



南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何 下册

第二版

孟道骥 著



 科学出版社
www.sciencep.com



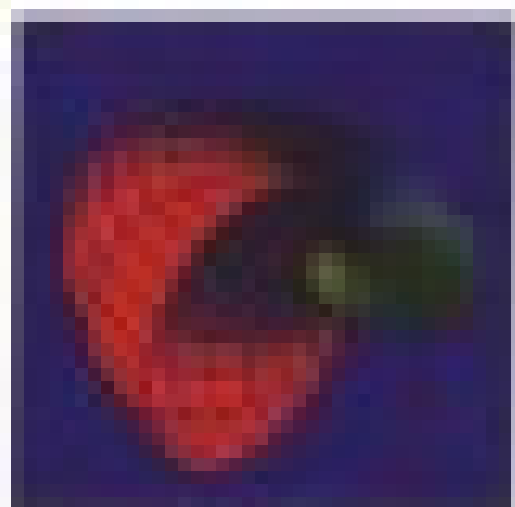
清华大学出版社

高等代数与解析几何

下册

第二版

姚慕尧 编



清华大学出版社

中国科学院规划教材
南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何

(下 册)

(第二版)

孟道骥 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

数学分析、高等代数与解析几何是大学数学系的三大基础课程。南开大学数学系将解析几何与高等代数统一为一门课程,此举得到了同行们的普遍认同,本书就是力求反映这种思想的尝试。

本书分上、下册,第1章讨论多项式理论;第2章介绍行列式,包括用行列式解线性方程组的Cramer法则;第3章矩阵,主要介绍矩阵的计算、初等变换及矩阵与线性方程组的关系;第4章介绍线性空间;第5章介绍线性变换;第6章多项式矩阵是为了讨论复线性变换而设的;第7章介绍Euclid空间;第8章介绍双线性函数与二次型;第9章讨论二次曲面;第10章介绍仿射几何与影射几何。本书附有相当丰富的习题。

本书可供高等院校数学系学生用作教材,也可供数学教师和科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何(上、下册)/孟道骥著. —2版. —北京:科学出版社, 2004

(中国科学院规划教材·南开大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-013324-2

I. 高… II. 孟… III. ①高等代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材 IV. ①O15②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第043107号

责任编辑:林 鹏 李鹏奇 姚庆奥/责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌 陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

西源印科厂

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1998年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年8月第 二 版 印张:30

2004年8月第六次印刷 字数:571 000

印数:15 001—18 000

定价:39.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

目 录

(下 册)

第 5 章 线性变换	(219)
5.1 线性变换的定义	(219)
5.2 线性变换的运算	(223)
5.3 线性变换的矩阵	(229)
5.4 特征值与特征向量	(237)
5.5 具有对角矩阵的线性变换	(245)
5.6 不变子空间	(251)
5.7 二、三维复线性空间的线性变换	(258)
5.8 复线性空间线性变换的标准形	(265)
第 6 章 多项式矩阵	(272)
6.1 多项式矩阵及其标准形	(272)
6.2 标准形的唯一性	(278)
6.3 矩阵相似的条件	(282)
6.4 复方阵的 Jordan 标准形	(286)
第 7 章 Euclid 空间	(291)
7.1 Euclid 空间的定义	(291)
7.2 标准正交基	(298)
7.3 Euclid 空间的同构	(306)
7.4 子空间	(307)
7.5 共轭变换, 正规变换	(313)
7.6 正交变换	(318)
7.7 对称变换	(322)
7.8 酉空间及其变换	(327)
7.9 向量积与混合积	(331)
第 8 章 双线性函数与二次型	(338)
8.1 对偶空间	(338)
8.2 双线性函数	(344)
8.3 二次型及其标准形	(353)

8.4 唯一性	(360)
8.5 正定二次型	(364)
8.6 二次型在分析中的应用	(370)
8.7 二次型在解析几何中的应用	(373)
第 9 章 二次曲面	(383)
9.1 二次曲面	(383)
9.2 直纹面	(394)
9.3 旋转面	(401)
9.4 二次曲面的仿射性质	(406)
9.5 二次曲面的度量性质	(418)
第 10 章 仿射几何与射影几何	(423)
10.1 仿射几何	(423)
10.2 基本仿射性质	(425)
10.3 仿射同构	(429)
10.4 仿射几何基本定理	(433)
10.5 射影几何	(440)
10.6 射影几何的基本关联定理	(446)
10.7 射影同构	(448)
10.8 对偶, 对偶几何	(453)
10.9 射影二次型	(457)
参考文献	(460)
下册索引	(461)

第 5 章 线性变换

所谓线性变换就是一个线性空间到自身的同态映射 (即线性映射). 线性变换除线性映射的一般性质外, 还有许多特殊的性质, 如特征值, 特征向量, 不变子空间等. 另外, 就是将线性变换具体化为方阵, 利用线性变换的方阵表示给出线性变换的分类理论.

线性变换是线性代数中很重要的很精彩的理论, 线性变换的用处也极为广泛.

5.1 线性变换的定义

定义 5.1.1 设 V 是数域 P 上的线性空间. A 是 V 的一个 **变换** (即 V 到 V 的映射), 并满足:

$$(1) \quad A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in V;$$

$$(2) \quad A(k\alpha) = kA\alpha, \quad \forall k \in P, \alpha \in V.$$

则称 A 是 V 的一个 **线性变换**.

等式 (1), (2) 分别叫做 A **保持加法** 与 **保持纯量乘法**.

例 5.1 设 $A \in P^{n \times n}$, 定义 $P^{n \times 1}$ 中变换 A 为

$$A(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in P^{n \times 1},$$

则 A 是 $P^{n \times 1}$ 的一个线性变换.

例 5.2 在 $P^{n \times n}$ 中取定一个元素 A , 定义 $P^{n \times n}$ 中变换 $\text{ad}A$ 如下:

$$\text{ad}A(B) = AB - BA, \quad \forall B \in P^{n \times n}.$$

则由

$$\begin{aligned} \text{ad}A(B + C) &= A(B + C) - (B + C)A \\ &= (AB - BA) + (AC - CA) = \text{ad}A(B) + \text{ad}A(C) \\ \text{ad}A(kB) &= A(kB) - (kB)A = k(AB - BA) = k\text{ad}A(B) \end{aligned}$$

知 $\text{ad}A$ 是 $P^{n \times n}$ 的线性变换.

例 5.3 在平面上取定直角坐标系 XOY . 每个平面向量均由过原点 O 的向量表示, 将每个向量绕原点 O 旋转 θ 角, 这样得到平面向量空间的一个变换, 记为 I_θ , 如图 5.1 所示.

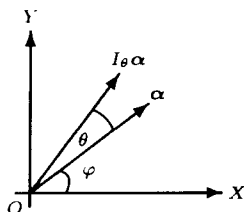


图 5.1

设向量 α 的长度为 r , 幅角为 φ , 则 α 的坐标为 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. $I_\theta \alpha$ 的长度为 r , 幅角为 $\theta + \varphi$, 因而坐标为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \varphi) \\ r \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此不难看出 I_θ 是一个线性变换.

例 5.4 在空间取定直角坐标系 $OXYZ$. 设 $\overrightarrow{OP} = \alpha \neq 0$, 又 $\beta = \overrightarrow{OQ}$. 过 Q 作 OP 的垂线, 垂足为 Q_0 , 称向量 $\overrightarrow{OQ_0}$ 为 β 在 α 上的投影. 定义变换 Π_α 为将 β 映到 β 在 α 上的投影, 记为 $\Pi_\alpha \beta$, 如图 5.2 所示.

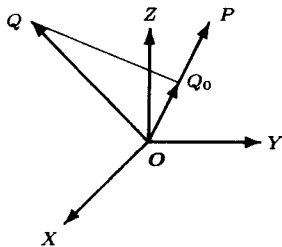


图 5.2

设 $\alpha, \beta, \Pi_\alpha \beta$ 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

于是 $\Pi_{\alpha}\beta = \lambda\alpha$, 且 $|\lambda\alpha|^2 + |\overrightarrow{QQ_0}|^2 = |\overrightarrow{OQ}|^2$. 而

$$\overrightarrow{QQ_0} = \Pi_{\alpha}\beta - \beta = \begin{pmatrix} \lambda x_0 - x \\ \lambda y_0 - y \\ \lambda z_0 - z \end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{aligned} & (\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2 + (\lambda z_0)^2 + (\lambda x_0 - x)^2 + (\lambda y_0 - y)^2 + (\lambda z_0 - z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda = (xx_0 + yy_0 + zz_0)/(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

因而

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \begin{pmatrix} x_0^2 x + x_0 y_0 y + x_0 z_0 z \\ x_0 y_0 x + y_0^2 y + y_0 z_0 z \\ x_0 z_0 x + y_0 z_0 y + z_0^2 z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 y_0 & x_0 z_0 \\ x_0 y_0 & y_0^2 & y_0 z_0 \\ x_0 z_0 & y_0 z_0 & z_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此知 Π_{α} 是线性变换.

例 5.5 设 $C^{\infty}(a, b)$ 是区间 (a, b) 上任意次可微函数的集合, 则 $C^{\infty}(a, b)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的无限维线性空间. $\frac{d}{dx}$ 是 $C^{\infty}(a, b)$ 的变换, 由微分学知 $\frac{d}{dx}$ 保持加法与纯量乘法, 故 $\frac{d}{dx}$ 是 $C^{\infty}(a, b)$ 的线性变换.

例 5.6 闭区间 $[a, b]$ 上全体连续函数的集合 $C[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 在 $C[a, b]$ 中定义变换 S 如下:

$$S(f(x)) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall f(x) \in C[a, b].$$

则由积分学知 S 保持加法与纯量乘法, 因而是 $C[a, b]$ 上的线性变换.

下面总假定 V 是数域 P 上的线性空间.

零变换 0 , 即 $0(\alpha) = 0, \forall \alpha \in V$.

在书写时, 数零, 零向量与零变换都不加区别, 但要注意它们在意义上的区别.

恒等变换 (单位变换) id , 即 $\text{id}(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in V$.

显然这是线性变换, 有时也记为 $\mathcal{E}, I$.

数乘变换 k , 即将 α 对应到 $k\alpha$, 这里 k 是 P 中一个固定的数. 显然, 这是线性变换. 当 $k=0$ 时, 为零变换; $k=1$ 时, 为恒等变换.

由于线性变换是一类特殊的同态映射, 故同态映射的性质对线性变换都成立, 如

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0) &= 0; \\ \mathcal{A}(-\alpha) &= -\mathcal{A}(\alpha); \\ \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^r k_i \alpha_i\right) &= \sum_{i=1}^r k_i \mathcal{A}(\alpha_i); \end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \dots, \mathcal{A}(\alpha_r)$ 线性相关;
 $\mathcal{A}(V)$ 是 V 的子空间 ($\dim \mathcal{A}(V)$ 称为 $\mathcal{A}$ 的秩, 记为 $R(\mathcal{A}), \text{rank } \mathcal{A}$) 等.

习 题

判断 1 ~ 12 中定义的变换 $\mathcal{A}$ 是否为线性变换.

1. 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi = \xi + \alpha$, 其中 α 为 V 的一固定向量.
2. 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi = \alpha$, 其中 α 为 V 的一固定向量.
3. 在 $P^{1 \times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$.
4. 在 $P^{1 \times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1)$.
5. 在 $P[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x) = f(x+1)$.
6. 在 $P[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x) = f(x_0)$, 其中 x_0 是 P 中一固定的数.
7. 把复数域作为复数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi = \bar{\xi}$, $\bar{\xi}$ 为 ξ 的共轭数.
8. 把复数域作为实数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi = \bar{\xi}$.
9. 在 $P^{n \times n}$ 中, $\mathcal{A}(X) = BXC$, 其中 B, C 是 $P^{n \times n}$ 中两个固定矩阵.
10. 在 $C^\infty(a, b)$ 中

$$\mathcal{A}f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} + \sin x \cdot f(x).$$

11. 在 $C^\infty(a, b)$ 中

$$\mathcal{A}f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 + x \frac{df(x)}{dx} + \sin x \cdot f(x).$$

12. 在 $C[a, b]$ 中

$$\mathcal{A}f(x) = \int_a^x K(t)f(t) dt, \quad \forall f(x) \in C[a, b].$$

其中 $K(x)$ 是 $C[a, b]$ 的一固定函数.

13. 求 $P[x]$ 的线性变换 $\frac{d}{dx}$ 的像及核

$$\frac{d}{dx}P[x] = \left\{ \frac{df(x)}{dx} \mid f(x) \in P[x] \right\},$$

$$\ker \frac{d}{dx} = \left\{ f(x) \in P[x] \mid \frac{df(x)}{dx} = 0 \right\}.$$

14. 求 $P[x]$ 的线性变换

$$L_x(f(x)) = xf(x)$$

的像 $L_x(P[x])$ 及核 $\ker L_x$.

5.2 线性变换的运算

设 V 是数域 P 上的线性空间, $\text{End } V$ 为 V 的所有线性变换的集合, 本节将定义 $\text{End } V$ 中的几种运算.

1. 加法 设 $A, B \in \text{End } V$, A 与 B 的和定义为

$$(A+B)\alpha = A\alpha + B\alpha, \forall \alpha \in V.$$

求和的运算称为加法.

事实上, 若 $\alpha, \beta \in V, k \in P$, 我们有

$$\begin{aligned} (A+B)(\alpha+\beta) &= A(\alpha+\beta) + B(\alpha+\beta) \\ &= A\alpha + B\alpha + A\beta + B\beta = (A+B)\alpha + (A+B)\beta, \\ (A+B)(k\alpha) &= A(k\alpha) + B(k\alpha) = kA\alpha + kB\alpha = k(A+B)\alpha. \end{aligned}$$

因而 $A+B \in \text{End } V$.

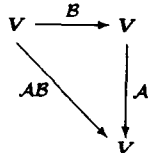
2. 纯量乘法 设 $k \in P, A \in \text{End } V$, 定义 k 与 A 的积如下:

$$(kA)\alpha = k \cdot A\alpha, \forall \alpha \in V.$$

不难证明 $kA \in \text{End } V$.

3. 乘法 设 $A, B \in \text{End } V$, 则 A 与 B 的积为

$$(AB)\alpha = A(B\alpha), \forall \alpha \in V.$$



若 $k, l \in P, \alpha, \beta \in V$, 则

$$\begin{aligned} (AB)(k\alpha + l\beta) &= A(B(k\alpha + l\beta)) = A(kB\alpha + lB\beta) \\ &= kA(B\alpha) + lA(B\beta) = k(AB)\alpha + l(AB)\beta. \end{aligned}$$

故 $AB \in \text{End } V$.

线性变换对于上述三种运算满足下面性质.

定理 5.2.1 设 V 是数域 P 上的线性空间, V 的所有线性变换的集合为 $\text{End } V$, 则

- 1) $\text{End } V$ 对加法及纯量乘法为 P 上线性空间;
- 2) $\text{End } V$ 中乘法满足结合律

$$A(BC) = (AB)C, \quad \forall A, B, C \in \text{End } V,$$

且

$$\text{id } A = A \text{id} = A, \quad 0A = A0 = 0;$$

- 3) $\text{End } V$ 中乘法及加法适合分配律

$$A(B+C) = AB + AC; \quad (B+C)A = BA + CA;$$

- 4) $\text{End } V$ 中乘法与纯量乘法满足

$$k(AB) = (kA)B = A(kB), \quad \forall k \in P, A, B \in \text{End } V.$$

证 定理 5.2.1 可直截了当地验证, 读者可自行完成.

特别指出, 线性空间 $\text{End } V$ 的零元素就是 V 的零变换 0 . A 的负元素 $-A = (-1)A$, 于是

$$(-A)\alpha = -A\alpha, \quad \forall \alpha \in V.$$

若 $k \in P$, 则 $k \text{id}$ 就是由 k 决定的数乘变换 k .

此外, 乘法交换律一般不成立.

定义 5.2.1 若 V 的线性变换 A 还是一一对应, 则称 A 为 **可逆线性变换**, 否则称 A 为 **不可逆**.

显然, A 可逆当且仅当 A^{-1} 存在.

定理 5.2.2 设 V 是数域 P 上的线性空间, $GL(V)$ 为 V 的所有可逆线性变换的集合, 则

- 1) $\text{id} \in GL(V)$;
- 2) $A \in GL(V)$, 则 $A^{-1} \in GL(V)$, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

3) $A, B \in GL(V)$, 则 $AB \in GL(V)$, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证 A 为 V 的可逆线性变换, 即 V 到 V 的同构映射, 因而由 4.11 节知定理 5.2.2 成立.

定义 5.2.2 设 V 是数域 P 上的线性空间, 又 $A \in \text{End } V$. 定义

$$A^0 = \text{id}, \quad A^{n+1} = AA^n.$$

A^n 称为 A 的 n 次幂.

又若 $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in P[x]$, 定义

$$f(A) = a_0 \text{id} + a_1 A + \cdots + a_m A^m.$$

称为 A 的一个多项式.

定理 5.2.3 设 A 是 P 上线性空间 V 的线性变换. 定义 $P[x]$ 到 $\text{End } V$ 的映射 φ_A 为

$$\varphi_A(f(x)) = f(A), \quad \forall f(x) \in P[x].$$

则有以下结论:

- 1) φ_A 是线性空间 $P[x]$ 到线性空间 $\text{End } V$ 的线性映射.
- 2) φ_A 保持乘法, 即

$$\varphi_A(f(x)g(x)) = \varphi_A(f(x))\varphi_A(g(x)), \quad \forall f(x), g(x) \in P[x].$$

- 3) $\ker \varphi_A = \{f(x) | f(A) = 0\}$ 是 $P[x]$ 的子空间, 且若 $f(x) \in \ker \varphi_A$, 则

$$f(x)g(x) \in \ker \varphi_A, \quad \forall g(x) \in P[x].$$

证 1) 设 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, $k \in P$, 则

$$\begin{aligned} \varphi_A(f(x) + g(x)) &= \varphi_A\left(\sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i\right) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)A^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i A^i + \sum_{i=0}^n b_i A^i = \varphi_A(f(x)) + \varphi_A(g(x)). \end{aligned}$$

$$\varphi_A(kf(x)) = \varphi_A\left(\sum_{i=0}^n k a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n k a_i A^i = k \sum_{i=0}^n a_i A^i = k \varphi_A(f(x)).$$

故 1) 成立.

2) 首先, 由于线性变换乘法的结合律, 故有

$$\mathcal{A}^m \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{m+n}, \quad m, n \in \mathbf{Z}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \mathcal{A}^k = \left(\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{A}^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \mathcal{A}^j \right) \\ &= \varphi_{\mathcal{A}}(f(x)) \varphi_{\mathcal{A}}(g(x)). \end{aligned}$$

因而 2) 成立.

3) 由 4.11 节知 $\ker \varphi_{\mathcal{A}}$ 是 $P[x]$ 的子空间. 设 $f(x) \in \ker \varphi_{\mathcal{A}}, g(x) \in P[x]$. 于是由

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x)) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = 0$$

知 $f(x)g(x) \in \ker \varphi_{\mathcal{A}}$.

推论 1 $m, n \in \mathbf{Z}, m \geq 0, n \geq 0$, 则

$$(\mathcal{A}^n)^m = \mathcal{A}^{mn}.$$

这是因为 $(x^n)^m = x^{mn}$, 由 2) 即可得上式.

推论 2 若 $\ker \varphi_{\mathcal{A}} \neq \{0\}$, 以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 表示 $\ker \varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低的首一多项式, 称为 $\mathcal{A}$ 的 **最低多项式**, 则 $f(x) \in \ker \varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $d_{\mathcal{A}}(x) | f(x)$. 等价地说, 有

$$\ker \varphi_{\mathcal{A}} = \{d_{\mathcal{A}}(x)g(x) | g(x) \in P[x]\}.$$

证 以 $q(x), r(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 的商式与余式. 由

$$f(\mathcal{A}) = d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$$

知 $f(x) \in \ker \varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $r(x) \in \ker \varphi_{\mathcal{A}}$. 但 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 为 $\ker \varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低者, 若 $r(x) \neq 0$, 由 $\deg r(x) < \deg d_{\mathcal{A}}(x)$, 这是不可能的, 故 $r(x) = 0$.

例 5.7 设 α 为空间一非零向量, 在直角坐标系 $OXYZ$ 中 $\overrightarrow{OP} = \alpha$, 过 O 作平面 π 与 α 垂直. 又 $\beta = \overrightarrow{OQ}$, β 在 α 上的投影为 $\Pi_{\alpha}\beta = \overrightarrow{OQ_0}$. 过 Q 作 π 的垂线, 垂足为 Q_1 . $\overrightarrow{OQ_1}$ 为 β 在 π 上的投影, 记为 $\Pi_{\alpha'}\beta$. 如图 5.3 所示.

因而

$$S_a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!} \mathcal{D}^i.$$

例 5.12 $\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$ 作为 $P[x]$ 中的线性变换, 最低多项式不存在, 即 $\ker \varphi_{\mathcal{D}} = \{0\}$.

事实上, 设 $f(x) \in P[x]$, $\deg f(x) = m$, 则

$$f(\mathcal{D})x^m \neq 0.$$

故 $f(x) \notin \ker \varphi_{\mathcal{D}}$, $\forall f(x) \in P[x]$.

以后, 将证明若 $\dim V < \infty$, 则任何 $\mathcal{A} \in \text{End } V$ 的最低多项式一定存在.

最后, 若 $\mathcal{A} \in GL(V)$, $k \in \mathbb{Z}$, 定义

$$\mathcal{A}^{-k} = (\mathcal{A}^{-1})^k.$$

则 $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ 有

$$\mathcal{A}^m \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{m+n}; \quad (\mathcal{A}^m)^n = \mathcal{A}^{mn}.$$

习 题

1. 在空间取定直角坐标系 $OXYZ$. 以 $\mathcal{A}$ 表示空间绕 OX 轴由 OY 向 OZ 方向旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{B}$ 表示绕 OY 轴由 OZ 向 OX 方向旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{C}$ 表示绕 OZ 轴由 OX 向 OY 方向旋转 90° 的变换. 证明

$$\mathcal{A}^4 = \mathcal{B}^4 = \mathcal{C}^4 = \text{id};$$

$$\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}; \quad \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2 \mathcal{A}^2.$$

并验证 $(\mathcal{AB})^2 = \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2$ 是否成立.

2. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End } P[x]$, 其中 $\mathcal{A}f(x) = f'(x)$, $\mathcal{B}f(x) = xf(x)$. 证明 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \text{id}$.
3. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End } V$, 且 $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \text{id}$. 试证 $\mathcal{A}^k \mathcal{B} - \mathcal{B} \mathcal{A}^k = k\mathcal{A}^{k-1}$, $k > 1$.
4. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一组基, $\mathcal{A} \in \text{End } V$. 证明 $\mathcal{A} \in GL(V)$ 当且仅当 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 线性无关.
5. 设线性空间 V 有直和分解 $V = M \dot{+} N$. 作 V 到 V 的映射 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 如下:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1, \quad \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N;$$

$$\mathcal{B}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2, \quad \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N.$$

分别称为 V 关于上述分解对 M, N 的 **投影**. 证明:

- 1) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End } V$;

- 2) $V \neq M$ 时 $A \notin GL(V)$;
 3) $A + B = \text{id}$, $A^2 = A$, $B^2 = B$;
 4) 若 $A, B \notin GL(V)$, 则 $d_A(x) = d_B(x)$.
6. 设 $A \in \text{End } V$ 且 $A^2 = A$. 证明:
 1) V 有直和分解: $V = M \dot{+} N$, 其中 M, N 分别为 $M = \{\alpha \in V | A\alpha = \alpha\}$, $N = \{\alpha \in V | A\alpha = 0\}$.
 2) 若 $A\alpha = k\alpha$, $k \neq 0, 1$, 则 $\alpha = 0$.
7. 设 $A, B \in \text{End } V$ 且 $A^2 = A$, $B^2 = B$. 证明 $(A+B)^2 = A+B$ 当且仅当 $AB = BA = 0$.
8. 设 $A, B \in \text{End } V$ 且 $A^2 = A$, $B^2 = B$. 证明若 $AB = BA$, 则 $(A+B-AB)^2 = A+B-AB$.

5.3 线性变换的矩阵

本节是将有限维线性空间的线性变换具体化为矩阵. 线性变换的运算对应于矩阵的运算.

定理 5.3.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基, 则对于 V 中任意 n 个向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 存在唯一的线性变换 A 使得

$$A\alpha_i = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1)$$

证 作 V 的变换 A 如下:

$$A\left(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i \beta_i.$$

于是对 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i \in V$, $k, l \in P$, 有

$$\begin{aligned} A(k\alpha + l\beta) &= A\left(\sum_{i=1}^n (kk_i + ll_i)\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n (kk_i + ll_i)\beta_i \\ &= k\left(\sum_{i=1}^n k_i \beta_i\right) + l\left(\sum_{i=1}^n l_i \beta_i\right) = kA\alpha + lA\beta. \end{aligned}$$

故 $A \in \text{End } V$. 又若 $B \in \text{End } V$, 且 $B\alpha_i = \beta_i$, $1 \leq i \leq n$. 则

$$B\left(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i B\alpha_i = \sum_{i=1}^n k_i \beta_i = A\left(\sum_{i=1}^n k_i \alpha_i\right).$$

因此 $A = B$, 即满足 (1) 式的线性变换是唯一的.