成人高等教育教材

GAODENG DAISHU

高等代数

钟祥贵 主编

广西师范大学出版社
GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS

成人高等教育教材

高等代数

广西课程教材发展中心组编
主　　编　钟祥贵
编写人员　钟祥贵　易　忠

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

高等代数／钟祥贵主编．—桂林：广西师范大学出版社，2004.7

成人高等教育教材

ISBN 7-5633-4710-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．钟…　Ⅲ．高等代数—成人教育：高等教育—教材　Ⅳ．O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 059213 号

广西师范大学出版社出版发行

（桂林市育才路 15 号　邮政编码：541004
网址：http://www.bbtpress.cn）

出版人：肖启明

全国新华书店经销

桂林漓江印刷厂印刷

（广西桂林市西清路 9 号　邮政编码：541001）

开本：787 mm×960 mm　1/16

印张：19.25　字数：341 千字

2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷

印数：0 001～2 000 册　定价：21.70 元

编写说明

为了进一步贯彻落实教育部关于“教材建设精品化，教材要适应多样化教学需要”的指示精神，加强成人高等学校教材建设，推动成人高等教育的改革与发展，我们组织力量开发、编写了此套成人高等教育教材。

这套教材的开发采取科研课题管理模式进行。首先严格按照《广西成人高等教育部分教材建设实施方案》申报立项，然后通过专家论证和评审，最后经广西高等学校教材建设和管理委员会批准，从200多项申报材料中确定首期研究开发项目46项，编写出版的教材共47种。这47种教材涵盖了文学、法学、教育学、医学、动物科学和艺术等几大门类的学科。为了适应本、专科学生不同层次的学习要求，我们对主要学科分设了本科教材和专科教材。

本套教材力求体现成人高等教育的教学特点，注重教材的实用性，并适合成人高等教育的教学形式和教学规律。在强调基础理论、

基本知识、基本技能的同时，着重考虑内容的深入浅出，注意科学性与实践性的结合。在内容的选择上，教材注意面向大多数学生，既确保落实教学大纲的基本要求，又具有适当的弹性，能够适应学生进一步提高的要求，也给授课教师留有较大的选择和发挥空间。在教材编写体例上，采取了总论和分述的编写结构：总论部分概括阐述了课程的主要内容和知识点，分述部分则对各知识点进行详细的讲解。同时，为了帮助学生全面深入地掌握教材内容，便于学生自学，我们根据教材内容的特点编写了相应的学习指导书，对教材中的重点和难点予以点评和解析，并提供习题或自测题给学生自学，力求提高学生的学习效果。

本套教材已经广西高等学校教材建设和管理委员会审查通过。教材得以顺利编写、出版和使用，与广西教育厅领导的高度重视和大力支持是分不开的，同时，凝聚着广西各高等院校成人教育机构的领导和有关专家特别是广大编写人员的心血和汗水，在此谨向他们表示诚挚的谢意。

由于时间仓促，书中难免有错漏之处，恳请各位专家、广大师生批评指正。

成人高等教育教材编写组

2004年6月

前 言

高等代数是高等学校数学专业的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础课.

本书包含了高等代数的基本内容. 全书共分十章：基本概念，多项式，行列式，线性方程组，矩阵，向量空间，矩阵的对角化问题，线性变换，欧氏空间，二次型. 在编写过程中，我们力求将基本概念写得清晰易懂，将基本方法写得简明扼要，将基本理论的科学性与通俗性相结合. 本书具有如下特点：

（1）加强数学概念的直观理解. 引入概念和展开讨论时，尽量从简单实例或课程本身知识发展的要求出发. 注重培养学生的运算能力、分析问题以及解决问题的能力.

（2）在内容处理上，力求由浅入深，重点突出，难点分散，循序渐进. 例如，本书不介绍关于行列式展开的拉普拉斯定理，但以更基本的形式在 § 5.2 介绍了与此相关的关于矩阵乘积行列式的一些结果，然后把这些结果应用到 § 9.6 关于实对称矩阵可对角化的讨论上. 又如，学生普遍感到困难的重点与难点：矩阵和线性变换可对角化问题，我们在第 7 章针对矩阵作了专门讨论，而把相关的结果平行地引入到第 8 章线性变换的讨论中，从而减少了线性变换可对角化问题的学习难度.

（3）在选材上，编者根据多年的教学实践所积累的经验，参考了国内外同类优秀著作，并充分考虑到课程本身的要求和成教学生的学习特点，注重理论联系实际，其中提供了较多的典型例题以帮助学习者更好地理解、掌握和运用基本概念、基本方法和基本理论.

（4）本书以线性方程组为主要线索，以行列式和矩阵为工具进行编写，强调矩阵方法和线性方程组解的理论等知识的运用. 书中的例题和思考题是在编者多年教学实践中不断积累、更新形成的，它们难度不大，紧扣基础，有一定的灵活性，有利于鼓励学生自己动手解决问题，有利于启迪悟性，培养创新能力，从而有利于加强学生对所学知识的理解.

（5）本书是按照广西教育厅教材发展中心的要求编写的，其中融入了编者多年的执教和学习体会. 全书思路清晰，文笔流畅，既科学严谨，又通俗易懂，很具可读性.

本书由钟祥贵主编，钟祥贵、易忠编写，参加样章讨论和编写的还有唐金玉、廖贻华等.由于编者水平有限，本教材一定存在不少缺点，乃至错误，恳切希望读者

批评指正.

本书配有教学辅导书《高等代数学习指导》（含教材思考题参考答案），它们作为广西课程教材发展中心组编的系列教材的一部分，在编写过程中，始终得到广西师范大学成人教育学院、数学与计算机科学学院、广西大学数学与信息科学学院和广西师范大学出版社的大力支持，在此一并表示感谢.

本书除作为高等学校成人教育数学与应用数学专业本、专科生高等代数课程的教材外，亦可供数学专业全日制本、专科生、理工科对线性代数要求较高的专业的本科生和数学工作者学习参考.

编　者

2004.3.12

目　录

第一章 基本概念

DIYIZHANG

本章提要： 1.集合与映射
2.数学归纳法原理
3.数域

§1.1 集合与映射

本节知识点

- 集合、子集、交集、并集的概念
- 映射、单射、满射、双射、复合映射的概念与性质
- 代数运算的概念

集合是数学中最基本的概念之一. 我们在中学里就已经熟悉集合的意义. 所谓一个集合，指的是某些确定的对象的全体. 例如，一个班就是由一些确定的同学组成的集合，整数集就是指整数的全体，有理数集就是有理数的全体，等等. 一个集合中的确定的对象，称为这个集合的元素.

我们常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

如果集合中不含任何元素，就称这个集合是**空集**，用 $\varnothing$ 表示.

一个集合可能只含有有限多个元素，这样的集合叫做**有限集**；否则，称为**无限集**. 例如，一个班里全体学生的集合，正多边形对角线的交点的集合都是有限集；而全体自然数的集合，一元二次不等式 $x^2-3x+2\geq 0$ 的解的集合都是无限集.

由集合 A 中的某些元素组成的集合称为 A 的**子集**. 若 B 是 A 的子集，我们就说

A 包含 B，或者说 B 包含于 A，记为 $A \supseteq B$ 或 $B \subseteq A$.容易看到，B 是 A 的子集的充分必要条件是：如果 $x \in B$，那么 $x \in A$，即集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素.例如，有理数集是实数集的子集，而实数集是复数集的子集.

我们约定，空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$.

若两个集合 A、B 含有完全相同的元素，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A = B$.容易看到，$A = B$ 的充分必要条件是：$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

为了清楚地表示一个集合，我们常常使用列举法或描述法等. 例如，全体正整数的集合，用列举法表示为：$\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$，适合方程 $x^2 + 3y^2 = 1$ 的全部点的集合，用描述法表示为：$\{(x,y) \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$.

为了方便，我们在本书中采用如下一些记号来表示一些常用的数集.

$\mathbb{Z}$：表示整数集 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$；

$\mathbb{N}$：表示自然数集 $\{1,2,3,\cdots\}$；

$\mathbb{Q}$：表示有理数集；

$\mathbb{R}$：表示实数集；

$\mathbb{C}$：表示复数集.

设 A、B 是两个集合，由 A 与 B 的公共元素所组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

显然，$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$.

例如，

$$A = \{x \mid 0 < x < 5 \text{ 且 } x \text{ 为质数}\},$$
$$B = \{n \mid n = 2m, m \in \mathbb{N}\}.$$

则

$$A \cap B = \{2,3\} \cap \{2,4,6,\cdots\} = \{2\}.$$

设 A、B 是两个集合，由 A 的一切元素和 B 的一切元素所组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如，$A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,5,7,9\}$，则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}.$$

上面介绍了有关集合的一些概念，下面再来介绍映射的有关概念.

设 A、B 是两个非空集合. A 到 B 的一个**映射**指的是一个对应法则，通过这个

法则，对于集合 A 中的每一个元素，在集合 B 中有一个唯一确定的元素与它对应. 映射常用字母 $f,g,\cdots$ 表示.

$f:A\to B$ 表示 f 是 A 到 B 的一个映射.

如果映射 f 使元素 $y\in B$ 与元素 $x\in A$ 对应，那么就记为

$$f:x\mapsto y,$$

或 $f(x)=y$. 这时，y 称为 x 在映射 f 下的**像**，而 x 称为在映射 f 下 y 的一个**原像**. 特别地，A 到 A 的映射，称为 A 的**变换**.

例 1.1.1 设 $A=\{1,2,3\},B=\{1,2,3\}$，则

$$f:1\mapsto 2,2\mapsto 3,3\mapsto 2$$

是 A 到 B 的一个映射. 而 $g:1\mapsto 2,2\mapsto 3,3\mapsto 1$ 也是 A 到 B 的一个映射.

为了清楚地显示映射的对应法则，我们可以使用如下的记号：

$$f:A\to B;$$
$$x\mapsto y,$$

或者记为 $f:A\to B;x\mapsto y$.

如果映射 $f:A\to B$ 把 A 中的不同元素映射成不同的像，即对于集合 A 中的任意两个不同的元素 $a\neq b$，都有 $f(a)\neq f(b)$，则称映射 f 是**单射**.

容易验证，映射 $f:A\to B$ 是单射的充分必要条件是：对于 $\forall a$、$b\in A$，若 $f(a)=f(b)$，则 $a=b$.

设 $f:A\to B$ 是一个映射，对于 $x\in A,x$ 的像 $f(x)\in B$. 一切这样的像作成 B 的一个子集，用 $f(A)$ 表示，即 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，$f(A)$ 称为映射 f 的**像**.

例如，在例 1.1.1 中，$f(A)=\{2,3\}\subseteq B$ 但 $f(A)\neq B,g(A)=\{1,2,3\}=B$. 这使得我们看到，映射的像可能是 B 的一个真子集（即 $f(A)\subseteq B,f(A)\neq B$），也可能 $f(A)=B$. 对于后一种情形，我们给出明确的界定如下：

设 $f:A\to B$ 是一个映射，若 $f(A)=B$，则称 f 是**满射**.

明显地，映射 $f:A\to B$ 是满射的充分必要条件是：对于集合 B 中的任一元素 y，都有集合 A 中的元素 x 使得 $f(x)=y$.

如果映射 $f:A\to B$ 既是单射，又是满射，就称 f 是**双射**（或一一映射）.

特别地，如果 f 是 A 到 A 的一个映射，并且对于 $\forall x\in A$，都有 $f(x)=x$，那么，f 是一个双射，这个双射 f 称为集合 A 的**恒等映射**，记为 j_A.

容易发现，$f:A\to B$ 是双射的充分必要条件是：集合 B 中的任一元素在集合 A 中有且只有一个原像.

如果 $f:A\to B$ 是一个双射，则对于集合 B 中的任一元素 y，都有集合 A 中唯一的元素 x 与之对应，定义

$$g:B\to A;$$
$$y\mapsto x,$$

显然，g 也是一个映射，称为 f 的**逆映射**.

现在，设 f 是 A 到 B 的一个映射，g 是 B 到 C 的一个映射，规定 h 是 A 到 C 的一个映射，使每一个 $x\in A$，有 $h(x)=g(f(x))$，称 h 为映射 f 与 g 的**合成**（或者 g 与 f 的**积**），记为 $g\circ f$，简记为 gf.

比如，设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+;x\mapsto \mathrm{e}^x, g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R};x\mapsto \sin x$.

那么，$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};x\mapsto \sin \mathrm{e}^x$.

不难看到，映射的合成是复合函数概念的一种推广. 映射的合成满足结合律，即若 $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ 是映射，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

事实上，对任意的 $x\in A$，我们有

$$h\circ(g\circ f)(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x))),$$
$$(h\circ g)\circ f(x)=(h\circ g)(f(x))=h(g(f(x))).$$

由此即知结论成立.

现在，我们能够建立关于双射的一个定理.

定理 1.1.1 设 f 是 A 到 B 的一个映射，那么，下列说法等价：

（1）f 是双射；

（2）存在映射 $g:B\to A$，使得

$$g\circ f=j_A, f\circ g=j_B.$$

并且，当这样的映射 g 存在时，它是由 f 唯一决定的.

证明 如果 f 是双射，我们来寻找 B 到 A 的一个映射 g 满足（2）中的条件. 对于任意元素 $y\in B$，由于 f 是 A 到 B 的满射，所以，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 进一步，由于 f 是 A 到 B 的单射，可知上述与 y 对应的元素 x 是唯一的（因为如果还有 $x'\in A$，也满足 $f(x')=y$，则 $f(x')=f(x)$，从而由 f 是单射知 $x'=x$）.

这样，对于 B 中的任意一个元素 y，我们有 A 中唯一的满足 $f(x)=y$ 的元素 x 与之对应，所以映射 $g:B\to A;y\mapsto x$ 存在.

现在，对任意的 $x\in A$，我们有

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=x=j_A(x),$$

故得，$g \circ f = j_A$.

又对任意的 $y \in B$，我们有

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = j_B(y),$$

所以，$f \circ g = j_B$.

反之，设存在映射 $g: B \to A$，使得 $g \circ f = j_A$，$f \circ g = j_B$，我们来证 f 是双射.

首先，证明映射 $f: A \to B$ 是满射.

事实上，设 $y \in B$，由于 $g: B \to A$ 是映射，所以存在 $x = g(y) \in A$ 满足

$$f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = j_B(y) = y.$$

其次，证明映射 $f: A \to B$ 是单射.

事实上，设 x_1、$x_2 \in A$，而 $f(x_1) = f(x_2)$. 我们有

$$\begin{aligned} x_1 &= j_A(x_1) = g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_2)) = g \circ f(x_2) = j_A(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

综合上面两点得：f 是双射.

最后，证明这样的映射 g 存在时，它是由 f 唯一决定的.

事实上，如果还有映射 $h: B \to A$，也满足 $h \circ f = j_A, f \circ h = j_B$，那么，对集合 B 中的任一元素 y，都有

$$f \circ g(y) = j_B(y) = y, g(y) \in A,$$

从而，$h \circ (f \circ g)(y) = h(y)$，

又

$$\begin{aligned} h \circ (f \circ g)(y) &= (h \circ f) \circ g(y) = (h \circ f)(g(y)) \\ &= j_A(g(y)) = g(y), \end{aligned}$$

即 $h(y) = g(y), h = g$.

利用这个定理，我们可以给出逆映射的另一个定义：设 f 是 A 到 B 的一个映射，若存在 B 到 A 的映射 g，使 $g \circ f = j_A, f \circ g = j_B$，则称映射 g 为 f 的逆映射.

我们还看到，若 f 的逆映射存在，则 f 的逆映射唯一. 因此，可以记 f 的逆映射为 f^{-1}，且 $f \circ f^{-1} = j_B, f^{-1} \circ f = j_A$.

设 A、B 是两个非空集合，有序偶 (a,b)（其中 $a \in A, b \in B$）的全体组成的集合称为 A 与 B 的**积**，记为 $A \times B$，即 $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$.

例如，$A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$，那么 $A \times B = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$.

不难发现，利用积集，可以从已知的集合产生新的集合. 不仅如此，我们还得到如下的映射：

设 A 是一个非空集合，$A\times A\to A$ 的一个映射称为集合 A 的一个**代数运算**（或二元运算）. 例如，有理数的加法实际上是一个映射：

$$f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q};$$
$$(a,b)\mapsto a+b,$$

按定义，有理数的加法就是 $\mathbb{Q}$ 的一个代数运算（或二元运算）.

思考题

1． 设 $A\subseteq B$，证明：$A\cap B=A, A\cup B=B$.

2． 设 $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geq 0\}, B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\leq x<1\}$.

$$f:A\to B; x\mapsto\frac{x}{1+x}.$$

请说明(1) f 是 A 到 B 的一个映射；(2) f 是 A 到 B 的一个双射；(3) f 的逆映射是

$$f^{-1}:B\to A; x\mapsto\frac{x}{1-x}.$$

3． 分析映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto \mathrm{e}^x, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x\mapsto x+1$. 说明 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 一般来说是不相等的.

4． 判断下列规则是否是所给集合 A 的一个代数运算：

	集合 A	规则
1	$\mathbb{Z}$	$(a,b)\mapsto a^b$
2	$\mathbb{Q}$	$(a,b)\mapsto 1-ab$
3	$\mathbb{R}$	$(a,b)\mapsto \dfrac{a}{b}$

§ 1.2 数学归纳法

本节知识点

- 最小数原理
- 数学归纳法原理
- 第二数学归纳法原理

在中学数学中，我们学习了数学归纳法. 它是数学证明中的一个非常重要的方法. 在这一节里，我们将对这一方法作进一步的介绍.

数学归纳法所依据的原理是自然数集合的一个最基本的性质——最小数原理.

最小数原理 自然数集 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数. 也就是这样的一个数 $n_0\in S$，对于任意的 $n\in S$ 都有 $n_0\le n$.

比如，设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，那么集合 $S_1=\left\{[x]\left|\frac{1}{2}<x\le\frac{7}{2}\right.\right\}$ 是自然数集的一个非空子集，它有最小数1. 事实上，$S_1=\{1,2,3\}$.

说明 1 最小数原理在这里是作为公理引进的，但这并不意味着最小数原理对任意数集都成立. 例如，全体整数的集合 $\mathbb{Z}$ 就没有最小数. 又如，全体正分数的集合也是没有最小数的，因为如果 a 是一个正分数，那么，$\frac{a}{2}$ 就是一个小于 a 的正分数.

说明 2 最小数原理也不是自然数集的子集所特有的. 例如对任意一个整数 c，以 $M_c=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\ge c\}$ 代替自然数集 $\mathbb{N}$，最小数原理对于 M_c 仍然是成立的，也就是说，M_c 的任意一个非空子集必含有一个最小数.

利用最小数原理，可以证明我们早已熟悉的数学归纳法原理为什么是普遍成立的.

定理 1.2.1（数学归纳法原理）设有一个与自然数 n 有关的命题，如果

（1）当 $n=1$ 时，命题成立；

（2）假设 $n=k$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立.

那么，这个命题对一切自然数 n 都成立.

证明 用反证法. 假设命题不是对一切自然数都成立. 令

$$S=\{n\mid \text{命题对自然数 } n \text{ 不成立}\}.$$

那么 $S\ne\varnothing$，即 S 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的非空子集. 由最小数原理，S 中有最小数 a.

因为命题对 $n=1$ 成立，所以 $a\neq 1$，从而 $a-1$ 是一个自然数. 又因为 a 是 S 中最小的数，所以 $a-1\notin S$，即命题对自然数 $a-1$ 成立. 由定理的条件（2），则 $n=(a-1)+1$ 即 $n=a$ 时命题也成立. 这意味着 $a\notin S$，与 a 是 S 中的最小数矛盾. 所以，这个命题对一切自然数 n 都成立.

说明 3 注意到最小数原理对 M_c（c 为整数）成立，定理 1.2.1 可以推广如下：

设有一个与自然数 n 有关的命题. 如果

(1)当 $n=n_0$ 时，命题成立；

(2)假设 $n=k(\geq n_0)$ 时命题成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立.

那么，这个命题对一切不小于 n_0 的自然数 n 都成立.

例 1.2.1 证明：当 $n\geq 5$ 时，$2^n>n^2$.

证明 这个命题对 $n=2,3,4$ 来说是不成立的. 我们从 $n=5$ 开始用数学归纳法.

当 $n=5$ 时，命题成立，因为 $2^5>25$ 而 $5^2=25$.

假设 $n=k(k\geq 5)$ 时命题成立. 我们来看 $n=k+1$ 的情形. 此时

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2\cdot k^2>(k+1)^2.$$

这里，前一个大于号是根据归纳假设，后一个大于号是因为

$$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1\geq 14>0.$$

根据数学归纳法原理，$2^n>n^2$ 对一切自然数 $n\geq 5$ 成立.

说明 4 在某些情况下，仅仅归纳假设“命题对于 $n=k$ 成立”还不够，而需要更强的假定.

事实上，我们能够建立如下更有效的第二数学归纳法原理.

定理 1.2.2（第二数学归纳法原理） 设有一个与自然数 n 有关的命题. 如果

（1）当 $n=1$ 时，命题成立；

（2）假设命题对于一切小于 k 的自然数来说命题成立，则命题对于 k 也成立.

那么，命题对于一切自然数 n 来说都成立.

当然，定理 1.2.2 也可以像说明 3 那样进行适当的推广.

证明 用反证法. 假设命题不是对一切自然数都成立. 令

$$S=\{n\mid \text{命题对自然数 } n \text{ 不成立}\}.$$

那么 $S\neq\varnothing$，即 S 是自然数集 $\mathbb{N}$ 的非空子集. 由最小数原理，S 中有最小数 a. 因为命题对 $n=1$ 成立，所以 $a\neq 1$，从而 $a-1$ 是一个自然数. 又因为 a 是 S 中最小的数，所以 $a-1\notin S$，当然更有 $a-2$、$a-3\cdots 2,1$ 均不属于 S. 这就是说，当 $n=1,2,\cdots,a-1$，即对于一切小于 a 的自然数来说命题成立，于是由定理的条件(2)，则 $n=(a-1)+1$ 即 $n=a$ 时命题也成立. 这意味着 $a\notin S$，与 a 是 S 中的最小数矛盾.