高中数学奥林匹克基础知识及题解

陶文中　主编　　　（下册）

科学技术文献出版社

高中数学奥林匹克

基础知识及题解

（下册）

主　编　陶文中

副主编　齐振东　揭　英

编　者　张　程　张秀平　王人伟

王人倜　王永俊　陶文中

科学技术文献出版社

（京）新登字 130 号

高中数学奥林匹克
基础知识与题解
（下册）
陶文中　主编
科学技术文献出版社出版
（北京复兴路 15 号　邮政编码　100038）
河北玉田印机彩印厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092 毫米　32 开本　14.5 印张　310 千字
1994 年 10 月第 1 版　1997 年 2 月第 3 次印刷
印数 15001 — 20000 册
ISBN 7－5023－2082－2/G・501
定　价：14.50 元

前　言

近几年来，中小学生数学奥林匹克学习活动在我国迅速发展，一年一度的全国小学、初中和高中数学竞赛吸引了成千上万的中小学生，从小爱数学、赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助高中学生学习奥林匹克数学，在竞赛中取得更好成绩，我们结合多年数学竞赛辅导的经验，继编写《小学数学奥林匹克基础知识及题解》及《中学数学奥林匹克基础知识及题解》(初中)之后，又编写了高中上、下两个分册。两册书围绕高中数学知识，选择基础性强，应用性广的重点教学内容作为专题，同时又根据高中数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度，注重从方法上、从能力培养的角度上探究解题思路。

本书上册以高中代数为主，下册以高中立体几何和解析几何为主。为便于读者学习，每个专题都由"知识要点、要点分析、解题指导、练习、提示与解答"五部分内容组成；每讲专题后附的练习题有A、B两组，A组为高考水平训练题，B组为竞赛水平训练题。A、B组的题量比大致为6∶4。由此可见，本书起点适度，难度恰当，适用面广，既可作高中数学奥林匹克竞赛的辅导读物，也可作高中生的课外提高性读物及教师的教学参考书。

参加本书编写工作的有陈娴(上册第一、二、四、五讲)、袁素芬(上册第十讲)、王永俊(上册第十一讲、下册第十二、十三、十四、十五讲)、单志惠(上册第十二讲)、罗小伟(上册第十三讲)、张程(下册第一、二、三、五讲)、张秀平(下册第四、六、七讲)、王人伟(下册第八、九讲)、王人倜(下册第十、十一讲)

及陶文中(其余各专题共十讲)等同志。北京教育学院陶晓永副教授为本书积极策划、指导,在此表示深切的感谢!

限于水平和时间,书中如有错误与不妥之处,诚盼赐教指正。

科学技术文献出版社,以社会效益为重,出版这套奥林匹克丛书,我们表示衷心的感谢。

陶文中

1994年3月20日

目 录

第九讲　圆方程

第十讲　圆锥曲线

第十一讲　曲线系

第一讲　平行与垂直

一、知识要点

1. 平行

(1)两直线平行的判定

①在同一平面内没有公共点的两条直线平行(定义).

②先证在同一平面内,再用平面几何中的平行线的判定定理判定.

③如果一直线和一平面平行,经过这直线的一个平面与这平面相交,那么这直线和交线平行.

④如果两直线都平行于第三条直线,那么这两条直线互相平行.

⑤两个平行平面分别和第三个平面相交,则它们的交线平行.

⑥如果两条直线垂直于同一个平面,那么这两直线平行.

(2)一直线和一平面平行的判定

①如果一直线和一个平面没有公共点,那么这直线和这个平面平行(定义).

②平面外的一条直线,如果和这平面内的一条直线平行,那么这直线和这个平面平行.

③如果两个平面互相平行,那么在一个平面内的任何一条直线平行于另一个平面.

(3)两平面平行的判定

①如果两个平面没有公共点，那么这两个平面互相平行(定义).

②如果两条相交直线都和一个平面平行，那么过这两条直线的平面也和这个平面平行.

③如果两个平面都平行第三个平面，那么这两个平面平行.

④如果两个平面垂直于同一条直线，那么这两个平面平行.

(4)有关直线与平面位置关系中的几个性质定理

①夹在两平行平面间的平行线段的长相等.

②两平行平面间的距离处处相等.

③两直线如果被三个平行平面所截，那么所截得的对应线段成比例.

④如果两个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.

2. 垂直

(1)两直线垂直的判定

①按平面几何有关定理判定.

②如果一条直线垂直于一个平面，那么它垂直于平面内的任何直线.

③如果平面内的一直线和一条斜线在这平面内的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直(三垂线定理).

④平面内的一直线如果和这平面的一斜线垂直，那么它也和这斜线在平面内的射影垂直(三垂线逆定理).

(2)一直线和一个平面垂直的判定

①如果一直线和一平面内的任何直线都垂直，这直线就垂直于这个平面(定义).

②如果一直线和一平面内两相交直线都垂直，那么这直线垂直于这平面.

③如果两平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这平面.

④如果一条直线垂直于两平行平面中的一个，那么也垂直于另一个.

⑤如果两平面垂直，那么在一平面内且垂直于它们的交线的直线必垂直于另一个平面.

⑥如果两相交平面 α 和 β 都垂直于平面 γ，那么它们交线也垂直于平面 γ.

(3)*两平面垂直的判定*

①如果两个相交平面所成的二面角是直二面角，那么这两个平面互相垂直(定义).

②如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面互相垂直.

二、要点分析

在位置关系的定性研究中，线线、线面和面面间的平行和垂直的判定定理和性质定理是最重要的依据. 为了便于记忆和应用，我们按互相转化的思想对其归纳整理如下，以突出它们内在的规律：

(1)线线、线面、面面平行关系的转化

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\text{公理 4}", "\text{平面几何定理}"'] & \boxed{\text{线线}\parallel} \arrow[r, shift left, "\text{线面}\parallel\text{判定}"] & \boxed{\text{线面}\parallel} \arrow[l, shift left, "\text{线面}\parallel\text{性质}"] \arrow[r, shift left, "\text{面面}\parallel\text{判定 1}"] & \boxed{\text{面面}\parallel} \arrow[l, shift left, "\text{面面}\parallel\text{性质 2}"] \arrow[ll, bend right, "\text{面面}\parallel\text{性质 2}"']
\end{tikzcd}$$

(2)线线、线面、面面垂直关系的转化

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\text{三垂线定理逆定理}", "\text{平面几何定理}"'] & \boxed{\text{线线}\perp} \arrow[r, shift left, "\text{线面}\perp\text{判定 1}"] \arrow[rr, bend left, "\text{面面}\perp\text{定义}"] & \boxed{\text{线面}\perp} \arrow[l, shift left, "\text{线面}\perp\text{定义}"] \arrow[r, shift left, "\text{面面}\perp\text{判定}"] & \boxed{\text{面面}\perp} \arrow[l, shift left, "\text{面面}\perp\text{性质}\quad\text{推论 2}"]
\end{tikzcd}$$

(3)平行、垂直关系的转化

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{线线}\parallel} \arrow[r, shift left, "\text{线面}\perp\text{判定 2}"] & \boxed{\text{线面}\perp} \arrow[l, shift left, "\text{线面}\perp\text{性质 2}"] \arrow[r, shift left, "\text{面面}\parallel\text{判定 2}"] & \boxed{\text{面面}\parallel} \arrow[l, shift left, "\text{面面}\parallel\text{性质 3}"]
\end{tikzcd}$$

三、解题指导

例 1　直线与平面平行的一个充要条件是这条直线与平面内的(　　).

A. 一条直线不相交；　　B. 两条直线不相交；

C. 任一条直线都不相交；　D. 无数条直线不相交.

解　由直线与平面平行的判定定理可知，若直线与平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行，但选择支

无“直线和平面内直线平行”这个条件，于是考虑直线与平面平行的定义：直线和平面无公共点. 因此，直线与平面平行必须满足直线和平面内任一条直线都不相交，故应选择 C.

当然此题也可以用排除法，举出反例一一排除 A、B、D，这样也就确定了 C 正确.

例 2 两个平面 α 与 β 互相平行的一个充要条件是（　　）.

A. 有一个平面与 α、β 都垂直；

B. 有一条直线与 α、β 都平行；

C. 有一条直线与 α、β 都垂直；

D. 有无穷多条直线与 α、β 都平行.

分析 有一个平面与 α、β 都垂直时，α、β 可能相交，也可能平行；有一条直线与 α、β 都平行时，α、β 可能相交，由定理“垂直于同一条直线的两个平面平行”可知 C 正确. 当 α、β 相交时，仍存在无穷多条直线与 α、β 平行，所以 D 不对，故应选择 C.

例 3 在空间，下列命题成立的是（　　）.

A. 过平面外两点有且只有一个平面与这个平面垂直；

B. 在直线 l 上若有两点到平面 α 的距离相等，则 $l /\!/ \alpha$；

C. 若直线 l 与平面 α 内无数条直线垂直，则 $l \perp \alpha$；

D. 二平行直线在平面 α 内的射影或是二平行直线，或是一条直线，或是两点.

解 显然 A 不对. 若平面外两点所确定的直线与已知平面垂直，则过这两点有无数多个平面与这个平面垂直. B 也不对，l 上两点若在平面 α 两侧，则 $l \not/\!/ \alpha$. C 亦错，若 l 与 α 内无数条平行直线垂直，则 l 可能与 α 相交，故 D 正确.

例 4　已知：直线 $a/\!/$平面 α，直线 $a/\!/$平面 β，$\alpha\cap\beta=b$，求证：$a/\!/b$.

证明　在平面 α 内取一点 A，在平面 β 内取一点 B，使 A，$B\notin b$. 过直线 a 和点 A 作平面 γ，设 $\gamma\cap\alpha=c$，过直线 a 和点 B 作平面 δ，设 $\delta\cap\beta=d$.

$\because\quad a/\!/\alpha, a/\!/\beta$

$\therefore\quad a/\!/c, a/\!/d$

$\therefore\quad c/\!/d$，$\therefore\quad c/\!/\beta$

$\because\quad a/\!/c$，$\therefore\quad a/\!/b$

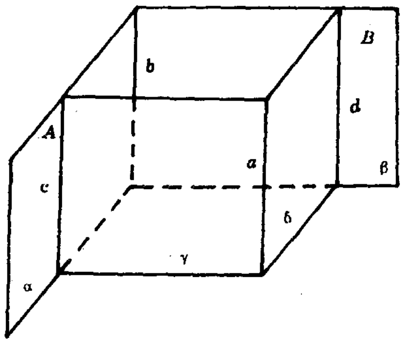

图 1-1

例 5　已知：在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M\in AB_1$、$N\in A_1C_1$，且 $AM=A_1N$，如图 1-2.

求证：MN $/\!/$ 面 B_1BCC_1.

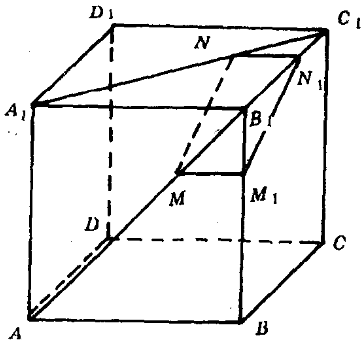

图 1-2

分析　欲证线面平行，需证线线平行或面面平行，为此均需从线线平行入手.

证法一　分别过 M、N 作 $MM_1/\!/A_1B_1$，$NN_1/\!/A_1B_1$ 分别交 BB_1 于 M_1，交 B_1C_1 于 N_1，则 $MM_1/\!/NN_1$，连接 M_1N_1

$\because\quad AM=A_1N, AB_1=A_1C_1$，　$\therefore\quad MB_1=NC_1$

$\therefore\quad \triangle MM_1B_1\cong\triangle NN_1C_1$，　$\therefore\quad MM_1=NN_1$

$\therefore$ MM_1N_1N 为平行四边形.

$\therefore$ $MN // M_1N_1$， $\therefore$ $MN //$ 面 B_1BCC_1.

证法二 连接 A_1M 并延长交 B_1B 于 H，如图 1-3.

$\because$ $A_1A // B_1B$

$\therefore$ $\dfrac{A_1M}{MH}=\dfrac{AM}{MB_1}$

又$\because$ $AM=A_1N$

$AB_1=A_1C_1$

$\therefore$ $\dfrac{AM}{MB_1}=\dfrac{A_1N}{NC_1}$

$\therefore$ $\dfrac{A_1M}{MH}=\dfrac{A_1N}{NC}$

$\therefore$ $MN // HC_1$

$\therefore$ $MN //$ 面 B_1BCC_1

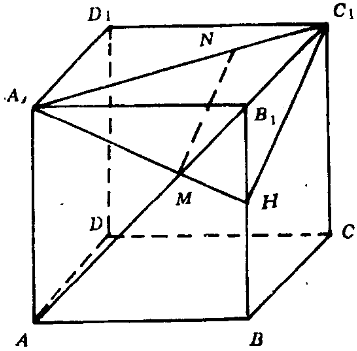

图 1-3

证法三 作 $NH // B_1C_1$，交 A_1B_1 于 H，连接 HM，如图 1-4，则

$\dfrac{A_1N}{NC_1}=\dfrac{A_1H}{HB_1}$

又$\because$ $AM=A_1N$

$AB_1=A_1C_1$

$\therefore$ $\dfrac{A_1N}{NC_1}=\dfrac{AM}{MB_1}$

$\therefore$ $\dfrac{A_1H}{HB_1}=\dfrac{AM}{MB_1}$

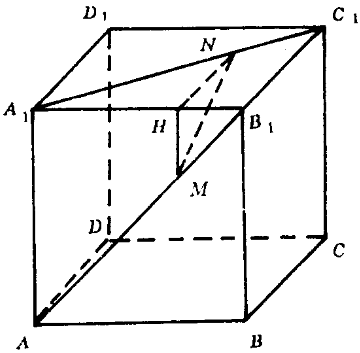

图 1-4

$\therefore$ $HM // A_1A // B_1B$， $\therefore$ $HM //$ 面 B_1BCC_1

$\because$ $NH //$ 面 B_1BCC_1， 又 $NH \cap MH = H$

$\therefore$ 面 $HMN //$ 面 B_1BCC_1， $\therefore$ $MN //$ 面 B_1BCC_1