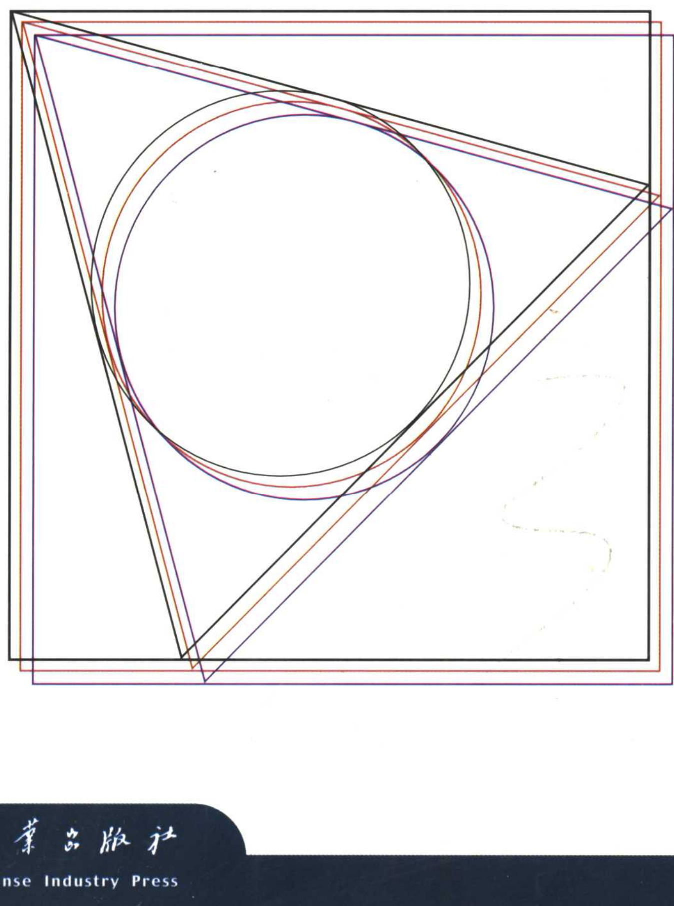
军队院校“2110工程”专著建设项目

微分方程理论及其应用

Theory and Applications of Differential Equations

时 宝 张德存 盖明久 著



国防工業出版社

National Defense Industry Press

军队院校“2110 工程”专著建设项目

微分方程理论及其应用

时宝　张德存　盖明久　著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书介绍了在微分方程理论以及经常使用的一些重要定理和不等式;微分方程基础理论;线性微分方程基础理论;Lyapunov稳定性理论基础;非线性算子理论基础,Banach空间中的微积分学,隐函数定理与反函数定理;在微分方程理论的研究中有重要应用的上下解方法基础;时滞泛函微分方程基础理论,以及作者在解的存在惟一性方面和在边值问题方面的研究成果;非线性差分方程的基本概念和定理,以及作者在这一领域开展的工作;反应扩散方程的极值原理和比较原理,以及作者在具有无穷时滞的Volterra反应扩散方程方面开展的工作。

本书适合数学类专业(包括军事院校数学类合训专业)高年级学生,理工科研究生和博士后研究人员学习和研究之用,也可供高校教师和研究人员教学和科研参考。

图书在版编目(CIP)数据

微分方程理论及其应用/时宝 等著. —北京:国防工业出版社,2005.8
"军队院校2110工程"建设专项
ISBN 7-118-04027-4

Ⅰ.微... Ⅱ.时... Ⅲ.微分方程—军事院校—教材 Ⅳ.0175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第076299号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本710×960 1/16 印张26¼ 467千字
2005年8月第1版 2005年8月北京第1次印刷
印数:1—4000册 定价:38.00元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

著者的话

J Poincaré① 在 1908 年指出: “如果要预见数学的未来, 适当的途径就是研究这门科学的历史和现在”. 陈省身 ② 在李文林 [96] 的题词中也指出: “了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤”.

我们就从微分方程的历史开始. 本书中关于一些历史人物和事件的注记也参考了 Gårding [43], Kline [71], 李心灿 [94, 95] 和李文林 [96] 等, 以期学生在学习的过程中感受到学习的乐趣, 培养和树立科学精神, 同时对微分方程的发展历史有一个概括的了解.

微分方程是伴随着微积分学一起发展起来的学科. 1614 年, J Napier③ 在创立对数时就讨论过微分方程的近似解; I Newton④ 和 G Leibniz⑤ 的著作中都处理过与微分方程有关的问题.

17 世纪末对摆的运动、弹性理论和天体力学等实际问题的研究引出了一系列微分方程.

①Jules Henri Poincaré (1854—1912), 法国人, 他被称为 “数学全才” 和 “对于数学和它的应用具有全面知识的最后一个人”.

②陈省身 (Shiing-shen Chern) (1911—2004), 浙江嘉兴人, Euclid, J Gauss, G Riemann 与 E Cartan (1869—1951) 的继承者与开拓者; 1984 年获 Wolf 奖.

③John Napier (1550—1617), 英国人.

④Sir Isaac Newton (1643—1727), 英国人, 他被称为划时代的科学巨匠, 与 Archimedes (前 287—前 212) 和 J Gauss 并称为 “三大数学家”; 1701 年, G Leibniz 说: “在从世界开始到 Newton 生活时代的全部数学中, Newton 的工作超过了一半”.

⑤Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646—1716), 德国人, 被誉为 “17 世纪的 Aristotle”; 1684 和 1686 年分别发表历史上第一篇公开发表的微积分学论文.

I Newton 在创建微积分时就给出了求解微分方程的“级数展开法”和“待定系数法”, 而 A Cauchy[①] 在 1842 年完善了“待定系数法”; 1690 年, Jacob Bernoulli[②] 提出了“悬链线问题”, 与钟摆运动有关的“等时曲线问题”以及与光线路径有关的“正交轨线问题”. 第二年, G Leibniz, C Huygens[③] 和 Johann Bernoulli[④] 分别解决了“悬链线问题”. 1716 年, I Newton 解决了“正交轨线问题”; 进一步的工作是 Nicolaus (II) Bernoulli 解决的; J Hermann[⑤] 于 1717 年给出了一般规则.

1754 年, J Lagrange[⑥] 在等时曲线问题上取得重要进展, 并开创变分学; 还求解了 y 或 x 已解出的方程以及奇解与通解的关系.

数学家们起初还只是采用特殊的技巧来解决特殊的方程, 然后才逐渐开始寻找带有普遍性的方法. 1691 年, G Leibniz 求解分离变量方程, 提出“分离变量法”; 接着首次利用后来称为 Briot[⑦]-Bouquet[⑧] 变换的 $y = ux$ 解决了齐次方程的求解问题, 1696 年他又利用变换 $u = y^{n-1}$ 解决了 1695 年由 Jacob Bernoulli 提出的“Bernoulli 方程”, 还曾试图利用变量代换的方法统一解决一阶微分方程的求解问题; 1715 年, B Taylor[⑨] 讨论微分方程的奇解, 包络和变量代换公式; 1734 年—1935 年, L Euler[⑩] 和 A Clairaut[⑪] 独立地提出“Clairaut 方程”和“积分因子法”; 1772 年, P Laplace[⑫] 将奇解 (他称特殊解) 概念推广到高阶方程; 1774 年, J Lagrange 对奇解和通解的联系做了系统的研究. L Euler 证明了凡能用分离变量法求解的方程都可用积分因子法求解, 但反之不然; 还证明对于高阶方程, 用分离

[①] Augustin Louis Cauchy (1789—1857), 法国人, 他被称为“光辉的分析学家”.

[②] Jacob (Jacques) Bernoulli (1654—1705), 瑞士人, 1689 年证明了调和级数的发散性; 1690 年提出了积分术语; 1691 年发明了极坐标; 1692 年引进了坐标概念; 1713 年给出了 Bernoulli 大数定律.

[③] Christiaan Huygens (1629—1695), 荷兰人, 1657 年引入数学期望概念.

[④] Johann Bernoulli (1667—1748), 瑞士人, 1689 年证明调和级数的发散性; 1694 年发现 l'Hôpital 法则; 变分法的重要奠基人之一.

[⑤] Jakob Hermann (1678—1733), 瑞士人.

[⑥] Joseph-Louis Lagrange (1736—1813), 意大利/法国人.

[⑦] Charles Auguste Briot (1817—1882), 法国人.

[⑧] Jean Claude Bouquet (1819—1885), 法国人.

[⑨] Brook Taylor (1685—1731), 英国人, 有限差分理论的奠基人; 1712 年提出 Taylor 级数.

[⑩] Leonhard Euler (1707—1783), 瑞士人, 1727 年证明了 e 是无理数 (1873 年, C Hermite 进一步证明它是超越数); 1735 年给出了 Euler(-Mascheroni) 常数

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090\cdots$$

(迄今不知它是否为无理数); 1736 年解决了 Königsberg 七桥问题; 1765 年奠定分析力学基础; 他被称为“应用数学大师”和“数学界的 Shakespeare”.

[⑪] Alexis Claude Clairaut (1713—1765), 法国人, 首次给出曲线积分和全微分概念.

[⑫] Pierre-Simon Laplace (1749—1827), 法国人, 被称为“法国的 Newton”; 1812 年给出 Laplace 中心极限定理并引进 Laplace 变换, Laplace 变换导致 O Heaviside (1850—1925) 首创运算微积方法, 把它成功地应用到与电磁问题有关的线性微分方程上去.

变量法求解是行不通的; 还曾试图利用积分因子的方法统一解决一阶微分方程的求解问题.

1736 年, L Euler 发表的 Mechanica 是用微分方程分析方法发展 I Newton 的质点动力学的第一本著作.

到 1740 年左右, 数学家们已经知道几乎所有求解一阶方程的初等方法.

早在 1691 年, Jacob Bernoulli 在研究船帆在风力下的形状问题, 即 "模盖问题" 时就得到了一个二阶方程; Johann Bernoulli 处理了这个方程, 并指出 "模盖问题" 与 "悬链线问题" 问题在数学上是相同的; 1733 年, Daniel Bernoulli① 关于振动弦的工作引进了一阶 Bessel② 方程; 1736 年, L Euler 得到与 Daniel Bernoulli 的极为相似的结果, 但结果却更数学化, 并得到任意阶的 Bessel 方程, 还用积分表达式求出了解, 这恐怕是二阶方程的解用积分来表达的第一个结果; 1739 年, 他又研究了谐振子方程, 得到两种不同形式的特解 $2\cos x$ 和 $e^{-xi}+e^{xi}$, 并用级数展开的方法证明它们恒等, 而这使他得到了著名的 Euler 公式 $e^{xi}=\cos x+i\sin x$, 并重新发现了共振现象.

Johann Bernoulli 和 L Euler 还求解了 Euler 方程, L Euler 的方法是用变换 $x=e^t$ 将其化为常系数线性方程. 1739 年, L Euler 就知道了高阶常系数线性齐次方程的解, 并在 1743 年 —1750 年间利用 Euler 待定指数函数法完整解决了高阶常系数线性齐次方程; 1750 年 —1751 年, 对于非齐次方程, 他又提出了一种降低方程阶的解法, 并最早区分了 "通解" 和 "特解"; 1755 年又开始对有限差分的研究, 其中包括微分方程论和一些特殊的函数. 1762 年 —1765 年间, J Lagrange 对高阶变系数线性齐次方程的研究也迈出了一步, 并引出伴随方程的概念, 推广了 L Euler 于 1750 年 —1751 年的部分结果, 还知道了高阶方程若已知 m 个特解可以将方程降低 m 阶.

18 世纪微分方程求解的最高成就应是 J Lagrange 在 1774 年 —1775 年间提出的 "常数变易法".

1788 年, J Lagrange 把新发展的分析方法应用于质点和刚体力学, 总结了 I Newton 以来的结果, 重要的是应用微分方程将力学变成数学的一个分支. 他研究了微分方程的积分及在流体力学中的应用, 在木星和土星轨线研究中的应用, 也给出用特征根求解线性微分方程组的方法.

在 18 世纪, 由解决一些具体物理问题而发展起来的微分方程, 已经成为有自己的目标和方法的新的数学分支.

在微分方程早期研究中出现的一类重要的非线性方程是 Riccati③ 方程. 它最

①Daniel Bernoulli (1700—1782), 瑞士人, 1738 年提出流体力学的基本定理之一—Bernoulli 定理.

②Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846), 德国人.

③Jacopo Francesco Riccati (1676—1754), 意大利人.

先是 J Riccati 于 1723 年 —1724 年间通过变量代换从一个二阶方程 "降阶" 得到的一个一阶方程; 1725 年, Daniel Bernoulli 用初等方法求解了一个特殊的 Riccati 方程; 1760 年 —1761 年, L Euler 证明方程 $y'+y^2=ax^n$ 在已知一个特解 y_1 的情况下, 通过变换 $z=\frac{1}{y}-y_1$ 化为线性方程; J d'Alembert① 最先研究了一般形式的 Riccati 方程. N Abel② 研究了 Abel 第一类和第二类方程的若干特殊类型, 特别对于 Jacobi③ 方程得到了通解. 然而, J Liouville④ 在 1841 年证明 Riccati 方程除某些特殊情形以外, 其通解不可能用初等函数或初等函数的积分来表示. 当然, 对于一般的非线性微分方程来说更是如此. 另一方面, 在物理学和力学中所提出的微分方程问题, 大部分都要求满足某种附加条件的特解, 即所谓定解问题的解. 这样, 人们逐渐改变了原来的想法, 不去求通解, 而开始从事定解问题的研究. 微分方程定解问题通常包括初值问题 (Cauchy 问题) 和边值问题.

数学家们用 "分离变量法" 求解二阶线性数学物理方程时提出了微分方程的边值问题 (参见邓宗琦 [26]). J Liouville 在 1836 年—1837 年间在微分方程边值问题的工作和 J Sturm⑤ 在 1836 年的工作 (其中给出了 Sturm 分离定理和比较定理) 形成了 Sturm-Liouville 理论. J Sturm 和 J Liouville 研究了一般的二阶线性微分方程特征值的性质, 特征函数的性态和任意函数用这些特征函数进行级数展开. 1893 年, C Picard⑥ [119] 研究了特殊的边值问题. 1894 年, H Burkhardt⑦ 又研究了一般边值条件下方程的边值问题, 并引进 Green⑧ 函数. 到 20 世纪初, 由 D Hilbert⑨ 和 M Bôcher⑩ 奠定微分方程边值问题的理论基础.

①Jean Le Rond d'Alembert (1717—1783), 法国人, 1746 年提出了波动方程; 1747 年开创偏微分方程理论; 1763 年提出了广义波动方程.

②Niels Henrik Abel (1802—1829), 挪威人, 近世代数和椭圆函数论的创始人.

③Carl Gustav Jacob Jacobi (1804—1851), 德国人, 1841 年提出了 Jacobi 行列式, 并开始使用符号 $\frac{\partial}{\partial x}\cdots$; 他是椭圆函数论的开拓者之一.

④Joseph Liouville (1809—1882), 法国人, 1851 年给出 Liouville(超越) 数:

$$0.110001000000000000000001000 0\cdots,$$

其中 1 在 n! 位置, 0 在其他位置; 发展了椭圆函数论.

⑤Jacques Charles François Sturm (1803—1855), 法国人.

⑥Charles Émile Picard (1856—1941), 法国人, C Hermite 的女婿.

⑦Heinrich Friedrich Karl Ludwig Burkhardt (1861—1914), 德国人, 在 1904—1908 年的著作中给出了很有价值的数学史注记.

⑧George Green (1793—1841), 英国人, 他是 Cambridge 数学物理学派 (复兴沉寂一个多世纪的英国数学) 的开山祖师.

⑨David Hilbert (1862—1943), 德国人, 对 20 世纪数学有深刻影响的数学家之一, 有 "无冕数学之王" 之称; 1900 年在 Paris 国际数学家大会上提出了 23 个数学问题; 1904—1910 年间建立了 Hilbert 空间理论.

⑩Maxime Bôcher (1867—1918), 美国人.

经过近一个世纪的尝试和酝酿，到了 19 世纪初叶，极限和连续性等严格概念和方法的建立，是数学分析史上的一个划时代的飞跃，极大推动了微分方程基础理论的发展 (参见第 2 章).

18 世纪用"分离变量法"解偏微分方程时引出了一系列的特殊函数，如 1784 年，A Legendre① 在测定旋转椭球面在矢径方向的拉力时发现了 Legendre 多项式；1817 年，F Bessel 在研究 J Kepler② 的在相互引力作用下决定三体问题③ 时提出的 Bessel 函数；1837 年，G Lamé④ 在研究椭球内稳态的热分布时提出的 Lamé 函数等.

19 世纪下半叶，对微分方程的理论研究在两个方向上开拓了微分方程研究的新局面，其中的重大发展都与 J Poincaré 的名字联系着.

第一个方向是与奇点问题相联系的微分方程解析理论 (参见 Golubev [44] 和 Hille ⑤[63] 等). 作为微分方程向复数域的推广，微分方程解析理论是由 A Cauchy 开创的，但后来该理论的重点向大范围转移. L Fuchs⑥ 和 J Poincaré [123] 探讨了一阶线性方程理论；G Riemann⑦ 和 L Fuchs(1865 年) 发展了 n 阶线性方程理论；到 1882 年 —1884 年，J Poincaré 的工作和 F Klein⑧ 在 1884 年的工作由于自守函数理论而使微分方程解析理论臻于顶峰.

J Poincaré 独创了 19 世纪微分方程研究的另一个方向 — 定性理论 (参见 Lefschetz ⑨[89]，叶彦谦 [187] 和张芷芬等 [202])，1892 年 —1898 年间，Poincaré [121] 刻画天体力学系统运动的特征，并引导到微分方程定性理论的创立；1881 年 —1886 年间，他在同一标题下连续发表了四篇论文 [122]，寻找只通过考察微分方程本身就可以回答关于稳定性等问题的方法，为微分方程定性理论奠定了坚实基础. 他发

① Adrien-Marie Legendre (1752—1833)，法国人，1806 年发展了最小二乘法.

② Johannes Kepler (1571—1630)，德国人，他于 1609 年提出行星运动三大定律，奠定了天体力学的基础.

③ A Clairaut, J d'Alembert, L Euler, J Lagrange 和 J Poincaré 等都研究过三体问题，已知的三体问题的特解有 J Lagrange 的正三角形解，C Siegel (1896—1981) 证明了三体问题的几何图形渐近于 J Lagrange 的特解.

④ Gabriel Lamé (1795—1870)，法国人.

⑤ Einar Carl Hille(1894—1980)，瑞典人.

⑥ Lazarus Immanuel Fuchs (1833—1902)，德国人.

⑦ Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826—1866)，德国人，他的博士论文 (单复变函数一般理论基础) 被认为是近代数学史上最重要的文献之一，其中引入 "Riemann 曲面"(和 "Riemann 可积") 概念；1854 年提出 Riemann Non-Euclid 几何，为 50 年后 (1905 年)A Einstein 的广义相对论提供了数学框架，成为历史上数学应用最伟大的例子，人们称其 "把数学向前推进了几代人的时间"；1859 年提出了迄今未解决的 Riemann 假设，C Siegel 在研究 Riemann ζ 函数的一个发现是数学史知识与数学研究结合最了不起的例子.

⑧ Felix Christian Klein (1849—1925)，德国人，1872 年提出 Erlanger 纲领.

⑨ Solomon Lefschetz(1884—1972)，俄罗斯人.

现微分方程的奇点起着关键作用. 他把奇点分为焦点, 鞍点, 结点和中心四类, 讨论了解在各种奇点附近的性态, 还发现了极限环 (1928 年, A Liénard [99] 最早给出了极限环的惟一性定理, 并最早应用于三极管电路中得到的 van der Pol 方程 [162]). 1892 年, A Lyapunov① 在用 17 年辛勤劳动写成的博士论文 (运动稳定性的一般问题) 中将 J Poincaré 关于在奇点附近积分曲线随时间变化的定性研究发展至高维一般情形而形成专门的 "运动稳定性" 分支, 第一个给运动稳定性以精确数学定义并系统地解决了运动稳定性问题 (参见本书第 4 章), A Letov [91] 称 "无论现代控制以何种方法描述, 总是建立在一个牢固的基础上, 那就是 Lyapunov 关于运动的稳定性理论". 但在以后一个时期, 除了 G Birkhoff② [11, 12, 13] 以三体问题为背景继承和发展了 J Poincaré [120, 121] 的工作, 并提炼出动力系统理论, 关于微分方程定性理论的研究比较沉寂. 直到上个世纪 30 年代, 由于新的物理, 力学以及工程技术和自动控制等问题的推动, 使微分方程定性理论中的概念, 问题和方法又在新的条件下得到发展. 1937 年, A Andronov 和 L Pontryagin③ [3] 提出结构稳定性概念, 使动力系统的研究向大范围发展.

J Poincaré 的定性理论就是把微分方程 Cauchy 问题的局部结果推广到全局. J Hadamard④ 认为这个推广之所以成为可能, 是因为 J Poincaré 得到 E Galois⑤ 用 "群" 处理代数方程解法思想的启示, 这种思想使他关心并重视泛函分析工作.

在读者已有微分方程基础知识的基础上, 我们从深广度两个方面深入讨论微分方程的基础理论. 全书内容共 9 章, 第 1 章介绍在微分方程理论以及本书中经常使用的一些重要定理和不等式; 第 2 章介绍在微分方程的基础理论; 第 3 章介绍线性微分方程的基础理论; 第 4 章介绍 Lyapunov 稳定性的理论基础; 第 5 章介绍非线性算子的理论基础, Banach 空间中的微积分学和隐函数与反函数定理; 第 6 章介绍在非线性微分方程研究中有重要应用的上下解方法基础和一些基本结果; 第 7 章介绍时滞泛函微分方程的基础理论, 稳定性, 振动性, 以及作者在解的存在惟一性方面和在边值问题方面的研究成果; 第 8 章介绍非线性差分方程的基本概念和定理以及作者在这一领域开展的工作; 第 9 章介绍反应扩散方程的极值原理和比较原理, 以及作者在具有无穷时滞的 Volterra 反应扩散方程方面开展的工作.

本书的整个内容的选取是由作者在科学研究和教学过程中所获得的一些体

① Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857—1918), 俄罗斯人.

② George David Birkhoff (1884—1944), 美国人, 1931 年奠定了 Maxwell-Boltzmann 理论的基础.

③ Lev Semenovich Pontryagin (1908—1988), 俄罗斯人.

④ Jacques Salomon Hadamard (1865—1963), 法国人, 1892 年第一次把集合论引进复变函数论; 1910 年奠定了泛函分析的基础.

⑤ Evariste Galois (1811—1832), 法国人, 用群论改变了整个数学的面貌, 被称为 "数学奇才".

会, 部分内容选取作者在科学研究过程中所获得的一些成果 (参见作者等[156]). 由于作者水平有限, 再加上时间比较仓促, 谬误在所难免, 并且只能挂一漏万, 敬请读者和同行不吝以各种方式赐教.

本书适合高等院校数学类专业 (包括军事院校数学类合训专业) 高年级学生和理工科研究生学习和研究之用, 也可供高校教师和研究人员教学和科研参考.

本书第 1 章 ~ 第 6 章和第 9 章由时宝完成编撰, 同时完成全书的统筹工作, 第 7 章和第 8 章分别由盖明久和张德存完成编撰. 曾晓云, 杨树杰和杜彬彬等 3 位同志也编撰了部分内容, 并认真做了全书的校对工作.

本书的完成得到海军航空工程学院专业技术拔尖人才基金 (名师工程)、中青年学科带头人基金 (尖子工程)、学院训练部和国防工业出版社的大力支持, 在此一并表示感谢.

2005 年 7 月 3 日于烟台

目　录

第 1 章 几个重要定理和不等式

1.1 Ascoli-Arzelà 定理

假设 $F=\{f(t)\}$ 是定义于区间 $[\alpha,\beta]$ 上的函数族.

定义 1.1.1 *若存在 $M\in(0,\infty)$, 对任意的 $f(t)\in F$, 有 $|f(t)|\leqslant M, t\in[\alpha,\beta]$, 则称函数族 F 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致有界的 .*

定义 1.1.2 *若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对任意的 $f(t)\in F$, 当 $t_1,t_2\in[\alpha,\beta]$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时, 有 $|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$, 则称函数族 F 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是等度连续的 .*

为了证明 Ascoli[①]-Arzelà[②] 定理, 我们先给出 H Heine[③] 和 F Borel[④] 的有限覆盖定理.

引理 1.1.1 (Heine-Borel 有限覆盖定理 , W Gross)

假设 X 是度量空间, $A\subset X$ 是紧集, $G\subset X$ 是一族开集. 若 G 覆盖 A, 即 $\bigcup\limits_{K\in G}K\supset A$, 则存在有限个开集 $K_1,\cdots,K_n\in G$ 覆盖 A, 即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_i\supset A$.

---

①Giulio Ascoli (1843—1896).

②Cesare Arzelà (1847—1912).

③Heinrich Eduard Heine (1821—1881), 德国人, 给出一致连续概念.

④Félix Édouard Justin Émile Borel (1871—1956), 法国人, 1894 年引进 Borel 测度, 与 R Baire (1874—1932), H Lebesgue 共同开创点集测度理论.

参见夏道行等[180].

注记 1.1.1 Heine-Borel 有限覆盖定理的逆定理也是成立的. 也参见夏道行等[180].

现在, 我们给出 Ascoli-Arzelà 定理.

定理 1.1.1 (Ascoli-Arzelà 定理)

假设函数族 $F=\{f(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致有界和等度连续的. 则存在函数序列 $\{f_n(t)\}\subset F$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的.

证明 我们使用 G Cantor① 的对角线方法来证明.

考虑 $\{r_i \mid r_i\in[\alpha,\beta]\bigcap\mathbb{Q}, i\in\mathbb{N}\}$.

因为 $\{f(r_1)\}$ 有界, 故由 Bolzano②-Weierstrass ③ 定理, 可选取收敛的子序列 $\{f_{n1}(r_1)\}$.

同样, $\{f_{n1}(r_2)\}$ 也是有界的, 再由 Bolzano-Weierstrass 定理又可在其中选取收敛的子序列 $\{f_{n2}(r_2)\}$. 这样继续下去, 我们得到可列个收敛的子序列

$$f_{11}(r_1), f_{21}(r_1), \cdots, f_{n1}(r_1), \cdots,$$

$$f_{12}(r_2), f_{22}(r_2), \cdots, f_{n2}(r_2), \cdots,$$

$$\cdots.$$

令 $f_n(t)=f_{nn}(t), n\in\mathbb{N}$. 则 $\{f_n(t)\}$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上是一致收敛的.

事实上, 由 $\{f_n(t)\}$ 的取法, 它在 $[\alpha,\beta]\bigcap\mathbb{Q}$ 上是收敛的. 因此, 对任意的 $\varepsilon>0$, $r_k\in[\alpha,\beta]\bigcap\mathbb{Q}$, 存在 $N_k=N(\varepsilon,r_k)\in\mathbb{N}$, 当 $\ell,m>N_k$ 时, 有

$$|f_\ell(r_k)-f_m(r_k)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.1.1}$$

又由 $\{f_n(t)\}$ 的等度连续性, 存在 $\delta>0$, 当 $t,t'\in[\alpha,\beta]$, $|t-t'|<\delta$ 时, 有

$$|f_n(t)-f_n(t')|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.1.2}$$

①Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845—1918), 德国人, 他于 1879 年—1884 年间所创立的集合论被誉为 20 世纪最伟大的数学创造.

②Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781—1848), 捷克人, 1817 年提出了 Cauchy 序列的概念, 而 A Cauchy 是四年后给出的; 与 K Weierstrass 独立地给出了处处连续而无处可导的函数 (K Knopp [72](1882—1957) 于 1918 年给出了作出连续的不可微函数的一般方法).

③Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815—1897), 德国人, 用序列极限定义无理数强烈地影响了数学的未来, 这使他被称为"现代分析之父".