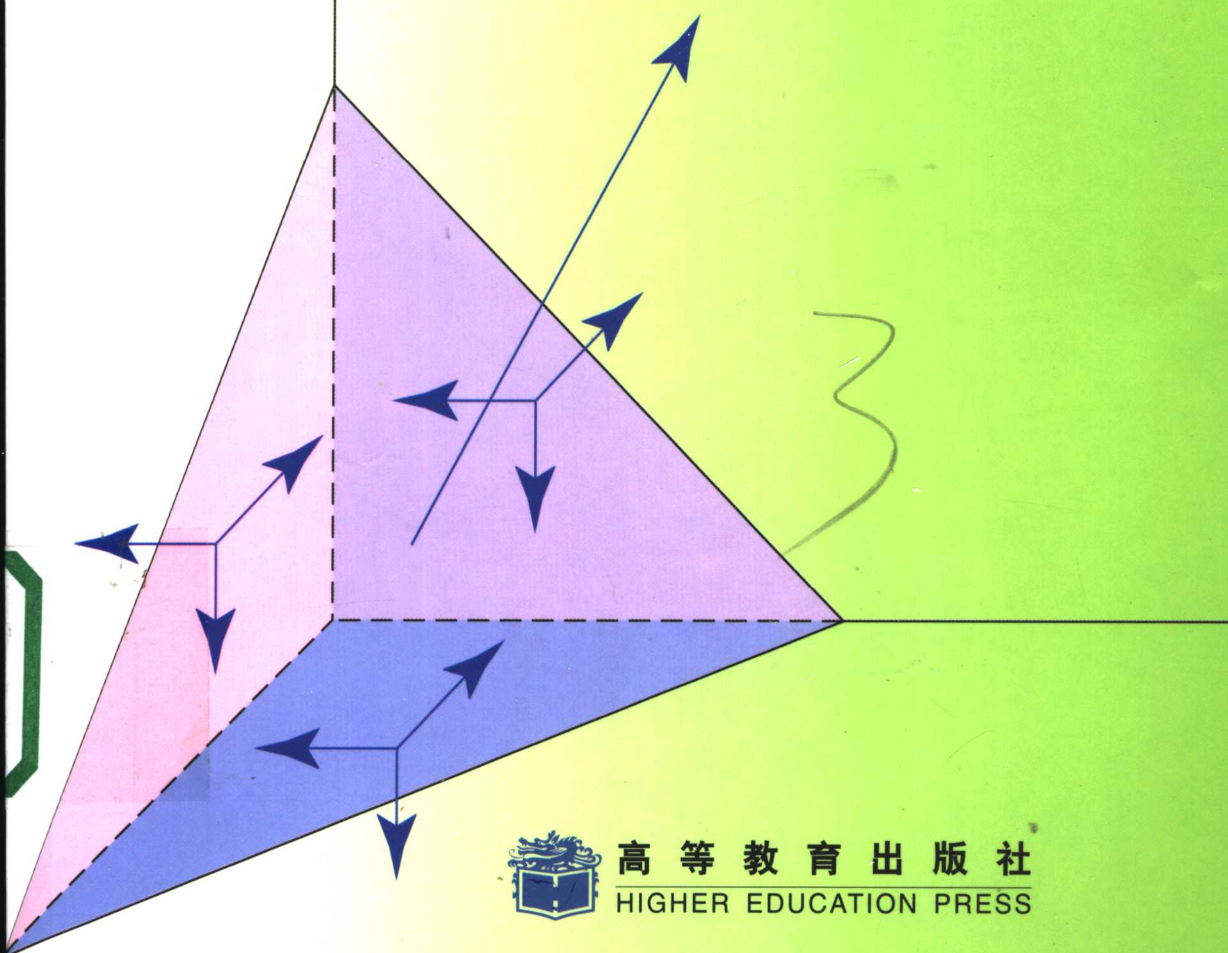
普通高等教育“十五”国家级规划教材

解析几何

周建伟



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，全书共六章。前四章介绍矢量运算、空间直线与平面、常见曲面及二次曲线的一般理论。在这中间介绍了球面几何、圆锥曲线等内容。第五章介绍平面上的正交变换与仿射变换及它们的应用，第六章介绍平面双曲几何。书后附录1，2简要介绍了教材中用到的一些代数知识及交比等；附录3介绍了解析几何产生的历史。

本书纲目清楚，论证严谨，易教易学，可作为综合性大学和高等师范院校数学类专业的解析几何课程教材，也可供自学者选用。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/周建伟. —北京：高等教育出版社，2005.5

ISBN 7-04-016475-2

Ⅰ. 解… Ⅱ. 周… Ⅲ. 解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019885号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005年5月第1版
印　　张	16.5	印　　次	2005年5月第1次印刷
字　　数	290 000	定　　价	19.30元

物料号　16475-00

前　言

“解析几何”是高等学校数学专业的主要基础课程之一。解析几何的基本方法是用数组即坐标表示平面或空间的点，用方程表示曲线及曲面，利用代数的方法研究图形的几何性质。

全书共六章。前四章介绍矢量运算、空间直线与平面、常见曲面及二次曲线的一般理论等内容。在这中间介绍了球面几何、圆锥曲线。前四章的许多内容在写法及材料的处理上深受吕林根、许子道等教授的《解析几何》的影响(该书1991年被国家教委评为国优教材)。作者曾多次以它为教材讲授解析几何。在本书编写时我们努力保持这一教材纲目清楚、论证严格、易教易学等特点。尽管解析几何是一门成熟的课程，要写出新意不容易，我们在取材、内容安排、定理的证明、习题、例题选配等方面作了一些尝试，写进了一些新东西。

第五章介绍平面上的正交变换与仿射变换，第六章介绍平面双曲几何。其中介绍平面双曲几何的内容是由编者的《高等几何》(高等教育出版社，2003)中相应内容改写而成，在讨论双曲平面上弧长与面积时用到一些简单的微积分。我们把这些内容写入教材，是由于这些材料都是有趣和有用的，它们都可以用(或主要用)解析几何的方法叙述处理，希望通过学习这些材料开阔学生的视野，为进一步的学习研究打一些基础。这些材料可以用来开设一门选修课。另一方面，这几年中学的数学教学在进行力度颇大的改革，编写的这一部分内容希望能配合中学的教改。

书后面有三个附录，附录1简要介绍了这一课程用到的行列式、矩阵与线性方程组的知识。附录2介绍了欧氏平面上共线四点的交比，给出第六章讨论双曲平面上距离角度用到的一些概念与性质。附录3的大部分内容取自网络，介绍解析几何产生的历史，使读者对解析几何有较多的了解。

本书可作为综合性大学和高等师范院校数学类专业的解析几何课程教材，也可用于自学。使用的学校可以根据具体情况安排教学内容。

这是普通高等教育“十五”国家级规划教材，苏州大学与数学科学学院对本书的编写与试用给予了大力的支持。编写中参考了国内外的许多同类教材，借鉴了他们的一些好的写法，向这些作者表示感谢。同时，也要感谢我的同事和学生，他们为本书的写作与试用做了许多工作。感谢殷剑兴教授、刘根洪教授和孙

存金教授,他们审阅了书稿,提出了许多好的意见。

作者感谢高等教育出版社为这本书的出版所做的许多工作。

书中不当或错误之处,恳请同行及读者指正。

周 建 伟

2004年11月于苏州

目　　录

第一章　矢量与坐标

解析几何的基本方法是用数组即坐标表示平面或空间的点,用方程表示曲线、曲面,利用代数的方法研究图形的几何性质.本章讨论空间的矢量及各种矢量运算,并通过矢量建立坐标系.利用矢量可以使一些几何问题得到简捷的解决.矢量在其他一些学科,例如在物理学中的力学、电磁场论等也有广泛的应用.空间所有的矢量构成一个向量空间,它是线性代数中抽象的线性空间的重要模型.本章定义的各种矢量运算都有各自的几何含义,只有结合矢量的几何意义去理解学习这些运算,才能掌握并灵活运用它们.

§1.1　矢量及其线性运算

在日常生活以及科学研究中,我们常用实数表示各种量,如温度、面积、体积、质量、密度、功等.这些量在它们各自规定的度量单位下都可以用一个数表示,这种只有大小的量叫做数量.另外,还有一些比较复杂的量,如位移、力、速度、加速度、电磁场强度等,它们不但有大小,而且还与方向有关,我们把这样的量叫做矢量.

1.1.1　矢量的定义

如图 1-1-1,设 A,B 是空间不同的两点,赋予线段 AB 以方向:从 A 指向 B 得到一个有向线段,记为 $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}$ 是空间的一个矢量,它的大小,也叫矢量的模,定义为线段 AB 的长度,记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点是 A,终点是 B,它的方向和大小都由 A,B 决定.矢量也称为向量.

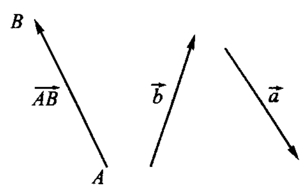


图 1-1-1

这样定义的空间矢量很多，它们之间有各种关系. 如图 1－1－2，$ABDC$ 构成一个平行四边形，即矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 的起点、终点构成一个平行四边形. 矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 的大小与方向都相同，我们称矢量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 相等，记为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. 一般地，我们称大小与方向都相同的矢量相等，自然，相等的矢量应看成同一矢量. 也就是说，我们讨论的矢量在空间可以自由移动，但要在移动时保持矢量的大小与方向不变. 这样的矢量是自由矢量. 在图 1－1－2 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，自然也有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

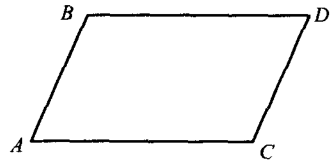


图 1－1－2

本课程讨论的都是这种由空间有向线段定义的矢量，它们在空间可以自由地平行移动.

要注意的是，作用力、位移等不是自由矢量，它们分别与力的作用点与位移的起点有关. 自然，上面的矢量相等的概念不能用到这样的矢量上. 另一方面，图 1－1－2 中的矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 相等，线段 AB，CD 平行，且它们的长度相等；但作为几何图形的线段 AB，CD 是不同的：它们在空间的位置不同.

我们也经常用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{x}$，… 表示矢量，矢量 $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

我们把模相等，而方向相反的两个矢量称为相反矢量，或反矢量. 例如 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反矢量. 图 1－1－2 中矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$；$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$ 分别互为相反矢量. 如果矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互为相反矢量，记为 $\vec{a}=-\vec{b}$.

取定一线段作为单位长度，则矢量的模可以用非负实数表示. 模等于 1 的矢量叫做单位矢量，与非零矢量 $\vec{a}$ 同方向的单位矢量记为 $\vec{a}^{\circ}$. 如果矢量的终点与起点重合，或矢量的模为 0，此类矢量称为零矢量，记为 $\vec{0}$. 例如 $\overrightarrow{AA}$，$\overrightarrow{BB}$ 都是零矢量，所有零矢量都相等.

大小与方向是矢量的两要素，要证明两个矢量相等，要分别证明它们的模相等，方向相同. 两个非零矢量的方向相同，是指表示这两个矢量的有向线段平行且指向相同.

如果一组矢量平行于同一条直线，我们称这组矢量平行或共线. 如果矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，也记为 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$.

零矢量实际上无方向可言，为了处理问题的方便，我们规定零矢量平行于任何矢量，即零矢量与任何矢量共线.

如果一组矢量平行于同一个平面，称这组矢量共面.

1.1.2 矢量的加法与数乘

物理学中两个作用于同一点的力的合力可以用平行四边形法则求出. 如图

1－1－3,两个力 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的合力是以平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC 表示的矢量 $\overrightarrow{OC}$,这里 $|\overrightarrow{OA}|$,$|\overrightarrow{OB}|$ 等表示力的大小.另一方面,如果把图 1－1－3 中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 看成位移,那么这两次连续位移的结果是位移 $\overrightarrow{OC}$.图 1－1－4 中由 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{AC}$ 得到矢量 $\overrightarrow{OC}$ 的法则叫矢量合成的三角形法则.如果把图 1－1－3 中 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AC}$ 都看作自由矢量,则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,也不考虑矢量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AC}$ 等的物理意义,则上面定义的矢量合成(加法)的平行四边形法则与三角形法则是一样的.

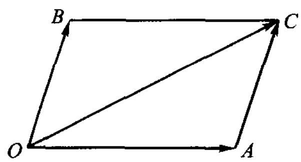


图 1－1－3

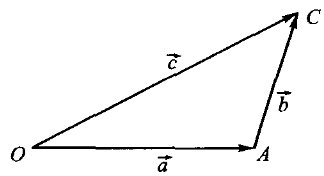


图 1－1－4

定义 1.1.1 设 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 是两个矢量,以空间一点 O 为起点作矢量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$,则矢量 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,记为 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和 $\vec{a}+\vec{b}$ 与点 O 的选取无关,这样的运算叫做矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的加法.从上面的讨论知道,矢量 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 的和也可以用平行四边形法则作出.

性质 1.1.1 矢量的加法满足

(1) 交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2) 结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(3) 对任意矢量 $\vec{a}$ 有 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.$\vec{a}$,$\vec{b}$ 都是非零矢量时,等式成立的充要条件是 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 平行且同向.

这些性质的证明很容易.

减法是加法的逆运算,矢量的减法定义为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

其中 $-\vec{b}$ 是 $\vec{b}$ 的相反矢量.

如图 1－1－5,矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的加法与减法可以在一个平行四边形内完成.矢量 $\vec{a}-\vec{b}$ 的起点是 $\vec{b}$ 的终点,终点是 $\vec{a}$ 的终点,$\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$.

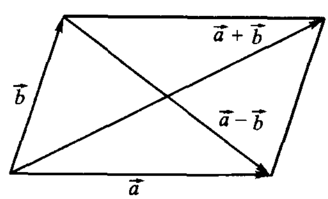


图 1－1－5

由于矢量的加法满足结合律与交换律，多个矢量$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,…,$\vec{d}$的加法与它们相加的次序以及加括号的方法无关，可以记为

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\cdots+\vec{d}.$$

例 1 设$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$是互不共线的三个矢量，试证明将它们的起点与终点顺次相连构成一个三角形的充要条件是$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

证 必要性. 如图 1-1-6，设$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$可以构成一个三角形 ABC，即有$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$. 显然$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

充分性. 设不共线的三个矢量$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. 作点 A,B,C,A'，使$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,$\overrightarrow{CA'}=\vec{c}$，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$，于是 A,A'重合. 由于$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$不共线，三点 A,B,C 也不共线，它们构成一个三角形.

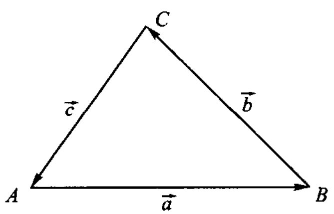


图 1-1-6

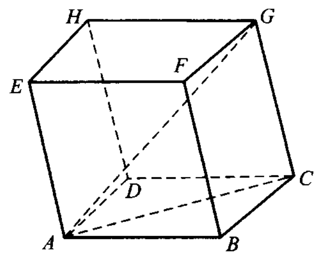


图 1-1-7

例 2 如图 1-1-7，$ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体，矢量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{HG}$是四个相等的矢量. 由于$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$，此平行六面体的对角线 AG 对应的矢量

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}.$$

而$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$.

下面再定义矢量与数量的乘法，叫做数乘.

定义 1.1.2 实数 λ 与矢量$\vec{a}$的乘积是一个矢量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的模是$|\lambda|\cdot|\vec{a}|$，$\lambda\vec{a}$的方向在 $\lambda>0$ 时与$\vec{a}$相同，在 $\lambda<0$ 时与$\vec{a}$的方向相反.

从定义可知，$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$，如果 $\lambda=0$ 或$\vec{a}=\vec{0}$，则 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$. 当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$. 非零矢量$\vec{a}$的单位矢量可以用数乘表示为

$$\vec{a}^{\circ}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

性质 1.1.2 数量与矢量的乘法满足下面的规律：

(1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

(2) 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;

(3) 分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$,

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

这里$\vec{a}$,$\vec{b}$是任意矢量,λ,μ 是任意实数.

按照定义很容易验证这些性质.例如,利用相似三角形的性质可证明

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$

见图 1-1-8.

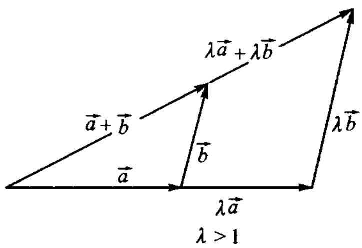


图 1-1-8

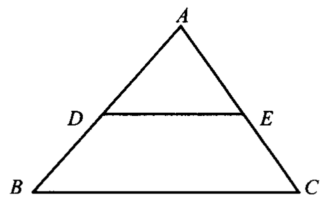


图 1-1-9

例 3 设点 D,E 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB,AC 上的点,如图 1-1-9, $AD:AB=AE:AC=\lambda$,$0<\lambda<1$,证明 DE 平行于BC 且$DE:BC=\lambda$.

证 由题意及数乘的定义,$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}$,$0<\lambda<1$.因此

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\lambda\overrightarrow{BC}.$$

从$\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{BC}$,可知 DE 平行于BC 且$DE:BC=\lambda$.

例 4 用矢量法证明:如果四边形 $ABCD$ 的对边AD,BC 所成矢量相等,即$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,则它是平行四边形且对角线互相平分.

证 从$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$可得

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA},$$

因此,CD,BA 也平行,$ABCD$ 是平行四边形.

设四边形 $ABCD$ 的对角线AC,BD 交于点 O,由$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$得

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC},\quad 即\quad \overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OD}.$$

后一式的左边与$\overrightarrow{AC}$平行,右边与$\overrightarrow{BD}$平行,而 $ABCD$ 是四边形,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BD}$不平行,只有

$$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0},$$

从而

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}.$$

这就证明了 $ABCD$ 的对角线互相平分.

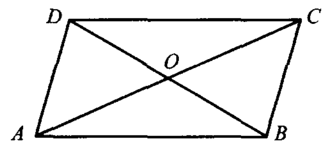


图 1-1-10

因此,图 1-1-10 中三角形 ABC 的边 AC 上中线所成矢量 $\overrightarrow{BO}$ 可以表示为

$$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}).$$

矢量的加法与数乘统称为矢量的线性运算.矢量的加法与数乘的结果仍是一个矢量,空间所有的矢量构成一个向量空间,它是高等代数中抽象的向量空间(也叫线性空间)的重要模型.在下一节中矢量的线性组合、线性相关、线性无关等就是高等代数中处理向量空间所用的一些术语.

习题 1.1

1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形?

(1) 把空间中一切单位矢量归结到共同的始点;

(2) 把空间中平行某一平面的一切单位矢量归结到共同的始点;

(3) 把空间中平行某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点;

(4) 把空间中平行某一直线的一切矢量归结到共同的始点.

2. 解下列各题:

(1) 已知 $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3,\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$,求 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}-2\vec{b}$;

(2) 从矢量方程组 $\begin{cases}3\vec{x}+4\vec{y}=\vec{a},\\2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b},\end{cases}$ 解出矢量 $\vec{x},\vec{y}$.

3. 在四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b},\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$,矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 不平行,证明四点 A,B,C,D 可构成梯形,并画出它的草图.

4. 已知平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 的中点分别是 K 和 L,设 $\overrightarrow{AK}=\vec{c},\overrightarrow{AL}=\vec{d}$,求 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

5. 设 A,B,C,D 是一个四面体的顶点,M,N 分别是四面体 $ABCD$ 的边 AB,CD 的中点,证明

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

6. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,证明对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

7. 用矢量法证明:梯形的中位线平行于底边且其长度是上底与下底之和的

一半.

8. 证明:P 是三角形 ABC 的重心的充要条件是

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}.$$

§1.2 矢量的线性关系与矢量的分解

设$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$是一组矢量,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是一组实数,称矢量

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n$$

是矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$的线性组合,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是线性组合的系数.

例如,两矢量$\vec{a},\vec{b}$的和$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$是矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的线性组合,线性组合的系数是 1.

由前节定义,如果一组矢量平行于同一直线,我们称这组矢量是共线的.而零矢量平行于任何矢量,与任何矢量共线.

性质 1.2.1 矢量$\vec{b}$与非零矢量$\vec{a}$共线的充要条件是存在唯一的实数 λ,使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证 如果$\vec{b}=\lambda\vec{a}$,则$\vec{b}$与$\vec{a}$共线,性质中条件是充分的.

反之,如果$\vec{b}$与$\vec{a}$共线.假如$\vec{b}=\vec{0}$,则$\vec{b}=0\vec{a}$.设$\vec{b}\neq\vec{0}$,如果$\vec{b}$与$\vec{a}$同向,则$\vec{b}^\circ=\vec{a}^\circ$,这时

$$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{b}^\circ=|\vec{b}|\vec{a}^\circ=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a},$$

取 $\lambda=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.如果$\vec{b}$与$\vec{a}$反向,则$\vec{b}=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$,取 $\lambda=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

λ 的唯一性.若有$\vec{b}=\lambda\vec{a}=\mu\vec{a}$,则$(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$,由于$\vec{a}\neq\vec{0}$,必有 $\lambda=\mu$.

性质 1.2.2 矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ,使$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$.

证 设$\vec{a},\vec{b}$共线,显然可设$\vec{a}\neq\vec{0}$,从性质 1.2.1 可得$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.因此 $\lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$, $-1\neq0$.

另一方面,如果 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$,由条件 λ,μ 不全为零,可设 $\lambda\neq0$,则$\vec{a}=\left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b}$.如果$\vec{b}=\vec{0}$,则$\vec{a}=\vec{0}$.如果$\vec{b}\neq\vec{0}$,也有$\vec{a}$与$\vec{b}$平行.

推论 1.2.3 如果由 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$ 可以推出 $\lambda=\mu=0$，则矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线.

平行于同一平面的一组矢量称为共面矢量.两个矢量总是共面的，因此只有讨论三个或三个以上的矢量共面与否才有意义.下面考虑共面矢量的关系.

性质 1.2.4 如果矢量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，则矢量 $\vec{c}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的一组实数 λ,μ 使 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，即 $\vec{c}$ 可以表示成 $\vec{a},\vec{b}$ 的线性组合.

证 必要性.设三矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.如果 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 共线，由性质1.2.1，有 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+0\vec{b}$；同理，在 $\vec{c}$ 与 $\vec{b}$ 共线时可得 $\vec{c}=0\vec{a}+\mu\vec{b}$.

设三矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线，由于矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面可作 $\overrightarrow{OA}\parallel\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}\parallel\vec{b}$，使 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.由性质1.2.1，有实数 λ,μ，使 $\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$.于是有 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$.图 1-2-1 是 $\lambda,\mu>1$ 的情况.

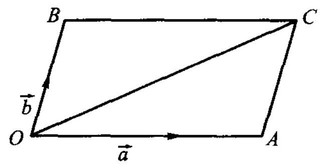


图 1-2-1

充分性.如果 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，则三矢量 $\lambda\vec{a},\mu\vec{b},\vec{c}$ 共面，因此，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

假如 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda'\vec{a}+\mu'\vec{b}$，则

$$(\lambda-\lambda')\vec{a}+(\mu-\mu')\vec{b}=\vec{0},$$

由于 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，故 $\lambda=\lambda'$，$\mu=\mu'$.这就证明了实数 λ,μ 的唯一性.

推论 1.2.5 矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ,ν，使

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}.$$

证 必要性.如果 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，由性质1.2.2，存在不全为零的实数 λ,μ，使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$.这时 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$ 中 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的系数 $\lambda,\mu,0$ 不全为零.如果 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，从性质 1.2.4 可得

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+(-1)\cdot\vec{c}=\vec{0}.$$

由于 $-1\neq0$，这证明了必要性.

充分性.如果存在不全为零的实数 λ,μ,ν，使 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$，不妨设 $\lambda\neq0$，则

$$\vec{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}-\frac{\nu}{\lambda}\vec{c},$$

因此 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

性质 1.2.6 如果矢量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对任意矢量 $\vec{d}$ 有唯一的一组实数 λ,μ,ν 使

$$\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}.$$

证 假如矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$中有三个矢量共面，如$\vec{a},\vec{b},\vec{d}$共面，由性质 1.2.4 及$\vec{a},\vec{b}$不共线可得，$\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+0\vec{c}$. 以下假设矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$中任意三个矢量不共面.

如图 1－2－2，把矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$归结到共同的起点 O，$\overrightarrow{OP}=\vec{d}$. 过 P 分别作平面得平行六面体 $OAEB-CGPF$，使$\vec{a}\,/\!/\,\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}\,/\!/\,\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}\,/\!/\,\overrightarrow{OC}$. 于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

由于$\overrightarrow{OA}\,/\!/\,\vec{a}$，有 λ 使$\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}$. 同理有$\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\nu\vec{c}$. 因此有实数 λ,μ,ν 使

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}.$$

λ,μ,ν 唯一性的证明类似性质 1.2.1，1.2.4 的证明.

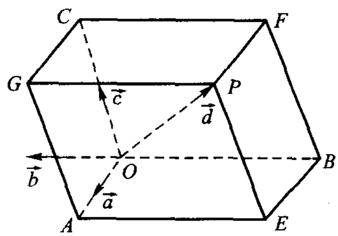


图 1－2－2

推论 1.2.7 对于空间任意四个矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$，总存在不全为 0 的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$使

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+\lambda_4\vec{d}=\vec{0}.$$

证 如果矢量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，由推论 1.2.5 可知存在不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+0\cdot\vec{d}=\vec{0},$$

取 $\lambda_4=0$ 即可.

如果$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，由性质 1.2.6 可得

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}+(-1)\cdot\vec{d}=\vec{0},\ -1\neq 0.$$

采用高等代数中向量空间的语言：对矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，如果有不全为 0 的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$使

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0},$$

称矢量$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性相关.

推论 1.2.7 可以表达成：空间四个及四个以上的矢量总是线性相关的. 矢量的共线、共面可以用线性相关的语言统一表示. 如性质 1.2.2 可以表示为：两个矢量共线的充要条件是它们线性相关.

如果只有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 才能使