名师解惑丛书

三角函数与恒等变换

李德备　陈瑾　编著

山东教育出版社
1999年·济南

名师解惑丛书

三角函数与恒等变换

李德备　陈　瑾　编著

出版发行：山东教育出版社
地　　址：济南市纬一路 321 号

出版日期：1998 年 9 月第 1 版
　　　　　1999 年 5 月第 2 次印刷
印　　数：5001—7000
用纸规格：787 毫米×1092 毫米 32 开
　　　　　7 印张　　　　147 千字

制版印刷：山东新华印刷厂临沂厂

书　　号：ISBN 7—5328—2701—1/G・2479
定　　价：5.10 元

出版说明

古之学者必有师．师者，所以传道受业解惑也．有感于此，组织部分长年在一线执教、经验丰富的著名教师，以专题讲座形式编辑出版一套限于中学理科知识框架内，源于教材但有些内容又略高于教材的，高级中学数学、物理学、化学“名师解惑丛书”是我们多年的想法和愿望．

两年多来，山东教育出版社理科编辑室经过广泛的调研，以及与部分学生和老师们的座谈，我们的初衷不断得到升华，并与作者就丛书的特色取得如下共识：

每册书即为一个专题讲座，其内容由若干教学过程中反映出的疑难知识点组成，通过对典型例题的分析，剖析疑难知识点，帮助学生理清思路，进而达到融会贯通的目的．

每册书通过对知识的综合，帮助学生将过去所学的知识按专题进行系统的归纳和总结；通过适当介绍一些学科知识自身发展的逻辑规律，给学生有关学科思想方法方面的启迪．

总之，这套丛书企盼达到启迪思维、拓宽知识、培养兴趣的目的，以提高学生分析问题和解决问题的能力．

前　言

“三角学”一词的希腊文原意是三角形和测量，也就是解三角形．和其他科学一样，三角学是在解决实际问题的过程中发展起来的．通常认为三角学始于天文学．天文学的产生，是由于编制历法的需要，后者是人类农业和畜牧业发展所不可缺少的．从 11 世纪到 18 世纪，三角学逐渐脱离天文学而成为一门独立的学科．大数学家欧拉首先提出三角函数的概念，使三角学从静止地研究解三角形的问题发展到用函数去反映运动和变化的过程，从而大大丰富了三角学的内容．18 世纪后，三角学被看做是包含三角函数和解三角形两部分内容的一个数学分学科．

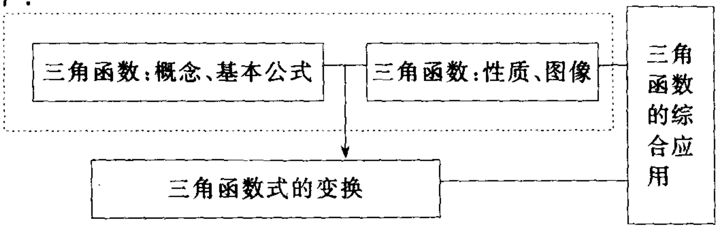
当然，以现代数学的观点看，三角学所研究的课题都可以归并到更高层的数学领域中去，且研究方法层次更高．这些要等同学们今后在高校的学习中去领悟．

但是，在中学数学里，三角学仍占有相当重要的地位．三角学包括平面三角和球面三角两部分．中学阶段只学习平面三角，包括三角函数（定义、性质、图象），三角函数式的变换，解三角形，反三角函数和简单三角方程．

学习和复习三角学，要把握全局，理清知识和技能的脉络，突出重点，熟练技能，归纳总结解题方法．在数学思想和解题策略方面要重点掌握、领会形数结合、等价变形、化归联想、逻辑划分、整体思想等，逐步提高以三角为工具解决实际

问题的能力．

本书主要讲评高中代数第二章（三角函数）和第三章（两角和与差的三角函数、解斜三角形）的内容．本书结构框图如下：



按照丛书总的编写意图，本书编者力求用不大的篇幅讲解三角函数中的主要概念（重在解惑），讲述三角变换的各类题型（强调通法，淡化技巧）．三角变换中不乏妙题巧解，对此过分偏爱是一种误导，但视而不见、讳莫如深，又将是一种无力的表现．编者的态度是：从偶然之中揭示必然，从特殊之中抽取规律．破除同学们对三角变换的恐惧感与神秘感，树立科学的态度．本书最后一个专题介绍三角函数作为工具在各方面的综合应用．

在编写过程中，编者首先立足于自己数十年的教学经验，同时也参阅了大量资料，博取众长，采纳最新的教学成果．在此，谨向诸位同行深表谢意．

感谢山东教育出版社的领导、编辑同志．

对书中的不妥之处，欢迎批评指教．

编者

目　录

一　三角函数的概念及基本公式

这一讲的内容是全书的基础，重点分析三角函数的概念，同角三角函数的关系，诱导公式．

三角函数的概念是用几何方法定义的，它的基础建立在相似形和圆的理论上，因此，要先从它的自变量——角及其度量谈起．

（一）任意角的概念

在平面几何中，角是由一点引出的两条射线所组成的图形，其值由 0°到 360°．如此定义是一种静止的观点，显然有其局限性．

为研究问题的需要，必须把角的概念推广．推广的方法是把角看成旋转的量，其大小是任意的．一个角可以看成是一条射线由原来的位置（始边）按指定方向绕其端点旋转到另一位置（终边）所形成的．我们把逆时针方向作为旋转的正方向．这样一来，我们就有了完整的任意角的概念，它包括正角、负角和零角．

此外，我们把具有共同始边和终边的角叫做终边相同的角．一般地，和角 α 终边相同的角连同 α 本身在内，可以用式子

$$k\cdot 360°+\alpha, k\in Z$$

来表示．其中 k 为整数，α 是任意角．

终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同．终边相同的角有无数多个，它们之间相差 360°的整数倍．与 α 角终边相同的角的集合可记作：

$$\{\beta \mid \beta=k\cdot 360^\circ+\alpha, k\in Z\}.$$

例 1 在 0°～360°间，找出与 640°，−950°12′终边相同的角．

解：$\because 640^\circ=360^\circ+280^\circ$，

$-950^\circ12'=-3\cdot 360^\circ+129^\circ48'$，

$\therefore$ 与 640°，−950°12′终边相同的角分别为 280°，129°48′．

这里，当角是负角时，360°的系数 k 是负整数，$|k|$ 比正常除法的商大 1 个单位，才能使余数在 0°～360°之内．

当角的概念推广后，要注意区别“锐角”“0°到 90°的角”“小于 90°的角”“象限角”“区间角”“轴线角”（也称“象限界角”）等概念．如：

①锐角可表示为 $\{\alpha \mid 0^\circ<\alpha<90^\circ\}$．

②0°到 90°的角可表示为 $\{\alpha \mid 0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ\}$．

③小于 90°的角可表示为 $\{\alpha \mid \alpha<90^\circ\}$．

④第 Ⅰ 象限角：$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ, k\in Z\}$；

第 Ⅱ 象限角：$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+180^\circ, k\in Z\}$；

第 Ⅲ 象限角：$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ, k\in Z\}$；

第 Ⅳ 象限角：$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+360^\circ, k\in Z\}$．

⑤轴线角（或象限界角）一般可表示为：

$k\cdot 360^\circ$，$k\cdot 360^\circ+90^\circ$，$k\cdot 360^\circ+180^\circ$，$k\cdot 360^\circ+270^\circ$

$(k\in Z)$.

以上①～③都是区间角,④可视为无数个区间角.

例 2 选择题:下列命题中正确的是(　　).

(A)第一象限的角必是锐角

(B)终边相同的角必相等

(C)相等角的终边必相同

(D)第二象限的角必大于第一象限的角

解:根据任意角的概念,(A)(B)(D)均不对,故选(C).

例 3 当α为第一象限角时,$\frac{\alpha}{2}$在第几象限?在该象限的什么区域内?

解:$\because k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°\quad (k\in Z)$,

$\therefore k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot 180°+45°\quad (k\in Z)$.

如图 1—1,$\frac{\alpha}{2}$在Ⅰ、Ⅲ象限的阴影区域内,或者说在Ⅰ、Ⅲ象限的"前半区".

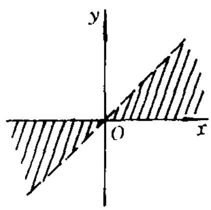


图 1—1

说明:由已知角的终边位置确定相关角的终边位置,常用不等式法.有时也采用数形结合的方法.此题的结果有记忆价值.在使用半角公式时,需要判断$\frac{\alpha}{2}$所在象限,应能直接运用此题的结论.类似地,还有如下结果:

α为第二象限角,$\frac{\alpha}{2}$在Ⅰ、Ⅲ象限"后半区";

α为第三象限角,$\frac{\alpha}{2}$在Ⅱ、Ⅳ象限"前半区";

α 为第四象限角，$\frac{\alpha}{2}$在Ⅱ、Ⅳ象限"后半区".

（二）弧度制

等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角．用"弧度"做单位来度量角的制度叫做弧度制．

在平面几何中，弧为圆的一部分，其长不超过圆周长，也没有规定方向．当角的概念推广以后，弧的概念自然也得推广．可把弧定义为一个动点由某一点起，沿圆周旋转的结果．当动点按逆时针方向旋转时，则把弧的值规定是正的，反之是负的．这样规定之后，弧的大小可以是任意的．

引入弧度制的一个直接效应就是把直线与圆弧（角）的度量统一起来，从而大大扩充了三角函数的应用范围．这一点，我们还将在后面详述．

关于弧度制与角度制的换算，应抓住 $360°=2\pi$ 弧度，即 $180°=\pi$ 弧度这个关键，从而，$1°=\frac{\pi}{180}$弧度，1 弧度$=\frac{180°}{\pi}$. 对于许多特殊角对应的弧度数（如下表）应记熟．

角度数	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度数	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

弧度制的引入，可简化某些公式．如弧长公式：$l=\frac{n\pi r}{180}$（r 为圆半径，n 为圆心角度数），其系数$\frac{\pi}{180}$是计算中的"包袱".由于 $n°=\frac{n\pi}{180}$弧度$=\alpha$ 弧度，于是 $l=\alpha r$. 考虑到 α 有正负之

分，因此弧长公式写为 $l=|\alpha|\cdot r$.

据此，扇形面积公式 $S=\frac{n\pi r^2}{360}$（n 为圆心角的角度数）可简化为 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$（$\alpha$ 为圆心角的弧度数）.

例 ①一条弦的长等于半径，这条弦所对的圆心角为 $\underline{\frac{\pi}{3}}$ 弧度.

②经过 5 小时 25 分钟，时针转动的角度数为 $\underline{-162.5°}$，分针转动的角度数为 $\underline{-1950°}$.

分析：每经过 1 小时，时针转动 $-30°$，分针转动 $-360°$，要注意旋转方向.

③已知半径为 15cm 的飞轮，每秒旋转 4.5 弧度，求轮周上一点在 3 秒钟内所转过的弧长.

解：$|\alpha|=\frac{l}{r}=4.5\times3=13.5$（弧度），

$\therefore l=13.5\times15=202.5$(cm).

答：轮周上一点，在 3 秒钟内所转弧长为 202.5cm.

④一扇形的周长为 20cm，当扇形圆心角 α 等于多少弧度时，这个扇形的面积最大？并求此扇形的最大面积.

解：设扇形的半径为 $r$cm，则其弧长为 $l=(20-2r)$cm. 于是，扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}(20-2r)r=-(r-5)^2+25.$$

当 $r=5$(cm)，$l=10$(cm)，$\alpha=\frac{10}{5}=2$（弧度）时，S 最大，$S_{max}=25(\text{cm})^2$.

(三)任意角的三角函数

在初中已用坐标法定义了三角函数的概念．最先是在直角三角形中，以锐角为自变量，函数为三角形中边与边的比值，而后以 0°～180°角为自变量，函数为一比值．而今，已有了任意角的概念(包括角度制和弧度制)，三角函数的概念自然可推广到任意角为自变量．

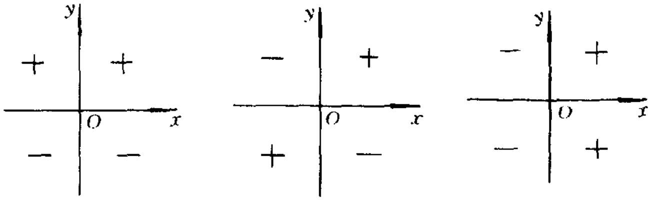
设 α 为任意一个角，在角 α 终边上取一点 P，它的坐标是 (x,y)，它和原点的距离是 $r(r>0)$．于是可得 6 个比：$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$(注意分母不为零)它们分别是角 α 的正弦，余弦，正切，余切，正割和余割．记为：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\cos\alpha=\frac{x}{r},\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\sec\alpha=\frac{r}{x},\csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

利用相似形的理论，可以证明，对于确定的角 α，这 6 个比值的大小和点 P 在角 α 终边上的位置没有关系．只是当角 α 的终边落在 x 轴上即 $\alpha=k\pi(k\in Z)$时，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{y}$无意义(这时 $y=0$)；当角 α 的终边落在 y 轴上即 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$时，$\frac{y}{x}$，$\frac{r}{x}$无意义(这时 $x=0$)．除此之外，上述 6 个比都有确定的值．又根据任意角的概念，对于相同的始边和终边，对应着无数多个角，这样我们便建立了一个从角的集合到比值集合的映射(是多对一的对应)，即以角为自变量，以比值为函数值的函数，这些函数都叫做三角函数．

在 x,y 和 r 中,r 表示从原点到角的终边上任意一点的距离,因而总是正的. 与 r 有关的任意点,其横、纵坐标分别为 x、y,它们的符号决定了三角函数的符号,如图 1－2 所示. 为便于记忆,也可用口诀“一全正,二正弦,三两切,四余弦”仅记住正值的分布即可.



sinα 和 cscα　　　　tgα 和 ctgα　　　　cosα 和 secα

图 1－2

三角函数值的符号规则,要经常用到,必须牢记.

例 1　已知角 α 终边上有一点 $(-3a,4a)$,其中 $a\neq 0$,求角 α 的正弦和正切值.

解:$\because x=-3a, y=4a$,

$\therefore r=\sqrt{(-3a)^2+(4a)^2}=5|a|$.

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5|a|}=\begin{cases}\dfrac{4}{5} & (a>0),\\[2ex] -\dfrac{4}{5} & (a<0).\end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4a}{-3a}=-\frac{4}{3}.$$

说明:由已知得角 α 的终边在第二或第四象限,故 $\sin\alpha$ 有两个值,$\operatorname{tg}\alpha$ 只有一个值,另外要注意 $r>0$.

例 2　选择题:sin2cos3tg4 的值为(　　).

(A)负数　(B)正数　(C)零　(D)不存在

分析：$\because \frac{\pi}{2}<2<\pi$，$\therefore \sin 2>0$.

$\because \frac{\pi}{2}<3<\pi$，$\therefore \cos 3<0$.

$\because \pi<4<\frac{3\pi}{2}$，$\therefore \operatorname{tg} 4>0$.

故 $\sin 2\cos 3\operatorname{tg} 4<0$，选(A).

例 3　求证：$(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

证明：根据三角函数定义，即证

$$\left(\frac{y}{r}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{r}+\frac{x}{y}\right)=\left(1+\frac{y}{r}\right)\left(1+\frac{x}{r}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{左端}&=y\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}\right)\cdot x\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{y}\right)\\&=\left(\frac{x}{r}+1\right)\left(\frac{y}{r}+1\right)=\text{右端}.\end{aligned}$$

说明：这里恰当地运用了三角函数定义，将三角函数运算转换为熟知的四则运算.

例 4　若 $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$，求$\frac{\theta}{3}$的取值范围，并在直角坐标系中用阴影表示出来.

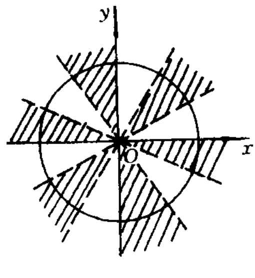


图 1—3

解：由 $\sin\theta\cdot\cos\theta<0$，知 θ 是第二、四象限的角，即

$$k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<k\pi+\pi\quad(k\in Z).$$

$$\therefore \frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<\frac{\theta}{3}<\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\quad(k\in Z).$$

令 $k=0,1,2,3,4,5$，可得出$\frac{\theta}{3}$的终边所在位置，如图 1－3 所示．

（四）单位圆和三角函数线

单位圆结合三角函数线，是研究三角函数一种数形结合的工具，非常直观形象．

半径等于单位长的圆叫做单位圆．把这个圆放到直角坐标平面上，使圆心位于坐标原点 O，且规定弧的正方向（为逆时针方向），便可用单位圆来表示一个角及其 6 个基本三角函数值．即把角 α 的顶点放在单位圆的圆心，角 α 的始边和 x 轴正半轴重合，如图 1－4 所示，角 α 的大小可用所对弧的有向弧长（包括绕几圈的情形）来表示，并且与单位圆有关的一些有向线段的数量可分别表示角 α 的 6 个三角函数值：

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，

$\mathrm{tg}\alpha=AT$，$\mathrm{ctg}\alpha=BS$，

$\sec\alpha=OT$，$\csc\alpha=OS$．

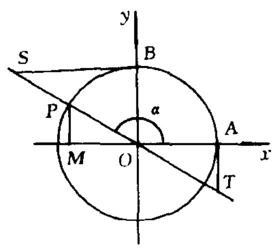


图 1－4

我们称$\overline{MP}$、$\overline{OM}$、$\overline{AT}$、$\overline{BS}$、$\overline{OT}$、$\overline{OS}$为角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线，统称为三角函数线．

6 个三角函数线的值是正是负，视其方向而定．正弦线、余弦线、正切线、余切线均与坐标轴（纵轴或横轴）平行或相重，其方向同坐标轴一样，向上、向右为正向，这时函数线的值为正，反之为负；正割线、余割线的值，依其与 OP 同向重合还

是反向重合而定正负，与 OP 同向为正，与 OP 反向为负．

应注意所作的切线只能以 A 或 B 为切点，而 A、B 是单位圆与横向正半轴、纵向正半轴的交点．

读者可自行画出 α 是第Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ象限角时的三角函数线．对于正割线、余割线，仅作一般了解即可．

三角函数线的引入，使三角函数具有了鲜明的几何特征．同时，因为三角函数与(单位)圆联系在一起，故又称三角函数为圆函数．

例 1 利用单位圆，求适合于下列条件的角 α 的集合：

(1) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$；(2) $\sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}$；(3) $\operatorname{tg}\alpha<-1$.

解：如图 1－5.

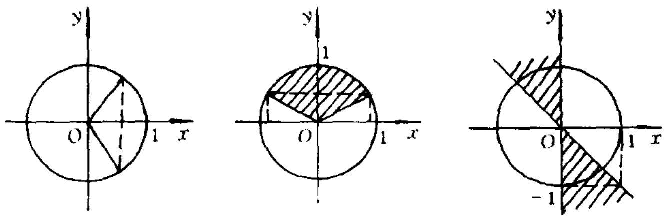


图 1－5

(1) $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in Z\}$.

(2) $\{\alpha\mid2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z\}$.

(3) $\{\alpha\mid k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in Z\}$.

例 2 求证：若 α 为锐角，则 $\sin\alpha+\cos\alpha>1$；若 α 为象限角，是否可以写出类似的不等式？

证明：如图 1－6，在单位圆中，α 是锐角，