《特级教师帮你学》丛书

名誉主编 杨乐 · 主编 陈怀良

特级教师帮你学

·高中数学·

主编 王建民

华东师范大学出版社

北京海淀区著名教师重要奉献

·指导方法·

·拓宽思路·

·提高素质·

初中语文 主编李裕德

初中数学 主编王建民

初中英语 主编林生香

初中物理 主编陈育林

初中化学 主编刘振贵

高中语文 主编李裕德

高中数学 主编王建民

高中英语 主编林生香

高中物理 主编陈育林

高中化学 主编刘振贵

《特级教师带你学》丛书

ISBN 7-5617-1746-6

ISBN 7-5617-1746-6

G·796

定价：17.30元

出版说明

为了让全国中学生都能拥有特级教师，使他们能得到名师的指导和启迪，我们特地编辑出版了《特级教师帮你学》丛书。

丛书根据国家教委“变应试教育为素质教育”的精神，以全日制中学教学大纲和中考要求、高考考纲为依据，结合全国统编新教材和各地新编教材进行编写，普遍适用于全国各地中学。

丛书融汇了作者丰富的教学经验，展现了作者独特的教学方法和教学风格。丛书各册内容安排，既注重基础知识的巩固和基本技能的掌握，又注意思维方法的培养和解题能力的提高。全书力求阐析简明，重点突出，范例典型，习题精要。因此，此书可读性较强，对中学生打好基础，发展智力，提高能力和素质，能起到有效的学习指导作用。

著名数学家杨乐教授十分关心中学基础教育和丛书的编写，欣然应允担任《特级教师帮你学》丛书名誉主编，并为其撰写序言，在此深表敬意。

《高中数学》由北航附中数学教研组长、特级教师、中国数学奥林匹克高级教练、北京队主教练、全国航空普教协会数学组主任委员、海淀区数学试题主命题人王人伟，中国科大附中(北京)数学教研组长、特级教师王建民，北京师大附属实验中学数学高级教师、中学数学教材审查委员、北京市中学数学教材副主编、数学通报编委储瑞年，北大附中数学教研组长、高级教师、中国数学奥林匹克高级教练董世奎编写。董世奎协同主编审定书稿。

书中若有不当之处，期望专家和广大师生提出宝贵意见，以便进一步修订，使这套丛书真正成为中学生的良师益友。

华东师范大学出版社

1997年7月1日

序

华东师范大学出版社委托北京特级教师，负责本丛书高、初中的语文、数学、英语、物理、化学各分册的编写工作。

丛书的作者都是具有丰富教学经验的优秀教师，他们运用多年的教学经验，围绕正课的教学内容，力图使各分册有助于领会这些内容，使中学生能更好地掌握所学的知识，从而提高同学的素质与能力。书中还穿插了较多的例题与练习。

丛书各分册对中学老师的备课与讲授，对中学同学的学习与复习，均会起到良好的作用。

杨乐

1997年5月于北京

前　言

《特级教师帮你学》丛书高中数学由十个单元及附录组成，内容包括高中代数(包括三角)、立体几何和解析几何。每个单元，以现行课本、教学大纲为准，在限定的知识范围内，既从知识的发生、发展脉络、知识的逻辑体系及其内部结构出发，又考虑到学生学习中的难、易及其需要，确定若干个选题。在每个选题下，介绍这部分知识的发生、发展过程，揭示蕴含于过程中的数学思想和数学方法。对于重要的数学概念和原理，做了精辟的分析，对于重要的数学方法，通过精选的例题做了系统全面的介绍。每个选题独立成篇，附录中介绍了高考中的方程思想、数学应用题，并配有四套模拟练习。读者无论学习本书哪个内容，都可以从中得到你学习中几个疑难的解答，学会理解和运用某个数学思想方法，学会某些解题的技能和技巧。

本书从提高读者的基本数学素质出发，着重于阐述、分析规律，着重于提炼指导思想，着重于总结经验，着重于传授学习和掌握知识的方法。

本书是你高中三年学习生活中的好伙伴，也是你冲击高等学府的有力武器，而这一切都将通过提高你的思维能力、规范你的思维习惯、增长你的见识和经验，最终达到提高你的能力。这是几位作者的愿望。我们愿意用我们的学识和经验为你的成长铺路，只要能实现这个愿望的那怕万分之一，我们也很欣慰。

数学特级教师　王建民

1997 年 5 月

于中国科技大学附中(北京)

目　　录

第一单元　幂函数、指数函数和对数函数

一　函数的定义及性质

1. 函数定义

函数是从非空集合 A 到非空集合 B 上的一种映射 f：$A \to B$. 这里的“上”是指集合 B 中的元素在 A 中都有原象，也就是说 A 中所有元素的象要充满集合 B. 这里应深刻理解：函数就是揭示两个非空集合元素间的一种特殊的对应关系，即对于集合 A 中的每一个元素 x，在对应法则 f 的作用下，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应. 这种从集合 A 到集合 B 的特殊对应关系“f”就叫做定义在 A 上的变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中原象集 A 叫做函数的定义域，象集 B 叫做函数的值域.

从定义可知，对于一个函数，定义域和对应法则“f”一旦确定了，这个函数也就唯一的被确定了，同时这个函数的值域也就被确定了. 所以我们通常把函数的定义域和对应法则叫做函数的两大要素. 从而得知，若比较两个函数是否相同，那就看这两个函数的定义域和对应法则是否相同，如果两个函数的定义域和对应法则均相同，那么这两个函数就是同一个函数；否则，两个函数就不是同一个函数. 例如，在 $f(x)=\frac{x^2}{x}$ 和 $g(x)=x$ 中，$f(x)$ 可化为 $f(x)=x$ $(x\neq 0$，且 $x\in\mathbf{R})$. 由此可以看出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则是相同的，但由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 仍表示两个不同的函数.

由于函数是用映射来定义的，而映射是由原象集、对应法则和象集三部分构成的，再加上函数值域在函数及其应用中占有重要地位，所以通常我们又把函数定义域、对应法则和值域称为函数的三大要素.

在函数 $y=f(x)$ 中，“f”的含义是作用于小括号中变量 x 的对应规律，其表现形式有三种，即(1)图象；(2)表格；(3)解析式. 这样就引出了函数的三种表达形式，特别是当“f”表示施加于 x 上的运算及其运算规律时，这里的 x 是代表了小括号(　)这个整体，有时这个整体就是一个单一的字母 x；有时这个整体是一个较复杂的函数式，也就是“f”是施加于小括号里整个函数式的运算及运算规律. 如 $f(u)=u^2+1$，则 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1$.

我们经常碰到已知 $f[\phi(x)]=g(x)$，求 $f(x)$ 的问题.

例 1　已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 的解析式.

分析　求 $f(x)$ 的解析式就是求“f”，又“f”是施加于 $\dfrac{x+1}{x}$ 上的运算及其运算规律，求“f”的关键就是把 $\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ 写成关于 $\dfrac{x+1}{x}$ 的表达式.

解法一　$\because$

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{x+1}{x}\right) \\
=& \frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x} \\
=& \frac{x^2+2x+1-2x}{x^2}+\frac{1}{x} \\
=& \left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{1}{x} \\
=& \left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1-x}{x}
\end{aligned}
$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1,$$

$$\therefore\quad f(x)=x^2-x+1.$$

评析 以上方法是根据定义观察出对应规律“f”，称之为观察法.通常，使用换元法是发现“f”的常用方法.

解法二 令 $u=\dfrac{x+1}{x}$，解得 $x=\dfrac{1}{u-1}$，

$$\therefore\quad f(u)=\frac{\dfrac{1}{(u-1)^2}+1}{\dfrac{1}{(u-1)^2}}+u-1.$$

整理得 $f(u)=u^2-u+1.$

所以， $f(x)=x^2-x+1.$

例 2 已知 $3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$.

解 由已知 $x\neq0$，把原式中的 x 换成$\dfrac{1}{x}$，得

$$\begin{cases}3f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{3}{x},\\[2ex]3f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x.\end{cases}$$

解得 $f(x)=\dfrac{3(3x^2-1)}{8x}.$

例 3 已知 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，$f(0)=1$，$f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求 $f(x)$.

解 令 $a=0$，代入原式得

$$f(-b)=f(0)-b(-b+1)=b^2-b+1.$$

令 $-b=x$，则 $f(x)=x^2+x+1.$

评析 求 $f(x)$就是求对应法则“f”.常用的方法有(1)观察法;(2)换元法;(3)代换消元法;(4)待定系数法.

2. 函数的奇偶性

请同学们先看一下有些同学做的一个习题：

试判断函数 $f(x)=x^2+1\ (x\geqslant -3)$的奇偶性？

解答是：因为 $f(-x)=x^2+1=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数.

解答显然是错误的，因为 $x=5$ 时，$-x=-5\notin[-3,+\infty)$. 可知 $f(-5)$是不存在的，也就是说：对于定义域$[-3,+\infty)$中的任意 x，$f(-x)=f(x)$不是永远成立. 另外，从图象上可知 $f(x)=x^2+1\ (x\geqslant -3)$的图象不是关于 y 轴对称的，所以它不是偶函数. 错误的原因就是出在对定义的理解上，初学者往往只从形式上记忆偶函数定义中 $f(-x)=f(x)$这一条件，却忽略了对定义域中的任意一个 x 值，$f(x)$、$f(-x)$都存在，这一基本前提条件，为使学生便于掌握函数奇偶性的定义，可将书上的定义改写为：

对于给定的函数 $y=f(x)$，其定义域为 M，如果对任意的 $x\in M$，都有 $-x\in M$，且使得 $f(-x)=f(x)$永远成立，那么称函数 $f(x)$为定义在 M 上的偶函数；如果使 $f(-x)=-f(x)$永远成立，那么 $f(x)$为定义在 M 上的奇函数.

使用定义判断一个函数的奇偶性，首先，应判断已知函数的定义域是否是关于原点的对称区间；其次是验证 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)=-f(x)$对于定义域中的任意 x 是否永远成立.

偶函数的图象关于 y 轴对称，反之也成立；奇函数的图象关于原点对称，反之也成立.

例 4 任何一个定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和.

证明 假设存在一个奇函数 $g(x)$和一个偶函数 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)+h(x), \tag{1}$$

对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$f(-x)=h(x)-g(x). \tag{2}$$

(1)+(2)得 $$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

(1)－(2)得 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

所以存在奇函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 和偶函数 $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，使得 $f(x)=g(x)+h(x)$.

例 5 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ $(|x|<1)$；

(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$；

(4) $f(x)=\lg(1-x)+\lg(1+x)$.

解 (1) 已知函数化为 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$，

$\because$ $|x|<1$，显然任取 $x\in(-1,1)$，必有 $-x\in(-1,1)$，

$\therefore$ $f(-x)=-\sqrt{1-x^2}=f(x)$.

所以，$f(x)$ 为偶函数.

(2) 由 $\sqrt{x^2+1}>x$，得 $x\in\mathbf{R}$，任取 $x\in\mathbf{R}$，必有 $-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x).$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

另解 任取 $x\in\mathbf{R}$ $\because$ $f(-x)+f(x)$

$$=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$$
$$=\lg 1=0,$$

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$.

所以，$f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}\,|\cos x|}$ 是奇函数.(请读者自证)

(4) $f(x)=\lg(1-x)+\lg(1+x)$是偶函数.(请读者自证)

评析 ① 判断定义域的对称性是判断函数奇偶性必不可少的一步.

② 注意 $f(-x)=\pm f(x)\Longleftrightarrow f(-x)\mp f(x)=0$.

③ 判断奇偶性时，可把函数先化简，这样方便些.

例 6 已知 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，对一切实数 x、y 均成立，且 $f(0)\neq 0$，求证：$f(x)$是偶函数.

证明 $\because$ $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$对 x，$y\in\mathbf{R}$ 均成立.

令 $x=y=0$，则

$2f(0)=2\cdot f(0)\cdot f(0)$. 又 $f(0)\neq 0$，

$\therefore$ $f(0)=1$.

令 $x=0$，$y\in\mathbf{R}$，则

$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，

$\therefore$ $f(y)=f(-y)$，即 $f(-x)=f(x)$.

所以，$f(x)$是偶函数.

例 7 已知 $f(x)$是定义在 M 上的奇函数，且 $0\in M$，求证 $f(0)=0$.

证明 $\because$ $f(x)$是定义在 M 上的奇函数，

任取 $x\in M$，必有 $-x\in M$，且$f(-x)=-f(x)$永远成立.

又 $0\in M$，

$\therefore$ $f(0)=-f(0)$，$\therefore$ $f(0)=0$.

评析 从图象上很容易发现$f(0)=0$，但不能作为证明.

3. 函数的单调性

函数的奇偶性是指函数在整个定义域上的一种属性，而函数的单调性是刻画了函数值在定义域某个子区间上的变化状态的一种性质，其定义是：

对于给定的一个函数 $y=f(x)$，如果存在定义域的子集 M，

对于 M 内的任意两个值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)成立，那么就说函数 $y=f(x)$ 在集合 M 上是递增(递减)函数. 集合 M 是函数 $y=f(x)$ 的递增(递减)区间.

在某个区间 M 上的递增函数或递减函数统称为区间 M 上的单调函数，而这个区间 M 称为函数的单调区间.

我们所学的初等函数中，在整个定义域上可能只有一个单调区间，也可能有多个单调区间，所以我们说函数的单调性时，一定要指明函数在哪个区间上是哪种单调函数.

根据单调函数的定义，证明 $y=f(x)$ 在区间 M 上的单调性的步骤是：第一步，任取 x_1，$x_2\in M$，且 $x_1<x_2$；第二步，论证 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；第三步得出结论.

例 8 证明函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

证明 任取 $x_1<x_2\in\mathbf{R}$，

$$f(x_1)-f(x_2)$$
$$=\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}$$
$$=\frac{x_1-x_2}{\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2+\sqrt[3]{x_1x_2}+\left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2}.$$

令 $u=\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2^2}$，　　(*)

$\because$ $x_1<x_2\in\mathbf{R}$，

$\therefore$ x_1、x_2 中至少有一个不为零，不妨设 $x_2\neq 0$，

$\therefore$ $u=\left(\sqrt[3]{x_1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2\geqslant\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2>0$.

又 $x_1-x_2<0$，

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是递增函数.

评析 ① 在判断 u 的正负时，上述方法是将 u 写成非负数和

的形式 $u=\left(\sqrt[3]{x_1}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2$，也可用分类讨论的思想来证明 $u>0$.

② u 还可写成 $u=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2\right]$ 的形式.

③ 如果用函数的思想将 u 看成关于 $\sqrt[3]{x_1}$ 的二次函数，那么我们可以根据判别式 $\Delta=-\sqrt[3]{x_2^2}<0$ 证明 $u>0$.

例 9 若偶函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上为增函数，且 $f(0)=0$，试判断 $y=|f(x)|$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的单调性，并用定义证明你的结论.

解 由图象易知 $y=|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

证明 任取 $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$，则 $-x_2<-x_1\leqslant 0$.

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上递增，

∴ $f(-x_2)<f(-x_1)\leqslant f(0)$，

又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数，

∴ $f(-x_2)=f(x_2)$，$f(-x_1)=f(x_1)$，又 $f(0)=0$，

∴ $f(x_2)<f(x_1)\leqslant 0$，

∴ $|f(x_2)|>|f(x_1)|$.

所以，$y=|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

例 10 已知奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 内单调递减，又 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求 a 的取值范围.

分析 欲求 a 的取值范围，需列出等价的关于 a 的方程或不等式(组). 注意到 $f(1-a)$、$f(1-a^2)$ 均为复合函数，又 $f(x)$ 单调递减，于是有

解 ∵ $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$，

∴ $\begin{cases}-1<1-a<1,\\ -1<1-a^2<1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<a<2,\\ 0<|a|<\sqrt{2},\end{cases}$