GAODENGSHUXUE
WEIJIFEN

高等数学

（微积分）

复习及试题选讲

吴振奎 编著

- 考硕士研究生必备指南
- 学习高等数学经典指导

考研

北京工业大学出版社

高等数学（微积分）复习及试题选讲

吴振奎 编著

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(微积分)复习及试题选讲/吴振奎编著.
北京:北京工业大学出版社,2005.4
ISBN 7-5639-1481-1

Ⅰ.高... Ⅱ.吴... Ⅲ.微积分-高等学校-教学
参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 141591 号

高等数学(微积分)复习及试题选讲
吴振奎 编著
*
北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷厂印刷
*
2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 1 次印刷
850mm×1 168mm 32 开 32.5 印张 1 162 千字
印数:1~5 000 册
ISBN7-5639-1481-1/G·757
定价:40.00 元

前　言

近年来，随着教育事业的发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对高校在校学生，还是对已经工作的往届大学毕业生和自学者来讲，都提供了继续深造的机会.

“高等数学”(包括线性代数和概率论与数理统计)是大学理工科及部分文科（如经济、管理等)专业的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必试科目.但其内容较为庞杂，涉及分支也多，且题目灵活性大.

1982年，余在辽宁大学供职.正课之暇，为学校部分打算报考研究生的学子，开设了“高等数学复习及试题选讲”选修课，目的是从知识上给学生们一个小结，方法上给他们一点开拓，技巧上给他们些微启迪.

当时课讲得很辛苦，但学生们学得极认真.教者与学者不断交流、研讨、切磋，使得两遍下来，讲义便已形成，且由辽宁科学技术出版社于1984年出版，转年增订本再印.

尔后，笔者调天津工作，种种原因，使笔者终与本书修订再版工作无缘.

一晃20余年，时过境迁，感触良多.

近年来大学扩招后，由于办学条件的限制，学生们对数学学习普遍感到困难，不少学生都希望能有一本数学复习用书，希望这本书的知识面广些，内容丰富些，层次稍高些，不仅对在校生复习迎考有所帮助，而且对于考研甚至参加数学竞赛也能有益，因为学子们都将同样面临复习、考试，尽管是不同的层次的考试.

此次应北京工业大学出版社之邀，笔者有幸将书稿修订再次奉献给广大读者.为此笔者对原书大动刀斧，以使之更适应新时代、新潮流、新情况.

与旧版相较，本书按学科拆分成三册：高等数学（微积分），线性代数和概率论与数理统计. 本书系“高等数学（微积分）”分册. 此外在每章增加了以下内容：

(1) 经典问题解析；

(2) 1987 年以后全国硕士学位招生数学统考试题选讲；

(3) 国内外大学生数学竞赛题赏析.

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”. 了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为数学内容就那么多，好的试题也就那么一些. 正如时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）.

“登高望远”，对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为蕴涵在这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们会有茅塞顿开之感，有时更会使我们大吃一惊，啊哈！原来如此.

本书编写过程参阅了大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，笔者谨向他们致以谢意.

尽管笔者十分努力，但精力与体力已使我感到力不从心. 然而我仍旧会努力，且仍旧在努力.

本书的出版唤起了笔者对在辽宁大学工作的那段美好时光的追忆，对昔日的挚友、同仁的怀念，在此也向他们捎去一些祝福.

笔者也殷切期待着读者的建议、批评和指教，让我们一起将这本小书修订成功！

吴振奎

目　录

一、函数、极限、连续

内 容 提 要

(一) 集合及运算

集合是现代数学中最基本的概念,其观点和方法已渗透到数学的许多分支中去.通常用"具有某种特定性质事物(对象)的全体"去描述集合.集合简称集,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.构成集合的事物称为元素,通常用 $a,b,c,\cdots$ 小写字母表示.

若 a 是 A 的元素,称 a 属于 A,记 $a\in A$;若 a 不是 A 的元素,称 a 不属于 A,记作 $a\overline{\in}A$.

又 $A=\{a\mid a$ 具有 $P\}$ 表示集合 A 由满足条件 P 的元素组成.

不含任何元素的集合叫**空集**,记作 $\varnothing$.

又若 $x\in A$,必有 $x\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记 $A\subset B$.

当 $A\subset B$,且 $B\subset A$ 时,称集合 A,B **相等**,记 $A=B$.

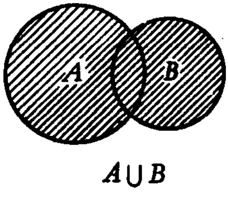
集合的运算指交、并、差等:

$X:\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称集合 A,B 的**并**,记 $A\cup B$;

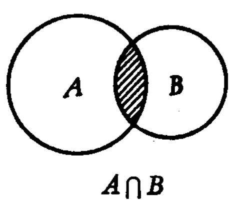
$Y:\{y\mid y\in A$ 或 $y\in B\}$ 称集合 A,B 的**交**,记 $A\cap B$;

$Z:\{z\mid z\in A$ 或 $z\overline{\in}B\}$ 称集合 A,B 的**差**,记 $A-B$ 或 $A\setminus B$;

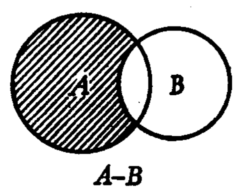
又若 S 是全空间,则任一集合 $A\subset S$,称 $S-A$ 为 A 的余集或补集,记 $\overline{A}$.



$A\cup B$



$A\cap B$

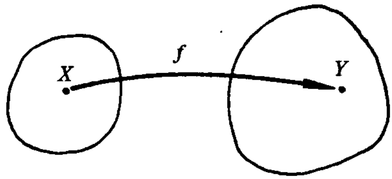


$A-B$

（二）函数概念

1. 函数

X，Y 两个集合，若对 X 中每一元素 x，通过法则（映射）f 对应到 Y 中一个元素 y，则称 f 为定义在 X 上的一个函数，记 $y = f(x)$（x 又称自变量，y 称因变量）



X 称为函数**定义域**．而 $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的**值域**．变量也称为**元**．随自变量个数不同函数又分一元函数、二元函数 …… 多元函数．

注 这儿 X 中的元素 x 可以是 n 维空间中的点，这样一来定义就包括了一元函数、二元函数、多元函数等．

2. 函数的表示法

解析法（又称公式法，它有显式、隐式、参数式之分）、列表法，图象法等．

3. 函数的几种特性

单、多值性	对定义域 X 中每一个 x，只确定惟一的 y 的函数叫**单值函数**；否则称为**多值函数**
奇　偶　性	$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为**偶函数**，$f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为**奇函数**（对所有 $x \in X$）
单　调　性	对于 X 内任两点 $x_1 < x_2$，若 $f(x_1) < f(x_2)\ [f(x_1) \leqslant f(x_2)]$ 称函数 $f(x)$ **单增**[**不减**]； $f(x_1) > f(x_2)\ [f(x_1) \geqslant f(x_2)]$ 称函数 $f(x)$ **单减**[**不增**]
有　界　性	若 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$（$M$ 是正的常数）对所有 $x \in X$ 成立，则 $f(x)$ 在 X 上**有界**；否则称**无界**
周　期　性	若 $f(x + T) = f(x)$，对所有 $x \in X$ 成立，称 $f(x)$ 为**周期函数**．满足上式的最小正数 T（如果存在）称为该函数的**周期**
齐　次　性	对多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来说，若 $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称该函数为 k **次齐次函数**

4. 反函数、复合函数

复合函数是由函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 经过中间变量 u 而组合成的函数 $y = f[\varphi(x)]$．

注意当 $x \in X$(或其一部分)时,$\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中时,函数才能复合.

	自变量	因变量	定义域	值　域	表达式
函　数	x	y	X	Y	$y = f(x)$
反函数	y	x	Y(或部分)	X(或部分)	$x = f^{-1}(y)$

注　函数与反函数是相对的,它们的位置可互换.

5.显函数、隐函数

	定　　义	表　示　式
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
隐函数	未解出因变量,而是用方程表示自变量与因变量间的关系的函数	$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$

6.初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数由基本初等函数经有限次代数运算或函数复合得到的函数.

$$\text{基本初等函数}\begin{cases}\text{幂函数 } y = x^{\alpha}\ (\alpha \text{ 为实数})\\ \text{指数函数 } y = a^{x}\ (a > 0, a \neq 1)\\ \text{对数函数 } y = \log_a x\ \ (a > 0, a \neq 1)\\ \text{三角函数 } y = \sin x, \cos x, \cdots\\ \text{反三角函数 } y = \arcsin x, \arccos x, \cdots\end{cases}$$

$$\Big\downarrow \ (\text{四则运算})(\text{函数复合})$$

初等函数

(三)极限的概念

1.极限

极限分数列极限和函数极限,详见下表:

数列的极限	对一个数列 $\{x_n\}$,若任给 $\varepsilon > 0$,存在自然数 $N = N(\varepsilon)$,使当 $n > N$ 时,不等式 $\lvert x_n - A \rvert < \varepsilon$ 恒成立,则称 A 为 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A$(当 $n \to \infty$ 时)

续表

函数的极限	若任给 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,使当 $0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$ 时,不等式 $\mid f(x) - A \mid$ 恒成立,则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to x_0$ 时) 当 x 从 x_0 左(右)边趋向于 x_0 时 $f(x)$ 的极限称为左(右)极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x))$

注 1 一些常见数列的极限,如:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0\ (\mid q \mid < 1)$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1\ (a > 1)$;　　(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

注 2 这儿函数极限定义只给了其中的一种情形,对于其他情形可见下表.

任给	存在	当自变量变化到	恒有关系式成立	结　论	记　号
$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < \mid x - x_0 \mid < \delta$	$\mid f(x) - A \mid < \varepsilon$	A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
	$N > 0$	$\mid x \mid > N$		A 为 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$
		$x > N$		A 为 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$
		$x < -N$		A 为 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

注 3 若数列 $\{x_n\}$ 看成自变量只取自然数的函数:$x_n = f(n)$,则数列极限可看作一种函数极限.然而应注意:函数的自变量取连续变化的实值,而数列中 n 只取自然数.

2.极限的运算

若 $\lim f(x) = A, \lim \varphi(x) = B$,则

(1)$\lim[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim f(x) \pm \lim \varphi(x) = A \pm B$;

(2)$\lim cf(x) = c\lim f(x) = cA$;

(3)$\lim f(x) \cdot \varphi(x) = \lim f(x) \cdot \lim \varphi(x) = A \cdot B$;

(4)$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim \varphi(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$.

这儿 lim 下未写 x 的趋向,表示 $x \to x_0, x \to \infty, x \to +\infty$ 中的一种.

3. 两个重要的极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

4. 无穷大量、无穷小量及其阶

无穷小量	$\lim\alpha(x)=0$	关　系	$\lim\frac{1}{\alpha(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim g(x)=\infty$		$\lim\frac{1}{g(x)}=0$

无穷小量 $\alpha(x),\beta(x)$ 的阶

比　值		定　　义	记　号
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$=0$	$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶无穷小	$\alpha(x)=o[\beta(x)]$
	$=A\neq 0$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta(x)]^*$
	$=1$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小	$\alpha(x)\sim\beta(x)$
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A\neq 0$ $(k>0)$		$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta^k(x)]$

无穷小量的性质:

(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;

(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;

(3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

注　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$(有极限)$\Longleftrightarrow x\to a$ 时 $f(x)-A$ 是无穷小量.

5. 极限存在的判定

(1)**(柯西(Cauchy)准则)** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow N(\varepsilon)>0$,使任何 $x_1\geqslant N$, $x_2\geqslant N$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立.

(2)**(单调有界函数有极限)**(a,b) 内单调有界函数 $f(x)$ 存在 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

---

* 更确切地讲,若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$,则记 $\alpha(x)=O^*[\beta(x)]$;若 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant M\neq 0$,则记 $\alpha(x)=O[\beta(x)]$.

(3)(**压挤或夹逼准则**)$\lim g(x)=\lim h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

6.极限的常用求法

方　法	例　子
利用定义 ($\varepsilon-\delta(N)$ 方法)	若 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$ (国防科技大学,1981)
利用极限的基本性质和法则	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{a^{\frac{x}{2}}}(a>1)$ (中南矿冶学院,1982)
连续函数求极限	求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (大连铁道学院,1989)
利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n$ (东北重型机械学院,1981) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ (一机部 1981—1982 年出国进修生)
利用适当的函数变换(化去不定型的不定性或变化不定型类型)	求 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}$ (哈尔滨工业大学,1981) 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$ [提示:令 $1-x=u$] (湘潭大学,1981)
洛必达(L'Hospital)法　则	求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$ (国防科技大学,1983)
极限判别准则	设对 $n=1,2,\cdots$ 均有 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ (湘潭大学,1981)

续表

方　法	例　子
等价无穷小代换	求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x-e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$　（湖南大学,1983）
用左右极限关系	设 $y=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}y$　（厦门大学,1980）
用级数敛散性	求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$　（成都地质学院,1979;山东矿冶学院,1982）
适当放缩（利用不等式）	求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$　（湘潭大学,1982）
利用积分	求 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$　（华东水利学院,1980）

注　表中方法的详细使用情况,请见后文或相应章节及例子(关于洛必达法则内容见下一章).

(四) 函数的连续性

1. 连续性的概念及连续函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**.

若函数 $f(x)$ 在某区间的每一点都连续,则说函数在该区间上连续,且称 $f(x)$ 为该区间上的**连续函数**.

2. 左、右连续及函数连续条件

右连续
若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$

左连续
若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$

函数在 x_0 连续
$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\alpha$
当 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to 0$

3. 函数的间断点

函数的间断点	间断点的分类
① $f(x)$ 在 x_0 无定义; ② $f(x)$ 在 x_0 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在; ③ $f(x)$ 在 x_0 有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$(可去间断点); ④ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	**满足③、④的间断点称为第一类间断点,其余的间断点称为第二类间断点**

4. 一致连续

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使对任意 $x_1, x_2 \in I$,当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,总有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立,则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

5. 闭区间连续函数的基本性质

最大最小值定理	若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在该区间至少取得最大、最小值各一次(它们分别记为 M, m)[由此可推出 $|f(x)| \leqslant M$(有界性)]
介值定理	若 $m \leqslant f(x) \leqslant M$,又 $\mu \in [m, M]$,则 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ,使 $f(\xi) = \mu$. 特别地,若 $f(a)f(b) < 0$,则有 $\xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = 0$
一致连续	闭区间上的连续函数,在该区间一致连续

连续函数性质
- 局部性质　$f(x)$ 在 x_0 的邻域有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$)(局部保号性)
- 闭区间整体性质
  - 最(大、小)值定理
  - 介值定理
  - 一致连续定理

6. 连续函数的性质

四则运算的连续性	若 $f_1(x), f_2(x)$ 在某一区间上连续,则 $\alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x) \neq 0)$ 也连续(在同一区间),这里 α, β 为常数
复合函数	若 $y = f(z)$ 在 z_0 连续, $z = \varphi(x)$ 在 x_0 连续,且 $z_0 = \varphi(x_0)$,则 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续
反 函 数	若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增(减)、连续,则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在其值域上也单增(减)、连续

7. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的;

(2) 初等函数在其定义域内是连续的.

经 典 问 题 解 析

一、函数及其表达式

1. 函数表达式

例 1 设函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,试求 $f\{f(f[f(x)])\}$ 和 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ ($x\neq 0$ 且 $x\neq 1$).

解 由 $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$, 有 $\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x}$, 则

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x.$$

故 $f(f[f(x)])=f(x)$.

从而 $$f\{f(f[f(x)])\}=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=x.$$

而 $$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1}=1-x \quad (x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 1).$$

注 由解题过程不难发现:

$$\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k\text{重}}=\begin{cases}f(x), & k\text{ 为奇数;}\\ x, & k\text{ 为偶数.}\end{cases}$$

严格地证明,还要用数学归纳法去完成.

例 2 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

解 设 $x+y=u$, $\frac{y}{x}=v$, 解得 $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$.

故 $$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{(1-v)u^2}{1+v},$$