

高中数学奥林匹克 基础知识及题解

陶文中 主编 (下册)



科学技术文献出版社

高中数学奥林匹克

基础知识及题解

(下册)

主 编 陶文中

副主编 齐振东 揭 英

编 者 张 程 张秀平 王人伟

王人倜 王永俊 陶文中

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

高中数学奥林匹克
基础知识与题解

(下册)

陶文中 主编

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)

河北玉田印机彩印厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 毫米 32 开本 14.5 印张 310 千字

1994 年 10 月第 1 版 1997 年 2 月第 3 次印刷

印数 15001—20000 册

ISBN 7-5023-2082-2/G·501

定 价:14.50 元

本书封四贴有防伪标识,无标识者为非法盗版。
版权所有,盗版必究。

前 言

近几年来,中小学生学习数学奥林匹克学习活动在我国迅速发展,一年一度的全国小学、初中和高中数学竞赛吸引了成千上万的中小学生学习,从小爱数学、赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助高中学生学习奥林匹克数学,在竞赛中取得更好成绩,我们结合多年数学竞赛辅导的经验,继编写《小学数学奥林匹克基础知识及题解》及《中学数学奥林匹克基础知识及题解》(初中)之后,又编写了高中上、下两个分册。两册书围绕高中数学知识,选择基础性强,应用性广的重点教学内容作为专题,同时又根据高中数学竞赛的需要,开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖,注意广度和深度,注重从方法上、从能力培养的角度上探究解题思路。

本书上册以高中代数为主,下册以高中立体几何和解析几何为主。为便于读者学习,每个专题都由“知识要点、要点分析、解题指导、练习、提示与解答”五部分内容组成;每讲专题后附的练习题有A、B两组,A组为高考水平训练题,B组为竞赛水平训练题。A、B组的题量比大致为6:4。由此可见,本书起点适度,难度恰当,适用面广,既可作高中数学奥林匹克竞赛的辅导读物,也可作高中生的课外提高性读物及教师的教学参考书。

参加本书编写工作的有陈娴(上册第一、二、四、五讲)、袁素芬(上册第十讲)、王永俊(上册第十一讲、下册第十二、十三、十四、十五讲)、单志惠(上册第十二讲)、罗小伟(上册第十三讲)、张程(下册第一、二、三、五讲)、张秀平(下册第四、六、七讲)、王人伟(下册第八、九讲)、王人倜(下册第十、十一讲)

及陶文中(其余各专题共十讲)等同志。北京教育学院陶晓永副教授为本书积极策划、指导,在此表示深切的感谢!

限于水平和时间,书中如有错误与不妥之处,诚盼赐教指正。

科学技术文献出版社,以社会效益为重,出版这套奥林匹克丛书,我们表示衷心的感谢。

陶文中

1994年3月20日

目 录

第一讲 平行与垂直

- 一、知识要点 1
- 1. 平行
- 2. 垂直
- 二、要点分析 3

第二讲 夹角与距离

- 一、知识要点 22
- 1. 夹角
- 2. 距离
- 二、要点分析 24

第三讲 截面、翻折与展开

- 一、知识要点 42
- 1. 截面
- 2. 翻折与展开
- 二、要点分析 43

第四讲 多面体与旋转体

- 一、知识要点 59
- 1. 多面体
- 2. 旋转体
- 3. 多面体与旋转体的表面展开
- 4. 多面体与旋转体的截

- 三、解题指导 4
- 四、练习 17
- 五、提示与解答 20

- 三、解题指导 25
- 四、练习 39
- 五、提示与解答 40

- 三、解题指导 43
- 四、练习 52
- 五、提示与解答 54

- 面问题
- 二、要点分析 59
- 三、解题指导 66
- 四、练习 83
- 五、提示与解答 86

第五讲 多面角

一、知识要点 88

1. 多面角的定义
2. 多面角的相关概念
3. 表示方法
4. 多面角的性质

第六讲 向量几何初步

一、知识要点 101

1. 向量的基本知识与坐标表示
2. 向量的基本运算与性质

第七讲 正多面体与欧拉定理

一、知识要点 129

1. 正多面体
2. 简单多面体与欧拉定理
3. 由欧拉定理可得到的

第八讲 直线方程

一、知识要点 140

1. 直线的方程关于 x, y 的一次方程 $Ax + By + C = 0$
(其中 A, B 不全为零)

二、要点分析 89

三、解题指导 91

四、练习 97

五、提示与解答 98

二、要点分析 101

三、解题指导 112

四、练习 125

五、提示与解答 127

正多面体的结论

二、要点分析 129

三、解题指导 132

四、练习 138

五、提示与解答 139

2. 图象

3. 直线方程的形式

二、要点分析 142

三、解题指导 144

四、练习 155

五、提示与解答 159

第九讲 圆方程

一、知识要点..... 163

1. 圆的标准方程
2. 圆心在原点的圆的方程
3. 圆的一般方程
4. 圆的极坐标方程

5. 关于圆的幂

- 二、要点分析..... 165
- 三、解题指导..... 167
- 四、练习..... 181
- 五、提示与解答..... 184

第十讲 圆锥曲线

一、知识要点..... 188

1. 椭圆、双曲线、抛物线的标准方程和性质
2. 椭圆、双曲线、抛物线其它形式的标准方程
3. 以坐标轴为渐近线的等轴双曲线方程
4. 椭圆、双曲线、抛物线的极坐标方程

5. 椭圆、双曲线、抛物线的切线、法线的性质

6. 椭圆、双曲线、抛物线的光学性质

- 二、要点分析..... 193
- 三、解题指导..... 196
- 四、练习..... 227
- 五、提示与解答..... 230

第十一讲 曲线系

一、知识要点..... 235

1. 直线系
2. 圆系
3. 共焦点的有心圆锥曲线系
4. 共轭双曲线系(共渐近线双曲线系)

5. 共焦点的抛物线系

6. 过两已知二次曲线

- 二、要点分析..... 237
- 三、解题指导..... 239
- 四、练习..... 253
- 五、提示与解答..... 255

第十二讲 全等形和相似形

一、知识要点..... 257

1. 全等三角形的性质与判定

2. 相似三角形的性质与判定

二、要点分析..... 258

三、解题指导..... 259

四、练习..... 275

五、提示与解答..... 278

第十三讲 梅涅劳斯定理和塞瓦定理

一、知识要点..... 280

1. 梅涅劳斯定理

2. 梅涅劳斯定理逆定理

3. 塞瓦定理

二、要点分析..... 280

三、解题指导..... 284

四、练习..... 300

五、提示与解答..... 302

第十四讲 托勒密定理、斯特瓦尔特定理

一、知识要点..... 305

1. 托勒密定理

2. 斯特瓦尔特定理

二、要点分析..... 305

三、解题指导..... 310

四、练习..... 323

五、提示与解答..... 325

第十五讲 几何不等式

一、知识要点..... 327

1. 有关证明线段不等的公理和定理

2. 有关证明角不等的定理

3. 圆中有关不等量的知

识

二、要点分析..... 328

三、解题指导..... 329

四、练习..... 348

五、提示与解答..... 350

第十六讲 几何极值

一、知识要点..... 357

1. 几何极值问题的意义

2. 几何中的基本极值性质

3. 代数中的重要不等式
4. 三角中的基本不等式
5. 解决几何极值问题的
主要方法

第十七讲 几何中的组合计数

- 一、知识要点····· 399
1. 加法原理和乘法原理
2. 基本组合计数公式
3. 几何中的组合计数问
题分类

第十八讲 构造法与解题

- 一、知识要点····· 420
1. 构造法的意义
2. 构造法常用的构作方
式

- 二、要点分析····· 358
- 三、解题指导····· 362
- 四、练习····· 383
- 五、提示与解答····· 387

- 二、要点分析····· 400
- 三、解题指导····· 405
- 四、练习····· 414
- 五、提示与解答····· 416

- 二、要点分析····· 420
- 三、解题指导····· 428
- 四、练习····· 439
- 五、提示与解答····· 442

第一讲 平行与垂直

一、知识要点

1. 平行

(1)两直线平行的判定

①在同一平面内没有公共点的两条直线平行(定义).

②先证在同一平面内,再用平面几何中的平行线的判定定理判定.

③如果一直线和一平面平行,经过这直线的一个平面与这平面相交,那么这直线和交线平行.

④如果两直线都平行于第三条直线,那么这两条直线互相平行.

⑤两个平行平面分别和第三个平面相交,则它们的交线平行.

⑥如果两条直线垂直于同一个平面,那么这两直线平行.

(2)一直线和一平面平行的判定

①如果一直线和一个平面没有公共点,那么这直线和这个平面平行(定义).

②平面外的一条直线,如果和这平面内的一条直线平行,那么这直线和这个平面平行.

③如果两个平面互相平行,那么在一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面.

(3)两平面平行的判定

①如果两个平面没有公共点,那么这两个平面互相平行(定义).

②如果两条相交直线都和一个平面平行,那么过这两条直线的平面也和这个平面平行.

③如果两个平面都平行第三个平面,那么这两个平面平行.

④如果两个平面垂直于同一条直线,那么这两个平面平行.

(4)有关直线与平面位置关系中的几个性质定理

①夹在两平行平面间的平行线段的长相等.

②两平行平面间的距离处处相等.

③两直线如果被三个平行平面所截,那么所截得的对应线段成比例.

④如果两个角的两边分别平行且方向相同,那么这两个角相等.

2. 垂直

(1)两直线垂直的判定

①按平面几何有关定理判定.

②如果一条直线垂直于一个平面,那么它垂直于平面内的任何直线.

③如果平面内的一直线和一条斜线在这平面内的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直(三垂线定理).

④平面内的一直线如果和这平面的一斜线垂直,那么它也和这斜线在平面内的射影垂直(三垂线逆定理).

(2)一直线和一个平面垂直的判定

①如果一直线和一平面内的任何直线都垂直,这直线就垂直于这个平面(定义).

②如果一直线和一平面内两相交直线都垂直,那么这直线垂直于这平面.

③如果两平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这平面.

④如果一条直线垂直于两平行平面中的一个,那么也垂直于另一个.

⑤如果两平面垂直,那么在一平面内且垂直于它们的交线的直线必垂直于另一个平面.

⑥如果两相交平面 α 和 β 都垂直于平面 γ ,那么它们交线也垂直于平面 γ .

(3)两平面垂直的判定

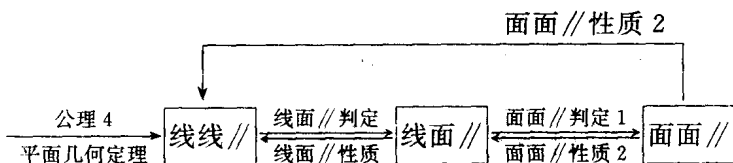
①如果两个相交平面所成的二面角是直二面角,那么这两个平面互相垂直(定义).

②如果一个平面经过另一个平面的垂线,那么这两个平面互相垂直.

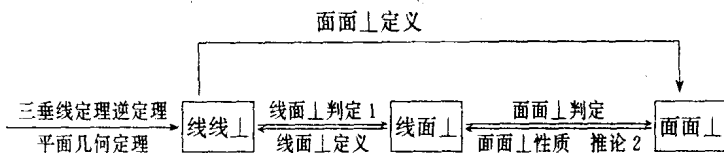
二、要点分析

在位置关系的定性研究中,线线、线面和面面间的平行和垂直的判定定理和性质定理是最重要的依据.为了便于记忆和应用,我们按互相转化的思想对其归纳整理如下,以突出它们内在的规律:

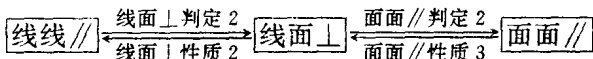
(1) 线线、线面、面面平行关系的转化



(2) 线线、线面、面面垂直关系的转化



(3) 平行、垂直关系的转化



三、解题指导

例 1 直线与平面平行的一个充要条件是这条直线与平面内的().

- A. 一条直线不相交; B. 两条直线不相交;
C. 任一条直线都不相交; D. 无数条直线不相交.

解 由直线与平面平行的判定定理可知,若直线与平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行,但选择支

无“直线和平面内直线平行”这个条件,于是考虑直线与平面平行的定义:直线和平面无公共点.因此,直线与平面平行必须满足直线和平面内任一条直线都不相交,故应选择 C.

当然此题也可以用排除法,举出反例一一排除 A、B、D,这样也就确定了 C 正确.

例 2 两个平面 α 与 β 互相平行的一个充要条件是 ().

- A. 有一个平面与 α 、 β 都垂直;
- B. 有一条直线与 α 、 β 都平行;
- C. 有一条直线与 α 、 β 都垂直;
- D. 有无穷多条直线与 α 、 β 都平行.

分析 有一个平面与 α 、 β 都垂直时, α 、 β 可能相交,也可能平行;有一条直线与 α 、 β 都平行时, α 、 β 可能相交,由定理“垂直于同一条直线的两个平面平行”可知 C 正确.当 α 、 β 相交时,仍存在无穷多条直线与 α 、 β 平行,所以 D 不对,故应选择 C.

例 3 在空间,下列命题成立的是 ().

- A. 过平面外两点有且只有一个平面与这个平面垂直;
- B. 在直线 l 上若有两点到平面 α 的距离相等,则 $l \parallel \alpha$;
- C. 若直线 l 与平面 α 内无数条直线垂直,则 $l \perp \alpha$;
- D. 二平行直线在平面 α 内的射影或是二平行直线,或是一条直线,或是两点.

解 显然 A 不对.若平面外两点所确定的直线与已知平面垂直,则过这两点有无数多个平面与这个平面垂直. B 也不对, l 上两点若在平面 α 两侧,则 $l \not\parallel \alpha$. C 亦错,若 l 与 α 内无数条平行直线垂直,则 l 可能与 α 相交,故 D 正确.

例 4 已知: 直线 $a \parallel$ 平面 α , 直线 $a \parallel$ 平面 β , $\alpha \cap \beta = b$,
求证: $a \parallel b$.

证明 在平面 α 内取一点 A , 在平面 β 内取一点 B , 使 $A, B \in b$. 过直线 a 和点 A 作平面 γ , 设 $\gamma \cap \alpha = c$, 过直线 a 和点 B 作平面 δ , 设 $\delta \cap \beta = d$.

$$\begin{aligned} \because a \parallel \alpha, a \parallel \beta \\ \therefore a \parallel c, a \parallel d \\ \therefore c \parallel d, \therefore c \parallel \beta \\ \because a \parallel c, \therefore a \parallel b \end{aligned}$$

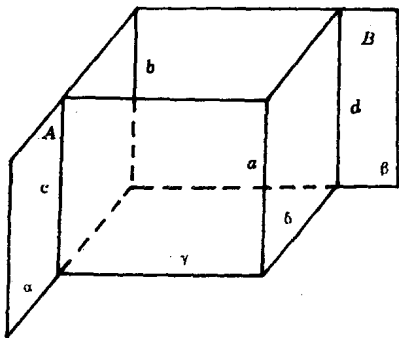


图 1-1

例 5 已知: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,
点 $M \in AB_1, N \in A_1C_1$,
且 $AM = A_1N$, 如图 1-2.

求证: $MN \parallel$ 面 B_1BCC_1 .

分析 欲证线面平行, 需证线线平行或面面平行, 为此均需从线线平行入手.

证法一 分别过 M, N 作 $MM_1 \parallel A_1B_1$, $NN_1 \parallel A_1B_1$ 分别交 BB_1 于 M_1 , 交 B_1C_1 于 N_1 , 则

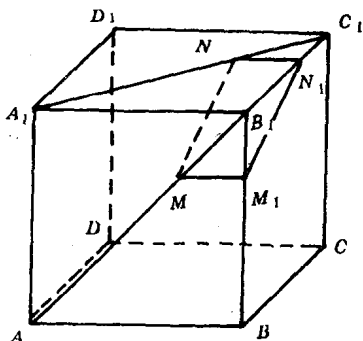


图 1-2

$MM_1 \parallel NN_1$, 连接 M_1N_1

$$\because AM = A_1N, AB_1 = A_1C_1, \therefore MB_1 = NC_1$$

$$\therefore \triangle MM_1B_1 \cong \triangle NN_1C_1, \therefore MM_1 = NN_1$$

$\therefore MM_1N_1N$ 为平行四边形.

$\therefore MN \parallel M_1N_1$, $\therefore MN \parallel$ 面 B_1BCC_1 .

证法二 连接 A_1M 并延长交 B_1B 于 H , 如图 1-3.

$\therefore A_1A \parallel B_1B$

$$\therefore \frac{A_1M}{MH} = \frac{AM}{MB_1}$$

又 $\therefore AM = A_1N$

$$AB_1 = A_1C_1$$

$$\therefore \frac{AM}{MB_1} = \frac{A_1N}{NC_1}$$

$$\therefore \frac{A_1M}{MH} = \frac{A_1N}{NC}$$

$\therefore MN \parallel HC_1$

$\therefore MN \parallel$ 面 B_1BCC_1

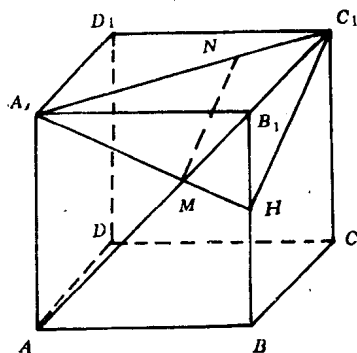


图 1-3

证法三 作 $NH \parallel B_1C_1$, 交 A_1B_1 于 H , 连接 HM , 如图 1-4, 则

$$\frac{A_1N}{NC_1} = \frac{A_1H}{HB_1}$$

又 $\therefore AM = A_1N$

$$AB_1 = A_1C_1$$

$$\therefore \frac{A_1N}{NC_1} = \frac{AM}{MB_1}$$

$$\therefore \frac{A_1H}{HB_1} = \frac{AM}{MB_1}$$

$\therefore HM \parallel A_1A \parallel B_1B$, $\therefore HM \parallel$ 面 B_1BCC_1

$\therefore NH \parallel$ 面 B_1BCC_1 , 又 $NH \cap MH = H$

$\therefore$ 面 $HMN \parallel$ 面 B_1BCC_1 , $\therefore MN \parallel$ 面 B_1BCC_1

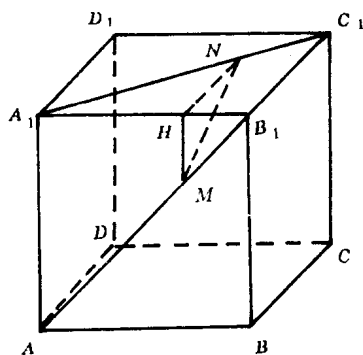


图 1-4