高等代数解题方法与技巧

主　编　李师正
副主编　张玉芬　李桂荣　高玉玲

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等代数解题方法与技巧

主　编　李师正
副主编　张玉芬　李桂荣　高玉玲

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数解题方法与技巧/李师正主编 .—北京:高等教育出版社,2004.2(2005 重印)

ISBN 7-04-012942-6

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 113169 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 2 月第 1 版
印　　张	20.5	印　　次	2005 年 2 月第 4 次印刷
字　　数	380 000	定　　价	23.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 12942-00

前　言

高等代数是数学专业的重要基础课。高等代数主要包括多项式及线性代数两部分，而线性代数又是理、工、医、农、经济等学科的基础课。高等代数（包括线性代数）的特点是习题类型多，内涵丰富，变化复杂，难于概括和统一处理。有时尽管概念与理论已经学懂，但面对某些习题却感到无从下手。

本书编写的目的在于针对学生学习高等代数的困难，为他们提供在解题的方法与技巧方面的一把入门钥匙，也为那些准备报考硕士研究生的学生提供帮助，本书也可作为高等代数和线性代数的教师参考书。

本书分九章，每章包括基本知识、例题、习题、习题答案与提示等四节，其中基本知识一节简要地概括了该章的有关概念和定理，例题一节中二、三十道例题将本章的各种类型的方法对应的典型问题展示出来，其中不乏有多所高校的硕士生入学试题。许多例题提供多种解法，并且对于有启示的例题题后附有“点评”，起到画龙点睛的作用，在纷纭的论述与计算中，抽象出本质性的规律，并指出处理这类问题常用的方法，尽量有可操作性。习题一节包括了各类重要方法的练习题。对例题的各种方法掌握后，一般做本书的习题不会有太大的困难，何况每章的最后一节都编有习题的答案与提示。

本书可作为北京大学数学系编《高等代数》（第三版）和张禾瑞、郝钢新编《高等代数》（第四版）的学习参考书，其中北京大学数学系编《高等代数》（第三版）中增加了“双线性型与辛空间”一章，相应习题的内容将在本书修订时予以增补。

本书的编写人员是多年从事高等代数教学的教师，来自多所高等学校，书中许多素材来源于他们的教学经验与积累。本书第一章由李师正教授编写，第二章和第九章由高玉玲教授编写，第三章和第五章由李桂荣教授编写，第四章由刘学鹏教授编写，第六章和第七章由张玉芬教授编写，第八章由王彩云副教授编写，全书由李师正教授统稿。

由于编写人员水平所限。书中必然有不少错误和疏漏，恳请读者指正。

编者

2003 年 10 月

目　录

第一章 多 项 式

§1.1 基 本 知 识

一、数域与数环

1. 1) 数域是一个由某些复数组成的集合 P,它包括 0 和 1,且 P 中的任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍然是 P 中的数.

2) 常见的数域有有理数域 $\mathbf{Q}$、实数域 $\mathbf{R}$ 和复数域 $\mathbf{C}$.

2. 数环是一个由某些复数组成的非空集合 R,且 R 中任意两个数的和、差、积仍是 R 中的数.

3. 所有的数域都包含有理数域,数域总是数环.整数环是数环但不是数域.

二、一元多项式环

1. 设 P 为数域.如下的表达式称为数域 P 上的(一元)多项式:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$,$a_ix^i$ 称为 $f(x)$ 的第 i 次项,a_i 称为 i 次项系数.如果 $a_n\neq 0$,则 $f(x)$ 的次数为 n,记为 $\partial(f(x))=n$.零多项式无次数.

2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等当且仅当对应系数相等.

3. 多项式的和、差运算归结为对应系数的和、差.多项式的乘法运算归结为逐项相乘后合并同类项.加法和乘法适合交换律、结合律、分配律、消去律.

4. 数域 P 上的所有(一元)多项式的集合称为 P 上的一元多项式环,记为 $P[x]$.

三、多项式的整除性

1. 带余除法:设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$g(x)\neq 0$,则有唯一的 $q(x),r(x)\in P[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$,$r(x)$ 称为余式,$q(x)$ 称为商式.

2. 整除:设 $f(x),g(x)\in P[x]$.如果有 $q(x)\in P[x]$,使 $f(x)=$

$q(x)g(x)$，则称 $g(x)$整除 $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$.

3. 最大公因式：

1) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$d(x)\in P[x]$称为 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式，如果 $d(x)|f(x)$且 $d(x)|g(x)$，同时如果 $h(x)|f(x)$且 $h(x)|g(x)$，则有 $h(x)|d(x)$.

2) $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式 $d(x)$可通过辗转相除法求得，且可以表为 $f(x)$和 $g(x)$的组合，即有 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

其中 $u(x)$和 $v(x)$也通过辗转相除法求得. 反之，如果 $d(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的公因式，且 $d(x)$可表为 $f(x)$和 $g(x)$的上述组合形式，则 $d(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式.

3) $f(x)$和 $g(x)$的最大公因式在不计非零常数因子的意义下是唯一的. 用 $(f(x),g(x))$表示首项系数为 1 的最大公因式.

4. 互素：

1) $f(x),g(x)\in P[x]$称为互素，如 $f(x)$和 $g(x)$除零次多项式外无公因式，记为$(f(x),g(x))=1$.

2) $(f(x),g(x))=1$当且仅当存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

3) 如果$(f(x),g(x))=1$，$f(x)|g(x)h(x)$，则 $f(x)|h(x)$.

4) 如果 $f_1(x)|g(x)$，$f_2(x)|g(x)$，$(f_1(x),f_2(x))=1$，则 $f_1(x)f_2(x)|g(x)$.

5. 不可约多项式：

1) 在数域 P 上次数$\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$称为 P 上的不可约多项式，如果它不能表为数域 P 上两个次数低于$\partial(p(x))$的多项式之积.

一次多项式总是不可约的.

2) 设 $p(x)$为数域 P 上的不可约多项式，$f(x)$是 P 上任意多项式，则 $p(x)|f(x)$或$(f(x),p(x))=1$恰有一式成立.

3) 设 $p(x)$为 P 上的不可约多项式，$f(x),g(x)\in P[x]$，$p(x)|f(x)g(x)$，则 $p(x)|f(x)$或 $p(x)|g(x)$至少有一式成立.

6. 因式分解及唯一性定理：数域 P 上次数$\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$可以唯一地分解为数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是指如果有两个分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有 $s=t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,s)$，为非零常数.

7. 重因式：不可约多项式 $p(x)$称为多项式 $f(x)$的 k 重因式，如果 $p^k(x)$ 整除 $f(x)$，但 $p^{k+1}(x)$不整除 $f(x)$. 当 $k=1$ 时，$p(x)$称为多项式 $f(x)$的单因式，当 $k>1$ 时，$p(x)$称为多项式 $f(x)$的重因式.

四、重要数域上的不可约多项式

1. 复数域上的不可约多项式是且仅是一次多项式.

2. 实数域上的不可约多项式是且仅是一次多项式和判别式 $\Delta<0$ 的二次多项式.

3. 有理数域上的不可约多项式：

1) 有理数域上的多项式可以表为一个有理数与一个本原多项式之积，且除了一个正负号外是唯一的. 本原多项式是指系数互素的整数系数多项式.

2) 高斯(Gauss)引理：两个本原多项式之积仍是本原多项式.

3) 非零的整数系数多项式如能分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，则能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

4) 艾森斯坦(Eisenstein)判别法：设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

是一个整数系数多项式，如果有一个素数 p，满足条件：p 整除 $a_{n-1},\cdots,a_0$，p 不整除 a_n，p^2 不整除 a_0，那么 $f(x)$是有理数域上的不可约多项式.

五、多项式的根

1. 余数定理与因式定理：

1) 余数定理：用 $x-a$ 去除多项式 $f(x)$，其余式为常数 $f(a)$.

2) 因式定理：a 是多项式 $f(x)$的根当且仅当 $x-a$ 整除 $f(x)$.

2. 重根：

1) 如果 $x-a$ 是 $f(x)$的 k 重因式，则 a 称为 $f(x)$的 k 重根.

2) 数域 P 上 n 次多项式在 P 中的根不多于 n 个(重根按重数计算).

3. 有理根：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，是一个整数系数多项式，$r/s$ 是 $f(x)$的有理根，$(r,s)=1$，则 $s\mid a_n$，$r\mid a_0$. 当 $a_n=1$ 时，$f(x)$的有理根都是整数，且为 a_0 的因子.

4. 根与系数的关系：设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in P[x]$，$f(x)$在数域 P 中有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则有

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-a_1,\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_i}=(-1)^i a_i\text{(所有可能的 } i \text{ 个根之积的和)},\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n a_n.\end{cases}$$

*六、多元多项式与对称多项式

1. 设 P 是一个数域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是文字，形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的式子，其中 $a\in P,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是非负整数，称为 P 上的一个 n 元单项式.

2. 数域 P 上有限个 n 元单项式的和，称为数域 P 上的一个 n 元多项式.

3. 数域 P 上全体 n 元多项式的集合称为数域 P 上 n 元多项式环.

4. 数域 P 上的一个 n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，如果任意交换两个文字的位置，多项式不变，则称为对称多项式.

5. 下面的 n 个多项式称为初等对称多项式：

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.\end{cases}$$

6. 对称多项式基本定理：数域 P 上的任意 n 元对称多项式都能唯一地表为初等对称多项式的多项式.

§1.2 例　　题

例 1　写出包含$\sqrt{2}$的最小数环和最小数域.

解　令 $A=\{2m+n\sqrt{2}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$. A 是一个数环，事实上，$A\neq\varnothing$. $\forall 2m+n\sqrt{2},2m_1+n_1\sqrt{2}\in A$，则

$$(2m+n\sqrt{2})\pm(2m_1+n_1\sqrt{2})=2(m\pm m_1)+(n\pm n_1)\sqrt{2}\in A,$$

$$(2m+n\sqrt{2})(2m_1+n_1\sqrt{2})=2(2mm_1+nn_1)+(2mn_1+2m_1n)\sqrt{2}\in A,$$

显然$\sqrt{2}=0+1\sqrt{2}\in A$. 另一方面，如 B 为数环，且$\sqrt{2}\in B$，则

$$\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2}\in B,-\sqrt{2}=0-\sqrt{2}\in B,$$

$$(-\sqrt{2})+\cdots+(-\sqrt{2})\in B,$$

即 $n\sqrt{2}\in B, n\in\mathbf{Z}$. 而 $2=(\sqrt{2})^2\in B$, 推出全体偶数在 B 中, 因而 $A\subseteq B$. A 是包含$\sqrt{2}$的最小数环.

令 $P=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$. P 为数域, 事实上, $0,1\in P$, $\forall\, a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}\in P$, 则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in P,$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in P.$$

设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$,

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{1}{c^2-2d^2}[(ac-2bd)+(bc-ad\sqrt{2})].$$

设 F 为含$\sqrt{2}$的任意数域, 易见 $P\subseteq F$, 即 P 是含$\sqrt{2}$的最小数域.

点评 包含$\sqrt{2}$的最小数环是指一个数环 A, 适合$\sqrt{2}\in A$, 且如果一个数环 B 包含$\sqrt{2}$, 则 $A\subseteq B$. 包含$\sqrt{2}$的最小数域类似.

例 2 设 $f(x)$是数域 P 上的多项式, 如 $\forall\, a,b\in P$, 都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),$$

则 $f(x)=kx, k\in P$.

证明 证法 1 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 则 $\forall\, u\in P$, 有

$$f(2u)=f(u+u)=f(u)+f(u)=2f(u),$$

$$\begin{aligned}0=f(2u)-2f(u)&=2^na_nu^n+\cdots+2a_1u+a_0-2a_nu^n-\cdots-2a_1u-2a_0\\&=(2^n-2)a_nu^n+\cdots+(2^2-2)a_2u^2-a_0,\end{aligned}$$

于是 $a_n=\cdots=a_2=a_0=0$. $f(x)=a_1x$. 令 $k=a_1$, 则 $f(x)=kx$.

证法 2 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 由于 $f(t)=f(t+0)=f(t)+f(0)$, $\forall\, t\in P$ 成立. 于是 $f(0)=0$, 即 $a_0=0$,

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x.$$

$f(2)=f(1+1)=2f(1)$, $f(3)=f(2)+f(1)=3f(1)$, $\cdots$, $f(n)=nf(1)$.

设 $f(1)=k$, 得

$$\begin{cases}f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=k,\\ f(2)=2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=2k,\\ \cdots\cdots\\ f(n)=na_1+n^2a_2+\cdots+n^na_n=nk,\end{cases}\tag{1}$$

线性方程组(1)的系数行列式是范德蒙行列式, 不等于 0, (1)只有唯一解:

$$a_1=k, a_2=\cdots=a_n=0.$$

所以 $f(x)=kx, k\in P$.

点评 本题是由多项式的性质来刻画多项式的一个典型问题.证法 1 通过性质构造一个多项式恒等于零,推出系数全为零,得出结论.证法 2 利用解方程组得出.

例 3 证明实数域上多项式

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

是实数域上一个多项式的立方当且仅当 $p=3\sqrt[3]{r}$, $q=3\sqrt[3]{r^2}$(开方为实 3 次方根)

证明 设 $f(x)=(g(x))^3$,则 $g(x)$为一次多项式.设 $g(x)=ax+b$,于是

$$x^3+px^2+qx+r=(ax+b)^3=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3.$$

对比系数,得 $a^3=1, 3a^2b=p, 3ab^2=q, b^3=r$.

解得 $a=1, p=3b, q=3b^2, b=\sqrt[3]{r}$.得出 $p=3\sqrt[3]{r}$, $q=3\sqrt[3]{r^2}$.

反之,设条件成立. $p=3\sqrt[3]{r}$, $q=3\sqrt[3]{r^2}$.则显然

$$f(x)=(x+\sqrt[3]{r})^3.$$

点评 这类问题解法基于待定系数法,即两多项式相等当且仅当对应系数相等,转换为方程组求解.

例 4 当且仅当 k, l, m 适合什么条件时, $x^2+kx+1 \mid x^4+lx^2+m$?

解 解法 1 用带余除法,可得

$$\begin{aligned}x^4+lx^2+m=&(x^2+kx+1)(x^2-kx+(k^2+l-1))+\\&k(2-l-k^2)x+(m+1-l-k^2).\end{aligned}$$

因而当且仅当

$$\begin{cases}k(2-l-k^2)=0,\\ m+1-l-k^2=0\end{cases} \tag{1}$$

时,

$$x^2+kx+1 \mid x^4+lx^2+m.$$

条件(1)等价于

$$\begin{cases}k=0,\\ l=m+1,\end{cases} \text{或} \begin{cases}m=1,\\ l=2-k^2.\end{cases}$$

解法 2 记 $x^4+lx^2+m=(x^2+kx+1)(x^2+px+q)$,

比较系数,得方程组

$$\begin{cases}k+p=0,\\ kp+q+1=l,\\ kq+p=0,\\ q=m.\end{cases}$$

由 $p=-k, q=m$,得 $k(m-1)=0$,即 $k=0$ 或 $m=1$.如 $k=0$,则 $l=m+1$;若

$m=1$,则 $l=2-k^2$,即当且仅当

$$\begin{cases} k=0, \\ l=m+1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} m=1, \\ l=2-k^2 \end{cases}$$

时,

$$x^2+kx+1 \mid x^4+lx^2+m.$$

点评 证明一个多项式 $g(x)$整除一个多项式 $f(x)$,对于其系数已具体给出时,通常可采用带余除法:$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,整除性等价于余式 $r(x)=0$.或利用待定系数法,形式地写出

$$f(x)=q(x)g(x), \tag{2}$$

$\partial(q(x))=\partial(f(x))-\partial(g(x))$,$q(x)$的系数为待定常数,比较(2)两端各项系数,解出方程组,当且仅当该方程组在相应的数域内有解时,$g(x) \mid f(x)$.

例 5 若$(x-1) \mid g(x^n)$,求证$(x^n-1) \mid g(x^n)$.

证明 证法 1 因为

$$(x-1) \mid g(x^n),$$

由因式定理得 $g(1^n)=0$,即 $g(1)=0$,故

$$(x-1) \mid g(x),$$

于是存在多项式 $h(x)$,使

$$(x-1)h(x)=g(x).$$

有 x^n 代 x,得

$$(x^n-1)h(x^n)=g(x^n).$$

即

$$(x^n-1) \mid g(x^n).$$

证法 2 x^n-1 有 n 个不同的复根,即全部 n 次单位根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.而

$$g(\alpha_i^n)=g(1)=g(1^n)=0, i=1,2,\cdots,n.$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是$g(x^n)$的根,因而

$$(x^n-1) \mid g(x^n).$$

点评 证明一个多项式 $g(x)$整除多项式 $f(x)$,在 $f(x)$和 $g(x)$的系数未具体给出时,可采用以下方法:

如果 $g(x)$无重根,且 $g(x)$的复根全部都是 $f(x)$的根,则 $g(x) \mid f(x)$.

事实上,设 $g(x)$的根是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$,则可表为

$$g(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k).$$

因

$$f(\alpha_i)=0, \quad i=1,2,\cdots,k.$$

故

$$(x-\alpha_i)\mid f(x),\quad i=1,2,\cdots,k,$$

由于 $x-\alpha_1,x-\alpha_2,\cdots,x-\alpha_k$ 两两互素,故

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)\mid f(x),$$

即 $g(x)\mid f(x)$.

例 6 设 n 为非负整数,求证$(x^2+x+1)\mid[x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}]$.

证明 证法 1 x^2+x+1 的根为 $\alpha_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$和 $\alpha_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$,它们是三次单位根,将 $\alpha_i,i=1,2$ 代入 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$后,得

$$\alpha_i^{n+2}+(\alpha_i+1)^{2n+1}=\alpha_i^{n+2}+(-\alpha_i^2)^{2n+1}=\alpha_i^{n+2}-\alpha_i^{4n+2}=\alpha_i^{n+2}(1-\alpha_i^{3n})=0,i=1,2.$$

因而整除性成立.

证法 2 对 n 进行归纳.

当 $n=0$ 时,显然成立.

设 $n=k$ 时,结论成立,推证当 $n=k+1$ 时也成立.这时

$$\begin{aligned}x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}&=x^{k+3}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1}\\&=x^{k+3}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}\\&=x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}\end{aligned}$$

即

$$(x^2+x+1)\mid[x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}].$$

于是结论成立.

点评 证法 1 与例 5 中证法 2 道理相同,因 x^2+x+1 无重根,其根都是 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$的根,从而推出结论.证法 2 使用归纳法,适合某些含整数 n 的证明题.

例 7 求证$(x^2+1)\mid(x^7+x^6+\cdots+x+1)$.

证明 证法 1 在实数域上 x^2+1 不可约,但 x^2+1 与 $x^7+x^6+\cdots+x+1$ 显然有公共复根 i,它们在复数域上有公因式 $x-\mathrm{i}$,因而不互素,所以在实数域上也不互素.由不可约多项式的性质,x^2+1 整除 $x^7+x^6+\cdots+x+1$.

证法 2 用带余除法,余式等于零.

证法 3 x^2+1 的根为 $\pm\mathrm{i}$,无重根,$\pm\mathrm{i}$ 也是 $x^7+x^6+\cdots+x+1$ 的根,因而求证的整除性成立.

点评 证法 2 和证法 3 前面已讲过.

证法 1 主要利用不可约多项式的性质.不可约多项式 $p(x)$与一个多项式 $f(x)$之间只有两个关系,即 $p(x)\mid f(x)$或$(p(x),f(x))=1$,如果否定了后者,就可推出整除性.而 $p(x)$与 $f(x)$不互素当且仅当在复数域中它们有公共根.

例 8 设 $f(x),g(x),h(x)$是数域 P 上的多项式,且有

$$(x+a)f(x)+(x+b)g(x)=(x^2+c)h(x), \tag{1}$$

$$(x-a)f(x)+(x-b)g(x)=(x^2+c)h(x), \tag{2}$$

其中 $a,b,c\in P,a\neq 0,a\neq b,c\neq 0$. 求证 x^2+c 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式.

证明 由(1)-(2)得,$af(x)+bg(x)=0$,

$$f(x)=-\frac{b}{a}g(x),$$

(1)+(2),得

$$2(x^2+c)h(x)=x(f(x)+g(x))=\frac{a-b}{a}xg(x),$$

即

$$(x^2+c)\mid xg(x),$$

但显然$(x^2+c,x)=1$,故

$$(x^2+c)\mid g(x),$$

由此,

$$(x^2+c)\mid f(x).$$

点评 这一证明基于互素多项式一个重要性质,即如果$(f(x),g(x))=1$,$f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

例9 设 $g_m(x)=(x+1)^m-x^m-1$,当 m 为何正整数时$(x^2+x+1)^2\mid g_m(x)$?

解 x^2+x+1 的根为三次单位根 α_1,α_2(见例6),由于 $\alpha_i+1=-\alpha_i^2,i=1,2$. 如果有上述整除关系,则

$$(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\mid g_m(x).$$

即 $g_m(x)$有重根 α_1,α_2,

$$g'_m(x)=m(x+1)^{m-1}-mx^{m-1},$$

则有

$$g_m(\alpha_1)=g_m(\alpha_2)=0,\quad g'_m(\alpha_1)=g'_m(\alpha_2)=0.$$

而对于 $i=1,2$,

$$g_m(\alpha_i)=(\alpha_i+1)^m-\alpha_i^m-1=(-\alpha_i^2)^m-\alpha_i^m-1=(-1)^m\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1,$$

$$g'_m(\alpha_i)=m(-\alpha_i^2)^{m-1}-m\alpha_i^{m-1}=m\alpha_i^{m-1}[(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}-1].$$

因而应有

$$(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}=1,$$

则 $\alpha_i^{m-1}=1$(因 $\alpha_i^{m-1}\neq -1$),$(-1)^{m-1}=1$,即 $3\mid m-1,2\mid m-1$,因而 $m=6k+1,k$ 为非负整数.

反之,设 $m=6k+1,k$ 为非负整数. 则对于 $i=1,2$,由于

$$\alpha_i^3=1,$$

$$g_m(\alpha_i)=(-1)^m\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1=-\alpha_i^{2m}-\alpha_i^m-1=-\alpha_i^2-\alpha_i-1=0.$$

$$g'_m(\alpha_i)=m\alpha_i^{m-1}[(-1)^{m-1}\alpha_i^{m-1}-1]=0.$$

因此 α_1,α_2 为 $g_m(x)$的重根,而$(x-\alpha_1)^2$ 与$(x-\alpha_2)^2$ 互素,因而$(x^2+x+1)^2=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2$ 整除$g(x)$.所以,当且仅当 $m=6k+1$ 时,$(x^2+x+1)\mid g_m(x)$.

点评 这里利用了互素多项式的一个重要性质:如果 $f_1(x)\mid g(x)$,$f_2(x)\mid g(x)$,$(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.这在证明整除性质上是很重要的.

本题使用了证明一次式的方幂$(x-a)^k$ 整除某多项式$f(x)$的方法,即只须证明 $f(a)=0,f'(a)=0,\cdots,f^{(k)}(a)=0$,这时 a 为$f(x)$的至少 k 重根.

例 10 设 a 为$f(x)$的 3 重根,$g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$,证明 a 是$g(x)$的 3 重根.

证明 设 $f(x)=(x-a)^3f_1(x),f_1(a)\neq0$,

$$f'(x)=3(x-a)^2f_1(x)+(x-a)^3f'_1(x),$$

$$g(x)=(x-a)^3f_1(x)-(x-a)f'(x)=(x-a)^3[-2f_1(x)-(x-a)f'_1(x)].$$

因而

$$(x-a)^3\mid g(x).$$

但如果$(x-a)^4\mid g(x)$,则

$$(x-a)\mid[-2f_1(x)-(x-a)f'_1(x)],$$

与 $f_1(a)\neq0$ 矛盾.故$(x-a)^4$ 不整除 $g(x)$,a 为$g(x)$的 3 重根.

点评 为证 a 是$g(x)$的 3 重根,须证$(x-a)^3\mid g(x)$,$(x-a)^4$ 不整除$g(x)$.

例 11 求证:数域 P 上的n 次多项式$f(x)$适合 $f'(x)\mid f(x)$当且仅当

$$f(x)=a_0(x-x_0)^n,a_0\in P.$$

证明 证法 1 充分性.如 $f(x)=a_0(x-x_0)^n$,则 $f'(x)=na_0(x-x_0)^{n-1}$.显然 $f'(x)\mid f(x)$.

必要性.设 $f'(x)\mid f(x)$,如 $f(x)=0$,可取 $a_0=0$;设 $f(x)\neq0$,则 $f'(x)$除$f(x)$的商应为一次多项式,首项系数为$\frac{1}{n}$,故

$$nf(x)=(x-x_0)f'(x).$$

两端求导,得 $nf'(x)=f'(x)+(x-x_0)f''(x)$,或

$$f(x)=\frac{x-x_0}{n}f'(x)=\frac{(x-x_0)^2}{n(n-1)}f''(x)=\cdots=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x)=a_0(x-x_0)^n,$$

其中 a_0 为 $f(x)$的首项系数.

证法 2　充分性同证法 1.

必要性　如 $f(x)=0$,显然结论成立.设 $f'(x)\mid f(x)$,$\partial(f(x))=\partial(f'(x))+1$,得

$$f(x)=a_1(x-x_0)f'(x),a_1,x_0\in P.$$

于是有$(f(x),f'(x))=a_2f'(x)$,其中 a_2 为 $f'(x)$的首项系数的倒数.因而

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=\frac{a_1}{a_2}(x-x_0).$$

因$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$与 $f(x)$有相同的不可约因式,所以 $f(x)$的不可约因式只能是 $x-x_0$ 及它的非零常数倍.而 $f(x)$的次数为 n,所以 $f(x)=a_0(x-x_0)^n$,a_0 为 $f(x)$的首项系数.

点评　证法 1 基于待定系数法及求导法则,证法 2 基于待定系数法及 $f(x)$与$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$有相同的不可约因式的性质.

例 12　求证$(f(x),g(x))=1$ 当且仅当$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

证明　证法 1　设$(f(x),g(x))=1$,假如 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$不互素,则有不可约公因式 $p(x)$,因 $p(x)\mid f(x)g(x)$,则 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$,不妨设 $p(x)\mid f(x)$,又因 $p(x)\mid(f(x)+g(x))$,推出 $p(x)\mid g(x)$,因而 $p(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的公因式,与 $f(x),g(x)$互素矛盾.因而 $f(x)+g(x)$与 $f(x)g(x)$互素.

反之,设$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$,则有 $u(x),v(x)$使

$$(f(x)+g(x))u(x)+f(x)g(x)v(x)=1,$$

即

$$f(x)u(x)+g(x)(u(x)+f(x)v(x))=1,$$

因而

$$(f(x),g(x))=1$$

证法 2　设$(f(x),g(x))=1$,则有 $u(x),v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

因而

$$u(x)(f(x)+g(x))+(v(x)-u(x))g(x)=1,$$

$$(f(x)+g(x),g(x))=1,$$

同样

$$(f(x)+g(x),f(x))=1,$$

所以