



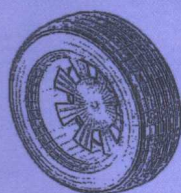
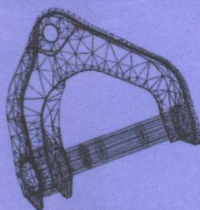
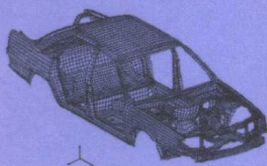
21世纪交通版

高等学校车辆工程专业教材

# 汽车有限元法

Qiche Youxianyuan Fa

◎ 谭继锦 主编



人民交通出版社  
China Communications Press

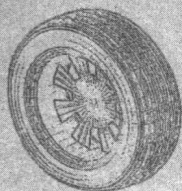
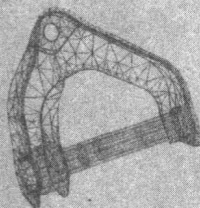
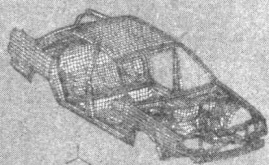


高等学校车辆工程专业教材

# 汽车有限元法

Qiche Youxianyuan Fa

◎ 谭继锦 主编



人民交通出版社

## 内 容 提 要

本书讲述有限元法及其在汽车结构分析中的应用。全书共分十章,主要内容包括:弹塑性和薄板弯曲基本理论;平面、空间、杆系、板壳、动力学和非线性问题的有限元法;有限元分析的基本过程;汽车结构有限元计算模型和汽车结构有限元分析实例。本书面向汽车工程,结合实例,其内容实用且简明扼要。

本书可作为高等院校车辆工程专业本科生、研究生的教材,也可供汽车行业工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

汽车有限元法/谭继锦主编. —北京:人民交通出版社, 2005.1

ISBN 7-114-05386-X

I. 汽... II. 谭... III. 有限元法-应用-汽车-构造-分析 IV. U463

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 131204 号

高等学校车辆工程专业教材

书 名: 汽车有限元法

著 作 者: 谭继锦

责任编辑: 钟 伟

出版发行: 人民交通出版社

地 址: (100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010)85285656, 85285838, 85285995

总 经 销: 北京中交盛世书刊有限公司

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市海波印务有限公司 一 宝日龙印刷有限公司

开 本: 787×980 1/16

印 张: 11.25

字 数: 218 千

版 次: 2005 年 1 月 第 1 版

印 次: 2005 年 1 月 第 1 版 第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-114-05386-X

印 数: 0001—4000 册

定 价: 17.00 元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)



## 高等学校车辆工程专业教材

### 21 世纪交通版高等学校车辆工程专业教材 编委会名单

#### 编委会主任

陈礼璠(同济大学)

#### 编委会副主任(按姓名拼音排序)

陈 南(东南大学)

杜子学(重庆交通学院)

方锡邦(合肥工业大学)

谷正气(湖南大学)

#### 编委会委员(按姓名拼音排序)

陈 明(同济大学)

陈全世(清华大学)

陈 鑫(吉林大学)

戴汝泉(山东交通学院)

邓亚东(武汉理工大学)

杜爱民(同济大学)

冯崇毅(东南大学)

冯晋祥(山东交通学院)

龚金科(湖南大学)

关家午(长安大学)

过学迅(武汉理工大学)

韩英淳(吉林大学)

何丹娅(东南大学)

何 仁(江苏大学)

何耀华(武汉理工大学)

黄韶炯(中国农业大学)

金达锋(清华大学)

李晓霞(长安大学)

刘晶郁(长安大学)

鲁植雄(南京农业大学)

栾志强(中国农业大学)

罗 虹(重庆大学)

任恒山(湖南大学)

谭继锦(合肥工业大学)

王国林(江苏大学)

温吾凡(吉林大学)

吴光强(同济大学)

席军强(北京理工大学)

张 红(中国农业大学)

张启明(长安大学)

赵福堂(北京理工大学)

钟诗清(武汉理工大学)

#### 教材策划组成员名单

刘敏嘉 白 嵘 钟 伟 翁志新 黄景宇



# 前言



汽车工业的发展已有百年历史,而有限元法诞生于 20 世纪中叶,将有限元法应用于汽车结构分析一般认为是在 20 世纪 70 年代之后。迄今为止,有限元法已经有了很大的发展,这表现在大量的文献及各种专用和通用程序的出现上。随着计算机辅助工程(CAE)溶入汽车设计过程的进程加快,有限元法为汽车设计工程师应用后,在产品设计阶段对 CAD 中生成的模型进行静态分析、模态分析和动态分析等,已成为设计和分析的必不可少的工具。然而,掌握有限元方法和原理,使用大型通用程序解算问题,以及读懂期刊上的文献资料,尤其是将计算结果应用于汽车设计中,都需要在专业知识和有限元理论方面具备更深入和更广泛的基础知识,这样才能结合专业实践学好用好有限元程序。

一般而言,有限元理论的发展已趋于成熟,大型通用有限元程序的开发支持推动了有限元法的应用与普及,有限元法不仅被应用于传统的机械与汽车领域,而且在温度场分析、流体动力学分析、电磁场分析和声学分析及其上述多物理场耦合分析等领域得到广泛应用。汽车设计正在借助有限元法,向着有限元优化设计、概率有限元设计、有限元疲劳设计和有限元参数设计的方向深入发展,应用范围大大拓宽。汽车虚拟设计概念的提出,更进一步推动了作为其技术支撑内容的有限元理论和计算方法的研究与发展,也使得汽车设计上了一个新的台阶。这恰好说明了有限元法作为应用技术和理论科学的两个方面,而且这两个方面正在相互促进与相互发展。

作者结合多年的教学经验和科学实践,编写了此书,介绍有限元基本理论,指导汽车结构分析。全书共分十章,一部分阐述弹塑性力学基础知识和有限元基本理论,包括平面问题、空间问题、杆系结构、板壳结构、动态分析及非线性问题,力求讲清有限元基本理论和在实际应用中涉及到的相关概念;另一部分着重讲授有限元法在汽车结构中的应用,包括数据的前后处理、计算模型的建立、边界约束的处理以及汽车结构有限元分析实例,有许多是结合作者与企业合作的科研实践。由于篇幅有限,非线性有限元法等内容只作了简单介绍。教学内容可结合有限元程序的使用,根据教学时数及层次对相关内容作适当取舍。

本书将有限元法与汽车结构分析相结合,面向汽车工程,实用性强。本书既可作为高等院校车辆工程专业本科生及研究生的教材,也可作为汽车行业广大工程技术人员学习

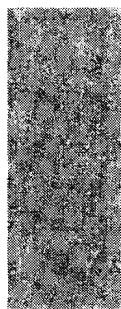


和应用有限元法的参考书。由于有限元法是一门实用性很强的学科,必须通过上机实践,才能更好地理解其中的一些概念。因此,本书强调理论与实践并重,一定要两手抓,既要掌握有限元基本理论,也要熟练应用有限元程序。我们期望,读者在学习并掌握了本书内容之后,将有助于增强使用有限元程序解决实际问题的能力。希望在校学生和广大工程技术人员接受并应用有限元法于生产实际中,为我国汽车工业的发展出力。

本书由谭继锦主编,并负责全书统稿。钱立军编写了第2章和第3章。限于作者水平,书中难免有不足之处,竭诚希望广大读者指正!

编 者





# 目 录



|                        |    |
|------------------------|----|
| 第1章 概论                 | 1  |
| 1.1 有限元法概述             | 1  |
| 1.2 有限元法在汽车工程中的应用      | 2  |
| 第2章 弹性力学基本方程及平面问题的有限元法 | 5  |
| 2.1 弹性力学基本方程           | 5  |
| 2.1.1 平衡方程、几何方程、物理方程   | 5  |
| 2.1.2 弹性力学问题解法简介       | 11 |
| 2.1.3 虚位移原理            | 12 |
| 2.2 平面问题的有限元法          | 13 |
| 2.2.1 平面问题的离散化         | 14 |
| 2.2.2 单元位移模式           | 15 |
| 2.2.3 单元应变和应力          | 18 |
| 2.2.4 单元刚度矩阵           | 19 |
| 2.2.5 单元等效节点载荷         | 21 |
| 2.2.6 总刚度矩阵            | 25 |
| 2.2.7 边界约束条件的处理        | 26 |
| 2.2.8 解题步骤与算例          | 26 |
| 2.2.9 计算结果处理           | 31 |
| 2.2.10 平面高阶单元          | 32 |
| 2.2.11 等参数单元           | 41 |
| 练习题                    | 49 |
| 第3章 空间问题的有限元法          | 51 |
| 3.1 概述                 | 51 |
| 3.2 4节点四面体常应变单元        | 52 |
| 3.2.1 位移模式             | 52 |
| 3.2.2 应变               | 53 |



|                              |           |
|------------------------------|-----------|
| 3.2.3 应力 .....               | 53        |
| 3.2.4 单元平衡方程 .....           | 54        |
| 3.3 8节点六面体单元 .....           | 55        |
| 3.4 20节点六面体等参数单元 .....       | 56        |
| 3.4.1 形函数 .....              | 57        |
| 3.4.2 单元特性分析 .....           | 58        |
| 3.4.3 等效节点力的计算 .....         | 59        |
| 3.5 空间轴对称问题的有限元法 .....       | 61        |
| 练习题 .....                    | 62        |
| <b>第4章 杆系结构的有限元法 .....</b>   | <b>64</b> |
| 4.1 概述 .....                 | 64        |
| 4.2 拉压直杆的有限元分析 .....         | 65        |
| 4.3 梁的有限元分析 .....            | 67        |
| 4.4 刚架的有限元分析 .....           | 69        |
| 练习题 .....                    | 73        |
| <b>第5章 板壳问题的有限元法 .....</b>   | <b>74</b> |
| 5.1 薄板的基本理论 .....            | 74        |
| 5.2 薄板矩形单元 .....             | 77        |
| 5.3 薄板三角形单元 .....            | 80        |
| 5.4 板弯曲有限元法的进一步讨论 .....      | 81        |
| 5.5 薄壳有限元分析简介 .....          | 82        |
| 5.5.1 矩形壳元分析柱壳 .....         | 83        |
| 5.5.2 三角形壳元分析任意形状薄壳 .....    | 86        |
| 练习题 .....                    | 88        |
| <b>第6章 结构动力问题的有限元法 .....</b> | <b>89</b> |
| 6.1 结构动力方程 .....             | 90        |
| 6.2 结构的自由振动 .....            | 93        |
| 6.3 结构的动力响应 .....            | 94        |
| 练习题 .....                    | 95        |
| <b>第7章 非线性问题的有限元法 .....</b>  | <b>97</b> |
| 7.1 非线性问题的一般处理方法 .....       | 98        |
| 7.2 弹塑性问题的有限元法 .....         | 100       |
| 7.2.1 弹塑性应力应变关系 .....        | 100       |
| 7.2.2 弹塑性问题的求解方法 .....       | 105       |
| 7.3 大变形问题的有限元法 .....         | 106       |
| 7.4 接触问题的有限元法 .....          | 108       |



|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 练习题·····                            | 109 |
| <b>第 8 章  有限元分析的基本过程及软件介绍</b> ····· | 111 |
| 8.1  有限元软件的选择与使用步骤·····             | 111 |
| 8.2  有限元分析的数据前处理·····               | 112 |
| 8.2.1  有限元分析的数据前处理·····             | 113 |
| 8.2.2  节点位移约束·····                  | 115 |
| 8.2.3  其他单元类型及属性·····               | 119 |
| 8.3  有限元分析的数据后处理·····               | 121 |
| 8.4  有限元程序中的单元库和材料库·····            | 123 |
| 8.5  有限元问题的求解·····                  | 124 |
| 8.6  有限元解的误差分析·····                 | 125 |
| 8.7  互联网在有限元分析中的应用·····             | 126 |
| 练习题·····                            | 127 |
| <b>第 9 章  汽车结构的有限元计算模型</b> ·····    | 128 |
| 9.1  概述·····                        | 128 |
| 9.2  汽车结构计算模型·····                  | 130 |
| 9.2.1  制定分析方案·····                  | 130 |
| 9.2.2  汽车结构件计算模型的分类及选用·····         | 130 |
| 9.3  载荷与边界约束条件的处理·····              | 134 |
| 9.3.1  载荷分类及其他·····                 | 134 |
| 9.3.2  约束与连接·····                   | 135 |
| 练习题·····                            | 137 |
| <b>第 10 章  汽车结构有限元分析实例</b> ·····    | 138 |
| 10.1  汽车零部件有限元分析·····               | 139 |
| 10.2  悬架结构有限元分析·····                | 141 |
| 10.3  车架有限元分析·····                  | 145 |
| 10.4  车身有限元分析·····                  | 151 |
| 10.5  轮胎有限元分析·····                  | 155 |
| 10.6  汽车碰撞有限元分析·····                | 157 |
| 10.7  汽车结构有限元优化设计·····              | 160 |
| 10.8  有限元法在汽车分析中的广泛应用·····          | 165 |
| <b>参考文献</b> ·····                   | 169 |





# 第1章 概 论

本章介绍有限元法的基本研究方法,即“结构离散—单元分析—整体求解”,概述有限元法在汽车工程中的应用,旨在使读者对有限元法及其在汽车工程中的应用有一个概貌性的了解。

## 1.1 有限元法概述

有限元法诞生于20世纪中叶,随着计算机技术和计算方法的发展,已成为计算力学和计算工程科学领域里最为有效的计算方法,它几乎适用于求解所有连续介质和场的问题。经过近50年的发展不仅使有限元方法的理论日趋完善,而且已经开发出了一批通用和专用有限元软件,这就为有限元法的普及提供了基础,使它成为结构分析中最为成功和最为广泛的分析方法。使用这些软件已成功地解决了众多领域的大型科学和工程计算问题,取得了巨大的经济和社会效益。

有限元法是将连续体理想化为有限个单元集合而成,这些单元仅在有限个节点上相连接,亦即用有限个单元的集合来代替原来具有无限个自由度的连续体。由于有限单元的分割和节点的配置非常灵活,它可适应于任意复杂的几何形状,处理不同的边界条件。单元有各种类型,包括线、面和实体或称为一维、二维和三维等类型单元。节点一般都在单元边界上,单元之间通过节点连接,并承受一定载荷,这样就组成了有限单元集合体(图1-1)。在此基础上,对每一单元假设一个简单的位移函数来近似模拟其位移分布规律,通过虚位移原理求得每个单元的平衡方程,即是建立单元节点力和节点位移之间的关系。最后把所有单元的这种特性关系集合起来,就可建立整个物体的平衡方程组。考虑边界条件后解此方程组求得节点位移,并计算出各单元应力。

有限元法直接为产品设计服务,与工程应用密切相关,而且有限元法的物理概念十分清晰,容易为工程技术人员所理解。大型集成化通用软件的普及与推广,使我们不必自行编写软件,只要选择合适的软件计算即可。应用有限元法进行一般工程结构分析成为相对容易的技术工作。用户交互式地进行结构离散、定义载荷、施加约束,并可以动态地观



看计算结果,实现了计算可视化。但是,为了正确地使用通用程序,做好数据前后处理工作,掌握分析方法,都需要对有限元基本理论有一定程度的理解。随着计算机辅助工程(CAE)溶入设计过程的进程加快,立足于设计前期的 CAE 技术,将有限元软件集成于 CAD 环境中,面向 CAD 软件的使用者,引导用户一步一步完成整个分析流程,形成产品分析、设计、制造一体化,这也是工业生产的发展方向,有限元法在其中起着重要的作用。

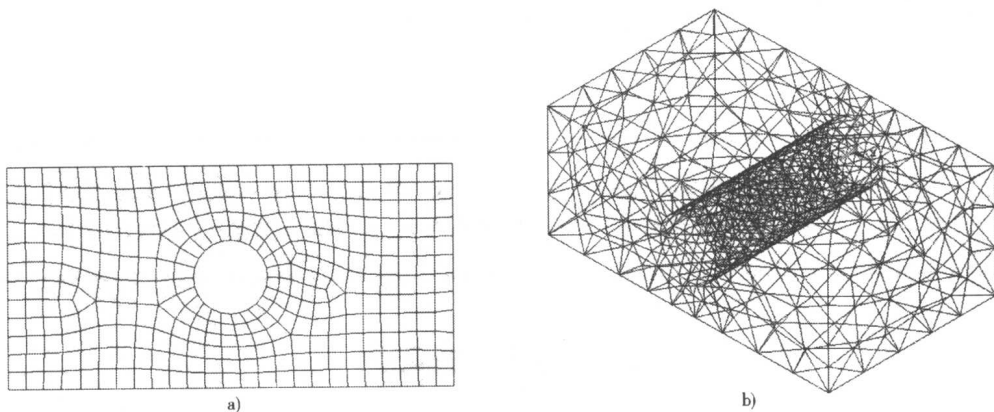


图 1-1

有限元法的基本思想是“分与合”,分是为了划分单元,进行单元分析,合则是为了集合单元,对整体结构进行综合分析。无论对什么样的结构,有限元分析过程都是类似的。其基本步骤为:(1)研究分析结构的特点,包括结构形状与边界、载荷工况等;(2)将连续体划分成有限单元,形成计算模型,包括确定单元类型与边界条件、材料特性等;(3)以单元节点位移作为未知量,选择适当的位移函数来表示单元中的位移,再用位移函数求单元中的应变,根据材料的物理关系,把单元中的应力也用位移函数表示出来,最后将作用在单元上的载荷转化成作用在单元上的等效节点力,建立单元等效节点力和节点位移的关系,这就是单元特性分析;(4)利用结构力的平衡条件和边界条件把各个单元按原来的结构重新连接起来,集成成整体的有限元方程,求解出节点位移。对不同的结构,要采用不同的单元,但各种单元的分析方法又是一致的。按照这一思想,本书从最简单的平面结构入手,由浅入深,介绍有限元理论以及在汽车结构分析中的应用。学习并掌握了有限元基本理论及分析方法,就可推广到各种结构形式,将有限元计算结果应用于工程结构设计中。

## 1.2 有限元法在汽车工程中的应用

随着大型有限元通用程序的推广和普及以及计算机硬件技术的飞速发展,高校、企业和科研单位都广泛采用了有限元技术用于汽车分析设计中,取得了巨大的经济效益。由于有限元通用程序使用方便,计算精度高,其计算结果已成为汽车产品设计和性能分析的



可靠依据。有限元分析已成为汽车设计中的重要环节,无论是在车型改造,还是在新车开发阶段,就产品中的强度、疲劳、振动、噪声等问题进行设计计算分析,可提高设计质量,缩短开发周期,节省开发费用,真正形成自主的产品开发能力。

汽车设计的直接目的就是安全、舒适、可靠、经济、环保、载重大和自重轻等,在这些研制工作中要解决的技术关键之一就是汽车强度与刚度问题。汽车结构的力学特性在很大程度上决定了整车的品质。在保证具有必要的强度储备和满足一定的刚度标准条件下,既要保证其疲劳寿命,又要保证其装配和使用要求,同时最大限度地减轻汽车结构的自重。随着现代汽车向高速化和轻量化方向发展,振动和噪声控制日益成为汽车设计的一项关键技术。NVH (noise, vibration and harshness) 控制技术,亦在汽车工业的科研中占据了重要位置。通过整车的动态特性分析以达到控制振动与噪声的目的。另外汽车结构还需要满足安全性、经济性、乘坐舒适性等指标的要求。所有这一切都将使汽车设计的内容更加丰富,也为有限元法提供了更为广泛的分析领域。

汽车结构由多种材料组成,其部件形式各种各样,包括板、梁、轴、块等,通过铆接与焊接构成空间形状复杂的体系,不可能用传统的解析数学来描述。再有汽车所承受的载荷也十分复杂,包括自重、货物、乘员、设备等各种载荷的作用,同时也受到各种路面激励和各种车速条件下惯性力的作用以及各连接构件之间的相互约束作用,不可能用经典力学的方法来计算。在汽车结构分析中,有限元法由于其能解决结构形状和边界条件都任意的力学问题的独特优点而被广泛应用。各种汽车结构件都可应用有限元法进行静态分析、模态分析和动态分析。现代汽车设计中,已从早期的静态分析为主转化为以模态分析和动态分析为主。因为实际汽车强度更加依赖于汽车振动及随机载荷响应。只有通过结构动态分析,才能进一步提高汽车结构强度设计水平,汽车结构动态分析技术已经进入实用化阶段。汽车结构有限元分析的应用主要体现在:

- (1) 汽车设计中对所有结构件、主要零部件的强度、刚度和稳定性分析;
- (2) 汽车结构件或零部件的优化设计,如以汽车质量或体积为目标函数的最优设计,还有对比分析中的参数化设计和形状优化;
- (3) 对汽车结构件进行模态分析、瞬态分析、谐响应分析和响应谱分析,为结构的动态设计提供方便有效的工具;
- (4) 汽车零部件及整车的疲劳分析,在概念或详细设计阶段估计产品的寿命或是分析部件损坏的原因;
- (5) 应用概率有限元,为汽车零部件提供概率和可靠性设计依据;
- (6) 车身内的声学设计,将车身结构模态与车身内声模态耦合,评价乘员感受的噪声并进行噪声控制;
- (7) 车身空气动力学计算,解决高速行驶中的升力、阻力和湍流等问题,为汽车性能和造型设计服务;



(8)汽车碰撞历程仿真和乘员安全保护分析,提高汽车结构的被动安全性。

现代汽车对结构设计提出了越来越高的要求,分析已不满足于传统的弹性分析,展现出许多新的特点。在要求有限元精确建模及产品精细设计的前提下,产品开发要更多地考虑非线性效应;进行有限寿命设计,以求产品轻量化;进行整车非线性系统分析,即整车平顺性、操纵稳定性不能仅以刚体模型进行分析,还要考虑结构的变形效应,主要体现在以下几个方面:

(1)电子和电器产品比重不断加大,这就涉及到多物理场的仿真问题;

(2)需要进行更精确的非线性分析,如少片弹簧、橡胶轮胎、悬挂的大变形、零部件间的柔性连接等;

(3)汽车零部件分析的一个难点就是分析载荷的不易确定问题,为避免零部件内力确定不清,边界条件的不确定性等情况,影响计算精度甚至结果不可用,可以从总成系统及整车分析入手,如悬架系统、白车身系统等;

(4)刚柔耦合动力学分析,从传统的刚体动力学分析到考虑结构弹性的应力响应,如悬架车轮系统等。

在产品设计的各个阶段,有限元分析的引入对降低开发成本,缩短研制周期,实施优化设计等都非常关键且效果显著。在概念设计阶段,从最初的总布置即可介入,如概略确定车身、发动机等总成的拓扑和结构参数;在产品阶段,对结构及零部件进行强度、刚度校核和优化设计;在样车试验阶段,进行专项分析,如部件疲劳分析、整车碰撞计算等,解决设计中存在的问题,将问题解决在产品投放市场之前。达到缩短开发时间、节省研制费用、减少投资风险的产品效益最大化的目标。

随着计算机技术的飞速发展,计算规模、计算速度、计算机容量等已不再是主要矛盾,在汽车结构有限元分析中,大多数问题都可以在微机上完成。通过建立零部件、结构或系统的有限元计算模型,或将 CAD 模型进行转换,对模型施加载荷或其他性能条件,即可进行计算。应用中的主要难题是如何精确的建立计算模型;如何实现计算模型中各种支承、连接与实际结构相符;如何确定载荷,尤其是动态载荷、路面载荷等;如何施加载荷,以反映各种行驶状态等。解决好上述问题,要通过学习有限元基本理论,结合专业知识,将学习有限元法和掌握程序操作技巧结合起来,通过上机实践,加深对问题的理解。但要注意软件只是一个工具,它提供了一个加快学习有限元法的平台。程序使用的再好,如果不懂有限元理论,是做不好有限元分析的,更谈不上为工程结构服务,这也是学习中要特别注意的问题。



## 第2章 弹性力学基本方程及平面问题的有限元法

本章首先介绍弹性力学基本理论、基本解法和虚位移原理,其次介绍平面问题有限元法的基本概念、单元位移模式、单元应变应力、单元刚度矩阵、单元节点载荷、总刚度矩阵、边界约束条件、解题步骤和计算结果处理等,最后介绍平面高阶单元和等参数单元。旨在通过对弹性力学基础理论的了解,掌握有限元法的基本概念、计算步骤和基本原理,为进一步学习和应用有限元法及通用程序打下基础。

### 2.1 弹性力学基本方程

弹性力学是研究可变形固体在外力和边界约束变动等作用下的弹性变形与应力状态的科学。其四项基本假定是:连续性材料、均匀性材料、各向同性材料和小变形物体。超出以上范围将有专门的学科进行研究,如非线性弹性力学、塑性力学、复合材料力学、断裂力学和损伤力学等。作用在物体上的外力主要有体力、面力和集中力等。在外力作用下,物体将产生应力和变形,而描述物体任何部位的内力和变形的力学量即是应力和应变。物体内各点的应力、应变和位移,一般说来是不同的,即各点的应力、应变和位移分量是坐标  $x, y, z$  的函数。在弹性力学中假想物体由无限多个微小六面体所组成,考虑任一微元体的平衡,可以建立一组平衡微分方程及边界条件;考虑微元体的变形条件,可以建立几何方程;考虑微元体的应力与应变之间的关系,可以建立物理方程。综合考虑平衡、几何、物理三方面条件,得出求解弹性力学的基本微分方程,再配以给定的边界条件(如果是动力学问题,还要配以给定的初始条件),就可求得应力分量、应变分量和位移分量。另外,弹性力学对所研究物体的形状与边界可以是任意的。

#### 2.1.1 平衡方程、几何方程、物理方程

##### 1. 平衡方程及应力边界条件

为了研究弹性体内任一点  $P$  处的应力状态,在物体任一点处截取一个微小的平行



六面体,每个面上的应力可分解为一个正应力和两个切应力分量,如图 2-1 所示。当微小的平行六面体趋于无穷小时,六面体上的应力就代表该点的应力状态。当物体处于平衡状态时,根据相邻点的应力增量关系及微元体的平衡条件:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \text{ 和 } \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

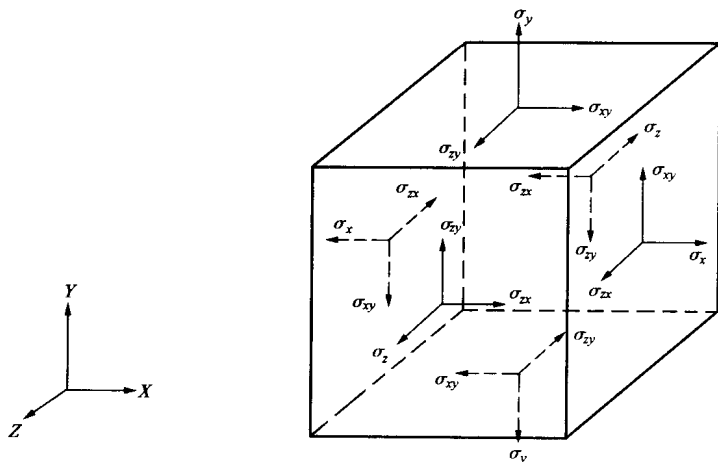


图 2-1

可建立应力与体力的相互关系——平衡微分方程以及切应力互等定理:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{aligned} \quad (2-2)$$

一点处的应力分量共有 9 个,由于切应力是成对发生的,9 个应力分量中只有 6 个是独立的。其中  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  为 3 个正应力,  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  为 3 个切应力,  $X, Y, Z$  为单位体积的体力。这样物体内任一点处的应力状态,可由 6 个独立的应力分量确定。在有限元法中,把一点的 6 个应力分量用应力列阵表示:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T \quad (2-3)$$

式中,右上标  $T$  表示转置。再考虑物体表面处任一微元四面体的平衡(图 2-2),可以建立应力与面力的相互关系——应力边界条件:

$$\begin{aligned} \bar{x}_v &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \bar{y}_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \bar{z}_v &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2-4)$$



式中:  $\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v$ ——单位面积的面力;

$l, m, n$ ——物体表面外法线  $v$  的 3 个方向余弦。

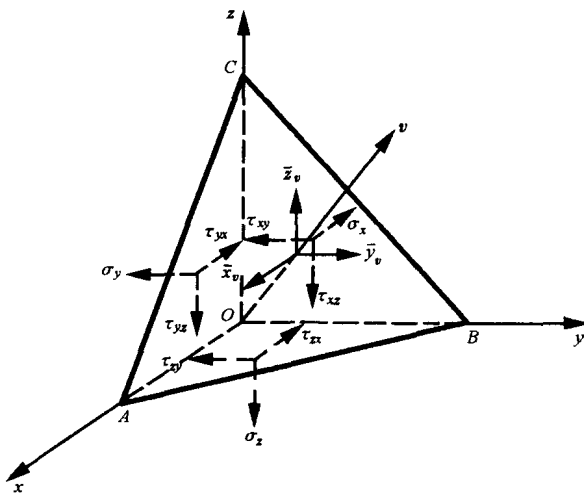


图 2-2

对于平面问题,当边界与某一坐标轴相垂直时,应力边界条件可得到简化,如在垂直于  $x$  轴的边界上  $v$  与  $x$  轴方向重合,故有  $l = \cos(v, x) = \pm 1, m = \cos(v, y) = 0$ , 于是

$$\sigma_x = \pm \bar{x}_v \quad \tau_{xy} = \pm \bar{y}_v$$

即边界处应力分量的数值与单位面积上的面力分量相等。且当边界的外法线方向沿坐标轴的正向时,取正号,反之取负号。同理在垂直于  $y$  轴的边界上,也可类似处理。

## 2. 几何方程及位移边界条件

物体受力后,要引起其中各点位置的改变,这就是位移。物体的位移由两部分组成:一是由物体的变形引起的,它与应变有关;二是同变形无关的刚体位移。其位移分量用  $u, v, w$  表示。相应位移分量列阵为:

$$\{f\} = [u \quad v \quad w]^T \quad (2-5)$$

为了研究物体的变形情况,同样假想把物体分割成无数个微小六面体,它们的变形可归结为棱边的伸长(或缩短)与棱边间夹角的变化。微元体中任意点分别与三个坐标轴平行的 3 条棱边的相对伸长度,即为正应变,变形前与两坐标轴正向一致的两正交线段在变形过程中发生的夹角改变量,即为切应变。各应变分量和位移分量之间的关系即为几何方程:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x & \gamma_{xy} &= \partial v / \partial x + \partial u / \partial y \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y & \gamma_{yz} &= \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z & \gamma_{zx} &= \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \end{aligned} \quad (2-6)$$





其应变分量阵为:

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]^T \quad (2-7)$$

如果已知位移分量,则不难通过对式(2-6)求偏导数得到应变分量,反之则不然。由于6个应变分量是通过3个位移分量表示的,6个应变分量之间必须满足一定的条件,弹性力学中称为变形协调条件。它的几何意义在于如果表示单元体变形的6个应变分量不满足这一条件,则在物体变形后,就不能将这些小单元体重新拼合成为连续体,其单元之间会产生很小的裂缝或重叠,这就违背了物体的连续性假设。再有,已知应变分量后,并不能完全确定位移分量。从无应变状态( $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ )的这一条件出发,可以从几何方程求出对应于无应变的刚体位移:

$$u = u_0 + \omega_y z - \omega_z y$$

$$v = v_0 + \omega_z x - \omega_x z$$

$$w = w_0 + \omega_x y - \omega_y x$$

式中  $u_0, v_0, w_0$  表示物体的刚体移动,而  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  则表示刚体转动。既然物体在应变为零时可以有刚体位移,对于物体在变形时,由于约束条件的不同,就可能具有不同的刚体位移。为了完全确定位移,对于空间问题,就必须有6个适当的约束条件来确定这6个常数。在有限元计算中,当结构本身没有约束时,为了使问题成为可解,需要人为地设置适当的约束以消除结构的刚体运动。约束点可适当选取,但这样计算所得各节点的位移是相对于约束点而言的。不难证明,各节点之间的相对位移值以及结构内力与所设置的约束点位置无关,但约束的数目必须是静定的。对于已经有足够约束的结构,要引入边界条件进行约束处理。当边界已知位移时,应建立物体边界上点的位移与给定位移相等的条件。其位移边界条件为:

$$u = u_s \quad v = v_s \quad w = w_s \quad (2-8)$$

其中  $u_s, v_s, w_s$  是边界上  $x, y, z$  方向上的已知位移分量。

除了上述应力边界条件和位移边界条件外,还有一类混合边界条件,即在物体的一部分边界上已知面力,此部分边界应用应力边界条件式(2-4),另一部分已知位移,因而具有位移边界条件式(2-8)。此外,在同一部分边界上还可能出现混合条件,既有应力边界条件,又有位移边界条件。

### 3. 物理方程

最后考察材料本身固有的物理特性,即物理方程。对各向同性弹性材料,广义虎克定律为:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]/E \\ \epsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]/E \\ \epsilon_z &= [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]/E \end{aligned} \quad (2-9)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$$

此处

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

