

(式中行列式符号 $|\quad|$ 的右下标 $n-1$ 表示它的阶数).

* 二、拉普拉斯定理

1. k 阶子式、k 阶子式的余子式及代数余子式

定义 1.5 在一个 n 阶行列式 $D = \Delta(a_{ij})$ 中任意选定 k 行 k 列($1 \leqslant k \leqslant n-1$),位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素,按照原来的位置组成一个 k 阶行列式 M,称为 D 的一个 k 阶子式.在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的顺序组成的 $n-k$ 阶行列式 N 称为 k 阶子式 M 的余子式.若 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 及 $j_1, j_2, \cdots, j_k$,则将

$$A = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

称为 k 阶子式 M 的代数余子式.

例如在四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\-1&-2&0&7\\8&2&-3&0\end{vmatrix}$ 中,若选定第一、第四行,第二、第三列,则得到 D 的一个二阶子式 $M_1=\begin{vmatrix}2&3\\2&-3\end{vmatrix}$,$M_1$ 的余子式为 $N_1=\begin{vmatrix}5&8\\-1&7\end{vmatrix}$,$M_1$ 的代数余子式为 $A_1=(-1)^{1+4+2+3}\begin{vmatrix}5&8\\-1&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&8\\-1&7\end{vmatrix}$.

若选定第一、第四行,第一、第三列,则得到 D 的一个二阶子式 $M_2=\begin{vmatrix}1&3\\8&-3\end{vmatrix}$,$M_2$ 的余子式为 $N_2=\begin{vmatrix}6&8\\-2&7\end{vmatrix}$,$M_2$ 的代数余子式为 $A_2=(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix}6&8\\-2&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6&8\\-2&7\end{vmatrix}$.

2.拉普拉斯(Laplace)定理

定理 1.3(Laplace 定理) 在 n 阶行列式 D 中任意选定 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 行(或列),由这 k 行(或列)元素组成的一切 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

如:在 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\-1&-2&0&7\\8&2&-3&0\end{vmatrix}$ 中,选定第一,第四行,由定理 1.3 可得

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\-1&-2&0&7\\8&2&-3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\8&2\end{vmatrix}\times(-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix}7&8\\0&7\end{vmatrix}+$$
$$\begin{vmatrix}1&3\\8&-3\end{vmatrix}\times(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix}6&8\\-2&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\8&0\end{vmatrix}\times$$
$$(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix}6&7\\-2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&3\\2&-3\end{vmatrix}\times$$
$$(-1)^{1+4+2+3}\begin{vmatrix}5&8\\-1&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&4\\2&0\end{vmatrix}\times(-1)^{1+4+2+4}\begin{vmatrix}5&7\\-1&0\end{vmatrix}+$$
$$\begin{vmatrix}3&4\\-3&0\end{vmatrix}\times(-1)^{1+4+3+4}\begin{vmatrix}5&6\\-1&-2\end{vmatrix}.$$

拉普拉斯定理又称为行列式按某 k 行(列)的展开式.它是行列式按某一行

(列)展开的推广. 当行列式含有大量的零元素时,利用此定理计算较方便.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix}.$$

解 利用拉普拉斯定理,将 D 按第一、四行展开,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}. \\ &= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2). \end{aligned}$$

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 利用拉普拉斯定理,将 D 按第一,第二行展开,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 21 = 42. \end{aligned}$$

类似,利用拉普拉斯定理,可得如下结果:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sk} & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{ks} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}.$$

可将上述结果简记为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.