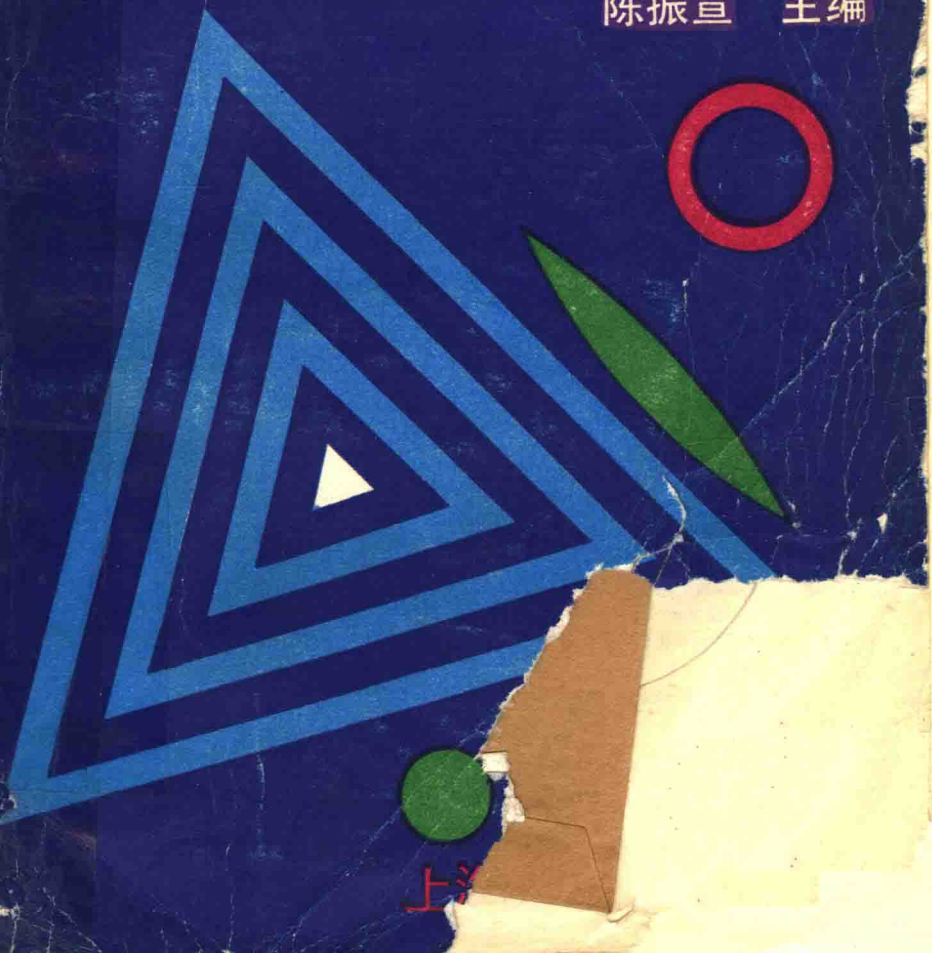


# 高考数学命题研究 与试题评析

陈振宣 主编



上海

# 高考数学命题研究 与试题评析

张明达 主编



# 高考数学命题研究 与试题评析

陈振宣 主编

上海科技教育出版社

**高考数学命题研究与试题评析**

陈振宣 主编

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路 393 号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 15 字数 334,000

1991 年 3 月第 1 版 1991 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—18000

ISBN 7-5428-0489-8

G · 490

定价：4.00 元

## 序 言

数学教育心理学国际会议已开过十多次，数学思维的研究实为数学教育心理学的中心问题。如何提高学生的数学思维能力与如何正确测定学生的知识和能力水平已成为数学教学科研的热门课题。综观当前研究的成果，多偏重于理论性探索，结合中学数学教学实际的还不多见。上海科技教育出版社独具慧眼，以我国高考数学命题改革研究的丰硕成果为背景，约请陈振宣同志主编《高考数学命题研究与试题评析》，根据对六年来，全国、上海、广东三种高考试题的测试目标的统计分析，从考试学角度提出了一些有益的建议，为开展评价系统研究提供了极好的素材。接着对高考数学命题中的能力要求从理论到实际作了详细阐述。陈振宣同志根据他对数学思维方法和数学思维能力结构的研究，提出了不少关于数学能力研究的创见，并对部分试题作了精辟的剖析，利用娴熟的数学语言和灵活的数学思维方法，给出了一些独特的、新颖的解法，充分显示了数学的逻辑美，无疑会引起读者的浓厚兴趣。这对数学思维能力研究的深入开展，都将起积极的推动作用。

《高考数学命题研究与试题评析》既是一本数学教育研究的理论书，又是高考数学命题研究的资料集。这是我国数学教学改革研究的新成果。在此书即将出版之际，特赘数言略述管见，并致祝贺。

马忠林

1990.10.15

# 目 录

第一章 高考数学命题研究.....	1
第二章 高考数学命题中的能力要求.....	12
第三章 高考数学测试目标的统计分析.....	76
第四章 提高数学思维能力.....	95
附录.....	156
1. 1985年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	156
2. 1986年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	212
3. 1987年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	252
4. 1988年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	303
5. 1989年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	357
6. 1990年全国、上海、广东高考数学试题及 解答、评分标准.....	405
7. 1989年香港高考数学试题.....	460

# 第一章 高考数学命题研究

高考数学命题对中学数学教学的影响是很大的. 对命题工作进行研究, 探讨如何更好地贯彻国家教委提出的“既有利于大学选拔新生, 又有利于促进中学的数学教学改革”的高考命题指导方针, 有积极的意义.

## 一、从考试学看高考数学命题

高考是选拔考试, 要使命题有利于大学选拔新生, 就应该从考试学来研究命题工作. 我们先从考察试题的难度入手.

试题的难度是反映试题或整套试题难易程度的指标, 计算公式有二:

(1) 二分法(即只有满分和零分两种记分)的试题的难度计算公式:

$$P = \frac{R}{N} \times 100\%,$$

其中,  $P$  表示难度,  $N$  是参加考试的总人数,  $R$  是答对这一试题人数.

(2) 非二分法记分的试题的难度计算公式:

$$P = \frac{\bar{x}}{x} \times 100\%,$$

其中,  $P$  表示难度,  $x$  表示该试题的应得分,  $\bar{x}$  表示所有参加考试的学生解答此试题的平均分.

实际上计算难度就是计算该题的得分率, 这有其合理的

一面。但若学生曾做过某些数学题(或做过类似的问题),则这些题的得分率将大幅度提高,因而影响难度的客观性。如何使试题的难度更客观、更合理是一个值得研究的课题。

我们曾试图给出试题难度的一种量化的定义,即每一道数学题的解答都由一条连贯、分段的逻辑思维链构成,一般说,这条思维链越长,则试题的解答越困难。因此,取试题解答的思维链的长度作为难度量化的指标之一是合理的。

在一道题解答的逻辑段中,从已知条件  $p(x)$  追索其必要条件  $A_i(x)(i=1, 2, 3, \dots)$  时,可供选择的信息量与其中能通向结论  $q(x)$  的信息量之比称为思维的广度。一般说,思维广度越大,难度也越大,所以取每一题的思维广度作为难度量化指标之一也是可以理解的。

众所周知,一题的解法往往不是唯一的,因而其思维链的长度和思维广度也不是唯一的。由于思路不同,思维链长度长的,不一定比思维链长度短的难;相反某些巧解、妙解的思维链虽短,但要构思出这类思路却是比较难的。可见试题难度的构成成份中,还存在着另一些复杂的成份,暂名为“思维质”。显然,思维质是不易量化的。

有人谈到标准化考试的实质时说:“考试要实行标准化,最本质的一点,就是为不同类型的人建立参照点,使一个考生的成绩能够和同类考生相比,从而判断其水平。”可见,设立标准化考试最根本的一条是要树立一条量尺,使任何人在此量尺下,对他的知识和能力水平有一公正的评定。按目前考试的实践来看,这把量尺往往就是一份试卷。从这个意义来说,试题的难度(这里指的是试题的客观合理的难度,并非前述的试题的得分率),无疑是量尺的刻度。它是衡量人的知识与能力水平的标志。因此,一份试卷要能正确测出考生的知识和能力



的水平,试题难度配备是否合理恰当,实为命题工作的关键。

教育测量的概念、理论脱胎于物理量的测量。相对地说,物理量的标尺比较简单,人的知识水平和能力水平的标尺就不那么简单了。要建立一把能测量人的知识和能力的量尺的实质,就是要建立一个数学模型,将抽象的数学能力映射到数轴上。我们承认学生的数学能力的高低是有序的,是可以用一个实数来显示的。由于这把量尺是由命题人员通过命题建立的,因此不能排除命题人员的主观成份,并且最终还得看这份试题的难度配备是否合理恰当,这当然离不开对每一试题的难度判断的正确与否。可见,试题难度的概念如何定义是考试学中一个十分关键的问题。

试题的难度这一概念,从作为测量人的知识和能力水平的标尺来看,就与大纲中对知识能力的要求相关联。一道题的难度大致可分为如下的几个水平:水平 A 表示只要求了解知识的含义,根据已知的固定的思维模式进行操作即可获解的问题;水平 B 表示要求对知识理解,能作简单应用,通过简单运算或推理即可获解的问题,所涉及的知识不超过三个;水平 C 表示要求掌握知识,通过抽象的思维模式(如连贯,分段的逻辑推理)进行运算和推理才能获解的问题;水平 D 表示要求深刻、灵活掌握知识,创造性地运用抽象的思维方法才能获解的问题。根据问题所涉及到的知识点的多少,抽象思维模式的抽象程度的高低,问题的复杂程度,每一水平又可分 2~3 级。由于知识、特别是能力水平是一个模糊概念,这样用定性定量相结合的方式定义,虽不及用得分率定义来得简单,但是否更合理些,还望考试学的专家们审议。看来要给难度下一科学定义,还有待于继续探索。

在建立量尺(出好试卷)之后,还要考察这把量尺的准确

程度、可靠性和有效性。于是有区分度、信度、效度的概念。

先说试题的区分度。区分度是反映试题对一组学生实际知识和能力水平的区分功能的指标。一般以试题的得分与整份试卷总分之间的相关程度，作为该试题的区分度，区分度与难度有密切关系：难度太小与太大的试题，区分度都低。一般说，学生的得分呈离散的正态分布，这样的测试结果便于比较每一个学生在全体学生中的相对位置。为了提高试卷的区分功能，人们的直觉认为，试卷中试题的难度配备必需合理恰当。至于如何才算合理恰当，是有待于深入研究的。

信度是反映考试结果稳定性和可靠性的指标。如果考试的得分和每个学生的实际知识与能力水平完全一致，则信度达到最大值1。但这是理想境界，一般是达不到的。计算试卷信度的方法是将试卷的试题按由易到难排好，按题序的奇、偶分成两半，再计算学生在两半试题中所得分数的相关系数。计算的公式如下：

$$r_{xx} = \frac{2r_{nn}}{1 + r_{nn}}$$

其中， $r_{nn}$  表示两半分数的相关系数，也称分半信度  $r_{nn}$  表示整份试卷的信度系数。

这样计算所得的信度  $r_{xx}$  是相对的，只是一个供参考的指标而已。信度的计算依赖于对一份试卷中试题难度的计算。如果两半试题的难度不对等，势必造成较大的误差。这再一次说明试题的难度是考试学中一个关键性概念。

效度是指一次考试在多大程度上测量了预定测量的目标。就高考数学来说，它的效度就是对学生的数学知识和能力水平进行测量的准确程度。如果一次考试的结果正确地反

映和预测了所有考生的实际数学知识和能力的水平，这次考试的效度就高，反之则低。效度计算的方法是取学生的实际数学知识和能力水平的数据作效标，一般以学生历年学习成绩和有经验老师的评定或入大学后的学习成绩作效标。计算公式是

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y},$$

其中， $x_i$  为效标分数， $y_i$  为考试得分， $\bar{x}$  是  $x_i$  的均分， $\bar{y}$  为  $y_i$  的均分， $s_x$ 、 $s_y$  分别是  $x_i$ 、 $y_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) 的标准差， $n$  是学生数。

显然，效标是否可靠是效度计算正确与否的关键。提高效度还得从编制好试卷下手。编制试卷仍离不开试题难度的理解及对整份试卷难度的合理配备。由此可见，对难度的定义是否科学仍然是重要的一环。

综观近几年高考数学试题，广泛听取任课教师的意见，在高考数学命题工作上值得注意的问题有以下六点。

1. 数学高考是选拔性考试，应尽量提高区分度。如何提高区分度呢？应抓好基本题与综合题的恰当比例以及基本题和综合题的梯度。基本题与综合题的比例一般以控制在 7:3 左右为宜。基本题的起始三题的难度以 0.8~1.0 为宜，这可以稳定考生的情绪，有利于学生考出水平。以后诸题难度一般控制在 0.6~0.7，最后几小题可上升到 0.5~0.6。简答题的难度应不低于 0.5，解题思路应是教材中重点阐述过的，运算量不宜过大。综合题一般有四大题。难度的梯度按下列方式控制：第一、二题难度为 0.4~0.5；第三题难度为 0.3~0.4；最后一题最好分为有一定联系的两小题。其中第一

小题难度为 0.2~0.3, 第二小题难度为 0.1~0.2, 但不宜向数学竞赛题方向发展, 以免难度失控. 这样的配备, 一般有助于提高试题的区分度、信度、效度.

2. 命题范围应以教学大纲为准, 不脱离教材要求.

3. 命题要符合科学性, 试题必需正确无误, 答案是无可争辩的.

4. 试题用语必须规范, 通俗易懂, 不引起歧义.

5. 综合题一律是新编的, 使所有考生都处于同一起跑线上, 公平竞争.

6. 应给应试者充分的思考时间, 否则很难使考生考出其实际水平. 这是排除考试中的偶然误差, 提高考试信度与效度的措施之一.

由于考试学尚非一门成熟的科学, 另一方面我国幅员广大、人口众多、国情复杂, 尚未建立完善的题库, 预测的进行还有许多困难. 因此, 搞好高考数学命题工作的难度是很大的.

6年来, 全国、上海、广东三地的命题小组付出了大量劳动, 作了有益的探索. 他们的工作成果是今后命题工作宝贵的财富, 我们衷心祝愿我国的高考数学命题工作有新的突破, 更上一层楼.

## 二、从数学教改趋势看高考数学命题

高考数学命题要有利于中学数学教学改革. 如何在命题中贯彻这一指导思想, 是广大中学数学教育工作者所关心的问题.

为了讨论的需要, 让我们对国内、国际数学教改的过去、现在和将来作一番考察.

由于生产技术和数学科学本身的演变, 在世界范

国内掀起了一场规模巨大的数学教学改革运动。20世纪初英国的彼利(J.Perry,1850~1920)、德国的克莱茵(F.Klein,1849~1925)、美国的莫尔(E.H.Moore,1862~1931)先后提出数学教育改革的主张。他们一致主张教材、教法近代化、心理化,实现数学各科的有机统一,理论与实践的统一。特别是以“函数观念”和“直观几何”作为数学教材骨架的真知灼见至今犹有参考价值。

1957年10月4日苏联人造卫星上天,震惊了美国朝野,给美国人带来了科技落后的危机感。落后的根源何在?根本原因在于美国基础教育中数理教育水平低于苏联。据调查,美国学生的数学成绩在收集到的12个国家中名列第11位。于是在美国全国数学协会和数学教师协会的支持下,由美国政府资助130万美元,组成了有数学家、教师、教育家、心理学家、政府和实业界代表参加的“学校教学研究小组”(School Mathematics Search Group,缩写为SMSG),编写出《统一的现代数学》(SSMCIS课本)。在世界范围内掀起一场风起云涌的“新数”运动。英国也很快编写了SMP教材(School Mathematics Project)。法国有奎桑纳(Queysanne)和莱孚(Revuz)合编的教材,比利时有帕比(Papy)编的课本。这些都是“新数”的代表作。“新数”运动的影响是巨大的,声势是空前的。

“新数”教材的内容、体系、处理方法都是新的。内容增加了集合论初步,数理逻辑初步,微积分初步,概率论和统计初步,算法语言和程序设计初步,群、环、体,向量空间,矩阵代数,贯串“结构”观点。体系上不分科,几何代数化,欧氏几何体系被变换几何观点、方法所代替,集合、函数观念、结构观念成为贯串全书的线索。处理方法强调趣味性,强调数学直觉

和做实验,不崇尚技巧,教法上重视发现法。

有增必有减,既然增加了新内容,必然要删除一些传统内容。首当其冲的是平面几何,其次是代数式的恒等变形。反三角函数、三角方程、二次不等式、无理数理论也都作了删减。

在“新数”运动中争论最激烈的是对欧氏几何的处理问题。争论双方的代表人物是两位法国数学家。托姆(Thom)发表了《现代数学:教育学的错误还是哲学的错误》一文,认为“几何思维可说是人类理性活动的正常发展中不能省略的阶段”。“事实上,逻辑体系的约束力来源于空间的包含关系”。托姆认为应恢复欧氏几何体系的教学。狄多涅(Dieudonne)发表了《我们应该讲授新数学吗?》一文作答。狄多涅是提出“欧几里得滚蛋”口号的人。他在文章中说:“数学的主要目的在于向儿童指出怎样把粗糙的、杂乱的时空意识逐步组织成一些逻辑结构。……我们不是取消欧氏几何,而是取消陈腐的教学方式,以此弄清几何的含义和提高它在数学的中心地位及其普遍效能。”

这一争论也波及到我国。1960年在上海召开的全国数学会代表大会(会议由华罗庚先生主持),在我国掀起了数学教学改革的高潮,丁尔陞先生代表北师大提出改革的设想。会后北京、上海分别编写了一套革新教材。因受当时“大跃进”思潮的影响,因此许多大学数学系的教学内容下放到中学。但是,由于种种原因,这一运动很快就夭折了。

“打倒欧家店”是当时的口号之一。平面几何教学中对繁琐的证题术,早就为广大教师所抛弃。但完全摒弃欧氏体系,几何全部代数化,又难以通过。对十四岁的孩子来说,培养逻辑推理能力,平面几何确是较理想的载体,至今尚未找到更合

适的代替物。平面几何教学必须改革,是大家一致的意见,但如何改,迄今无成功的经验。看来,平面几何教材应如何改革,仍是一个需要继续探索的课题。

“新数”运动由于忽视了人的认识规律,过早地引入抽象概念,过份强调演绎推理,形式化,公理化,忽视直觉思维与归纳思维训练,过多地削弱基础,导致多数学生成绩下降。原来期望的“这场革命会带来神奇的效果”并未出现。“新数”运动风行十余年,由于上述这些致命伤,经不住各方面的批评,SMSG终于在1973年宣布解散。1980年美国又提出“回到基础”的口号,有些人把“小孩与洗澡水”一起倒了,这些思潮也影响到国内部分教师。实际上,“新数”与其他事物一样,也是应该一分为二的。

首先,“新数”运动使人们一致认识到,数学教育必须改革,不改革就无法适应时代前进的需要,这在世界范围内已形成统一的认识。其次,“新数”运动对传统教材进行了冲击,以现代的数学观点、方法重新认识传统内容,改造传统教材予以启迪,使人们认识到以现代数学的新观点、新方法重新认识传统内容,改造传统的概念系统,不但是必要的,而且是可行的。经过改造后的教材,不但容易学、容易理解,而且便于掌握和运用。展望未来,这些新的观点、方法必将取代传统的处理方法。

七十年代后期,我国又提出教材改革的六字方针:“增加、精简、渗透”。这实际是对国际数学教学改革运动的反思,针对我国国情提出的改革方针。它对我国数学教材改革工作起到了指导作用。

八十年代初,美国又提出解决问题(problem solving)的口号,认为“必须把解决问题作为八十年代中学数学的核

心”。解决问题,本质上是一种创造性活动。解决问题,需要完整的知识,广泛的数学方法,熟练的技能。于是把培养能力提到议事日程上来,提出十项基本技能:(1)解决问题能力;(2)把数学应用于日常生活的能力;(3)对结果合理性的觉察力;(4)近似估算能力;(5)合理计算能力;(6)几何结构;(7)度量;(8)阅读、解释和制作图表、框图的能力;(9)用数学作预报;(10)计算机文化。

国内自八十年代起,数学能力培养成了热门的课题,研究者的队伍日益扩大,并取得一系列可喜的成果。但是应该看到,对能力的研究还处在初级阶段,还有许多理论问题和实际问题有待解决。在世界范围内,对数学思维能力的结构还无统一的认识,培养数学能力的规律,以及如何测量学生的数学思维能力都没有获得解决,还有待于人们去探索。

另外,数学教育学的理论框架,课程论,学习论,教学论,都在探索之中。由于社会已跨入信息社会,科技飞速发展,数学教育不能适应发展的需要,所以1986年2月国际数学教育委员会在科威特举行了小型讨论班,有十几位世界各国的数学教育家出席。出席会议的两位英国数学家豪森(G.Howson)、威尔逊(B.Wilson)合编了一本《九十年代的学校数学》,概述了与会代表的各种见解。它的主题是研究数学教育改革应走什么样的道路。

未来数学教育改革的动向有哪些是值得我们特别关切的呢?

### 1. 中学数学教材应该如何改革才能适应社会需要。

随着社会的分工越来越细,社会需要各种不同层次的人才,因此教材的多样化是发展的必然趋势。让所有的人都读同一水平的数学教材,是不现实的,也是浪费的。



## 2. 培养数学能力.

数学能力培养的问题,九十年代将在更深的层次上继续探索下去,知识结构、能力结构、心理结构的统一发展,将是数学教学追求的目标.理论联系实际的原则,将在新的高度上展开研究,解决问题仍然是中学数学的核心.

### 3. 计算机将广泛地进入数学教学.

4. 数学教育心理学的研究,将使教学方法的改革更深入、更健康的发展.

现在回到高考数学命题如何为中学数学教学改革服务的问题上.我们感到以下几点是值得注意的.

1. 继续贯彻“重基础,出活题,考能力”的方针.引导教师跳出题海,探索培养能力的规律,狠抓数学语言的理解与表达能力,逐步渗透数学思维方法的教育,重视非智力因素教育和思想教育.

2. 命题中适当强化集合语言、函数观念、数形转化等内容,顺应教材改革的潮流.

3. 从长远看,数学命题是否应根据专业对数学要求的不同,再增加一、二种试题,以满足发展的需要.

4. 从发展看,今后试题是否可以适当增加半开放性与全开放性的问题,以考查学生的创造性思维.

以上意见是否正确,还有待于审议与实践的检验,提出来供命题工作者参考.

$$r_{nn} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right)}}$$

其中, $r_{nn}$ 为分半信度, $n$ 为考生数, $x_i$ 为第*i*个考生在前一半题上的得分, $\bar{x}$ 为所有考生在前一半题上得分的平均分; $y_i$ 为第*i*个考生在后一半题上的得分, $\bar{y}$ 为所有考生在后一半题上得分的平均分.