名师解惑丛书

函数

李应林 编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

函　　数

李应林　编著

山东教育出版社
2000年·济南

图书在版编目（CIP）数据

函数/李应林编著. —济南：山东教育出版社，1998（2000重印）

（名师解惑丛书）

ISBN 7-5328-2700-3

Ⅰ.函… Ⅱ.李… Ⅲ.代数课-高中-课外读物 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02880 号

名师解惑丛书

函　　数

李应林　编著

出 版 者：山东教育出版社

（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）

电　　话：（0531）2023919　传真：（0531）2050104

网　　址：http：//www. sjs，com. cn

发 行 者：山东教育出版社

印　　刷：山东新华印刷厂临沂厂

版　　次：1998 年 9 月第 1 版

2000 年 2 月第 4 次印刷

印　　数：12001—18000

规　　格：787mm×1092mm32 开本

印　　张：6

字　　数：125 千字

书　　号：ISBN 7—5328—2700—3/G・2478

定　　价：4.40 元

出版说明

“古之学者必有师．师者，所以传道受业解惑也．”有感于此，组织部分长年在一线执教、经验丰富的著名教师，以专题讲座形式编辑出版一套限于中学理科知识框架内，源于教材但有些内容又略高于教材的，高级中学数学、物理学、化学“名师解惑丛书”是我们多年的想法和愿望．

两年多来，山东教育出版社理科编辑室经过广泛的调研，以及与部分学生和老师们的座谈，我们的初衷不断得到升华，并与作者就丛书的特色取得如下共识：

每册书即为一个专题讲座，其内容由若干教学过程中反映出的疑难知识点组成，通过对典型例题的分析，剖析疑难知识点，帮助学生理清思路，进而达到融会贯通的目的．

每册书通过对知识的综合，帮助学生将过去所学的知识按专题进行系统的归纳和总结；通过适当介绍一些学科知识自身发展的逻辑规律，给学生有关学科思想方法方面的启迪．

总之，这套丛书企盼达到启迪思维、拓宽知识、培养兴趣的目的，以提高学生分析问题和解决问题的能力．

前　言

函数是中学数学教材的主旋律，是初等数学到高等数学的枢纽.全部高中代数是以函数为主线展开的，平面解析几何全面渗透了函数的思想方法，立体几何的许多内容也可理解为通过空间模型建立的函数关系.函数思想贯穿于高中数学理论和应用的各个侧面，函数观点牵动着中学数学思维路线的条条神经.高中数学的重要任务之一就是树立运用函数思想观点思考问题的意识，自觉地运用函数观点解决问题.综上所述，可以看出函数在中学数学中的重要地位和作用.

本书对于函数这一重要内容，立足教材，拓宽加深，揭示联系，注重思想方法指导，总结规律，以期提高学生的数学能力.本书具有如下特点：

1. 对于学生容易出错和忽略的问题进行典型剖析，树立正确的解题思路.

2. 对于通性通法问题进行解题指导，揭示规律，注重导评.

3. 加强函数思想方法的运用，引导学生自觉地运用函数思想观点来分析问题和解决问题.

本书对于学生学好函数，解决有关函数的疑难问题，是难得的良师益友.

编者

目　　录

一　集　合

集合是研究数学问题的基础和工具，中学数学中的函数、数列、轨迹等都是通过集合定义的.集合是数学语言的一部分，恰当地使用集合的符号和记法，能够准确地表达我们所考虑的对象的范围及对象的主要性质.集合之间具有运算性质，特别是逻辑运算规律，这使我们能处理逻辑关系复杂的问题.集合涉及划分与分类等数学思想，学习集合知识有助于体会划分与分类的思想方法.在高考中，集合内容一般以两种方式考查：一是考查集合本身的内容，即集合的概念、集合与集合之间的关系、元素与集合之间的关系；二是把集合作为工具在考查其他内容时加以应用，用集合语言叙述问题.

（一）集合的概念

集合与对应是近代数学中最基础、最重要的概念，是建立近代数学的基础，对集合概念我们只给出描述性的解释.集合中元素的确定性、互异性、无序性对确定集合有决定性的意义.注意集合的表示法，符号"$\in$"及"$\subset$、$\subseteq$"的用法以及子集、交集、并集、补集、等集的严格定义.

1. 准确把握集合概念

例 1　已知 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in R\}$，$Q=\{y\mid y=x+1,x\in R\}$，则 $P\cap Q$ 等于（　　）.

(A) $\{(0,1),(1,2)\}$　　　　(B) $\{0,1\}$

(C)$\{1,2\}$　　　　　　　　(D)$(1,+\infty)$

分析:本题出错率颇高,容易误选(A),原因就是未能正确理解集合概念所致,误认为是求抛物线与直线的交点.事实上,P、Q 中的代表元素是 y,它表示函数的值域.本题实际上是求两个函数值域的交集.由 $P=\{y|y\geqslant 1\}$,$Q=\{y|y\in R\}$ 知 $P\cap Q=P$,因此应选(D).

例 2　设集合 $A=\{y\mid y=x^2+ax+2,x\in R\}$,$B=\{(x,y)|y=x^2+ax+2,x\in R\}$,试求出参数 $a=-2$ 时的集合 A 和 B.

分析:代表元素是决定一个集合的完全标志,尽管集合 A 和 B 都是由等式 $y=x^2+ax+2$ 制约的,但由于代表元素不同,所以它们是不同的集合.对于每个常数 a,集合 A 表示二次函数 $y=x^2+ax+2$ 的值域,代表元素是该函数的任意一个函数值;集合 B 表示抛物线 $y=x^2+ax+2$ 上的点集,代表元素是该抛物线上的任意一点.二者不可混为一谈.

解:当 $a=-2$ 时,$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geqslant 1$,

$\therefore A=\{y|y\geqslant 1\}$.

在 B 中,$y\geqslant 1$,又由 $x^2-2x+2-y=0$,得 $x=1\pm\sqrt{y-1}$.

$\therefore B=\{(1+\sqrt{y-1},y),y\geqslant 1\}\cup\{(1-\sqrt{y-1},y),y\geqslant 1\}$.

2. 注意集合元素的互异性

例 3　已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$.若 $A=B$,求 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})$ 的值.

误解:$\because A=B$ 且 $xy>0$,$\therefore\lg(xy)=0$,于是 $xy=1$,

$\therefore |x|=1$ 或 $y=1$.

$\therefore \begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$

$\therefore$ 当 $x=y=1$ 时,原式 $=2\times2000=4000$;

当 $x=y=-1$ 时,原式 $=0$.

辨析:注意到 $x=y=1$ 时,$A=\{1,1,0\}$,这与集合元素的互异性相矛盾.因此,用列举法表示集合时,特别要注意元素的互异性.故只有 $x=y=-1$ 时,才有 $A=B=\{-1,1,0\}$,所求的值为 0.

3. 掌握证明(判断)两集合关系的方法

反映集合与集合关系的一系列概念,都是用元素与集合的关系来定义的,因此,在证明(判断)两集合的关系时,应回到元素与集合的关系中去.

例 4 设集合 $A=\{a|a=3n+2,n\in Z\}$,集合 $B=\{b|b=3k-1,k\in Z\}$,试判断 A 与 B 的关系.

解题指导: 在用描述法表示集合时,代表元素仅在集合符号内部有效,也就是说,我们并不区分字母 x,y,a,b 的差异,总认为 $\{x|x=2a+1,a\in Z\}=\{y|y=2b+1,b\in Z\}$.

解:任设 $a\in A$,则 $a=3n+2=3(n+1)-1$,

$\because n\in Z$,$\therefore n+1\in Z$,$\therefore a\in B$,故 $A\subseteq B$.

又设 $b\in B$,则 $b=3k-1=3(k-1)+2$.

$\because k\in Z$,$\therefore k-1\in Z$,$\therefore b\in A$,故 $B\subseteq A$.

综上所述,$A=B$.

[**导评**]这里在说明 $a\in B$ 或 $b\in A$ 的过程中,关键是先要变(或凑)形式,而不区分字母 a,b,n,k 的差异.

例 5 设集合 $A=\{a|a=n^2+1,n\in N\}$,集合 $B=\{b|b=$

$k^2-4k+5, k\in N\}$，试证 $A\subset B$.

证明：任设 $a\in A$，则 $a=n^2+1=(n+2)^2-4(n+2)+5$，$\because n\in N\Rightarrow n+2\in N$，$\therefore a\in B$，故 $A\subseteq B$，又显然 $1\notin A$，而 $1\in B$ $(k=2)$，$\therefore A\neq B$，故只有 $A\subset B$.

4. 重视空集的特殊性

空集是一个特殊的重要集合，它不含任何元素，是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集. 显然空集与任何集合的交集为空集，与任何集合的并集仍等于这个集合. 当题中隐含有空集参与的集合关系时，其特殊性往往被忽视，应加以足够重视.

例 6 已知集合 $A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

误解：$\because A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，

$$\therefore B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant m\leqslant 3.$$

辨析：以上解答初看似乎无懈可击，其实是错误的. 错就错在忽略了“空集是任何集合的子集”这一重要性质，而没有考虑 $B=\varnothing$ 的情况. 正确解法是：

(1)若 $B\neq\varnothing$，即 $m+1\leqslant 2m-1\Leftrightarrow m\geqslant 2$，由已知，$B\subseteq A$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5\end{cases}\Leftrightarrow 2\leqslant m\leqslant 3.$$

(2)若 $B=\varnothing$，即 $m+1>2m-1\Leftrightarrow m<2$，此时仍有 $B\subseteq A$.

由(1)、(2)得 $m\leqslant 3$.

例 7 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0, x\in R\}$.

若 $A\cap R^{+}=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：$A\cap R^{+}=\varnothing$ 等价于方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有实根(即 $A=\varnothing$)或者只有非正实根.

(1)若 $A=\varnothing$，即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数根 $\Leftrightarrow$ $\Delta=(a+2)^2-4<0\Leftrightarrow -4<a<0$.

(2)若方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 只有非正实数根 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0,\\ -(a+2)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow a\geqslant 0.$$

由(1)、(2)得 $a>-4$.

5. 注意集合语言转译的准确性

对于用集合语言叙述的问题，求解时往往需要转译成代数语言或几何语言，如果转译不准确，就会导致错误.

例 8 设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$ 等于 ( ).

(A) $\varnothing$　　　　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　　　　(D) $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

分析：这是 1990 年全国高考试题，当年曾有很多考生错选(A)，原因就在于将集合 M 转译成了直线 $y=x+1$ 上的点的集合. 实际上，集合 M 是由直线 $y=x+1$ 除去点(2,3)后的点组成的，集合 N 是由坐标平面上不在直线 $y=x+1$ 上的点组成的，因此 $M\cup N$ 是由坐标平面上除去点(2,3)的点组成的，它关于坐标平面上的点组成的集合 I 的补集 $\overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$，故应选(B).

例 9 已知集合 $A=\{a\mid \frac{x+a}{x^2-2}=1$ 有唯一实数解$\}$，用列

举法表示集合 A.

误解:集合 A 表示方程 $\frac{x+a}{x^2-2}=1$, ①

即方程 $x^2-x-a-2=0$ ②

有等根时 a 的取值集合.方程②有等根的充要条件是 $\Delta=1+4(a+2)=0\Rightarrow a=-\frac{9}{4}$, $\therefore A=\{-\frac{9}{4}\}$.

辨析:上述解法,将 A 转译为方程②有等根时 a 的取值集合是不准确的.转译时忽略了隐含条件 $x^2-2\neq 0$.事实上与方程①等价的应是混合组(Ⅰ)$\begin{cases}x^2-x-a-2=0, & ②\\ x^2-2\neq 0. & ③\end{cases}$

因此,在讨论方程②有唯一实根时,必须照顾到③:$|x|\neq\sqrt{2}$.由于方程①是分式方程,可能有增根,当方程②的二实根中有一个是方程①的增根 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$ 时,方程①也只有一个实根.正确解法是:

方程①等价于混合组(Ⅰ).

(1)当方程②有等根时,同上解得 $a=-\frac{9}{4}$,此时,

$x=\frac{1}{2}$,适合③.

(2)当 $x=-\sqrt{2}$ 为①的增根时,由②得 $a=\sqrt{2}$,此时①中的 $x=1+\sqrt{2}$;

当 $x=\sqrt{2}$ 为①的增根时,由②得 $a=-\sqrt{2}$,此时①中的 $x=1-\sqrt{2}$.

综上所述,$A=\{-\frac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

(二)集合的运算及集合知识的应用

集合的运算主要有两类问题:一是直接求两个或两个以

上集合的交、并、补集；二是已知其运算结果，求其中某些元素应具备的条件. 集合知识的应用主要有两个方面：一是把集合作为一种数学语言，以表达一定范围的元素，例如，求方程(组)的解集，求不等式(组)的解集等；二是运用集合间的运算法则或运算思想，解决某些逻辑关系较复杂的问题.

1. 注意数形结合

集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助数轴、直角坐标系或韦氏图等工具，将抽象问题直观化、形象化，然后利用数形结合的思想方法使问题灵活直观地获解.

例 1 设 $A=\{x\mid |x+1|<m\}$，$B=\{x\mid \frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}<0\}$，问当实数 m 为何值时，(1) $A=B$；(2) $A\supset B$；(3) $A\cap B=\varnothing$.

解题指导：对于不等式的解集，首先要解出不等式，将集合具体化，然后充分利用数轴研究集合的关系及集合的交、并、补集. 由于 m 为参数，所以集合 A 具有弹性，应对 m 进行分类讨论.

解：$B=\{x\mid -4<x<2\}$.

当 $m\leqslant 0$ 时，$A=\varnothing$；当 $m>0$ 时，

$A=\{x\mid -1-m<x<-1+m\}$. 结合数轴(略)可得：

(1)当$\begin{cases} m>0, \\ -1-m=-4, \\ -1+m=2, \end{cases}$即 $m=3$ 时，$A=B$；

(2)当$\begin{cases} m>0, \\ -1-m<-4, \\ -1+m>2, \end{cases}$即 $m>3$ 时，$A\supset B$；

(3)当 $m\leqslant 0$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

例 2 设全集 $I=\{x\mid 0<x<10, x\in N\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，

$A\cap\overline{B}=\{1,5,7\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{9\}$，求集合 A、B.

解题指导：所给集合是有限集时，首先要将全集 I 用列举法表示出来（具体化），然后画出韦氏图，采取"填数法"来解决.

解：$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

画出韦氏图并根据题意填数如图 1—1.

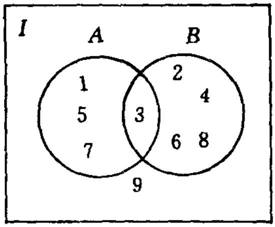

图 1—1

由图可得：

$A=\{1,3,5,7\}$，

$B=\{2,3,4,6,8\}$.

例 3 设集合 $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid y=ax+b\}$，讨论是否存在实数 a,b，使得 $A\cap B=\varnothing$.

分析：本题是一个存在性问题，求解时可先假设存在实数 a,b，使 $A\cap B=\varnothing$，即方程 $ax+b=0$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时无解. 显然，直接讨论较麻烦. 若从数形结合的角度来思考，集合 A 是 x 轴上的线段 OC，集合 B 表示直线 l（如图 1—2），$A\cap B=\varnothing$

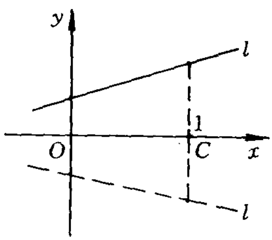

图 1—2

则意味着直线 l 与线段 OC 无交点. 结合图形便知

$$(a\cdot 0+b)(a\cdot 1+b)>0,$$

即 $b(a+b)>0$.

2. 注意思考问题的周密性和解题后的反思与检验

在确定集合中待定字母的值时，往往在求得值后就认为大功告成，忽视解题后的反思与检验，产生与元素的互异性或与题设条件相矛盾的增解.

例 4 设集合 $A=\{-3,a^2,1+a\}$，$B=\{a-3,a^2+1,2a-1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

误解：由 $A\cap B=\{-3\}$ 得 $a^2\neq-3$，$1+a\neq-3$，而$a-3$，a^2+1，$2a-1$中恰有一个的值为-3，解之得 $a=0$ 或 $a=-1$.

辨析：上述解法求得的 a 值是 $A\cap B=\{-3\}$ 的必要条件，但不是充分条件. 为得到使 $A\cap B=\{-3\}$的 a 值，应当进行检验. 为什么要进行检验呢？原因在于原题中的 a 是作为 $A\cap B=\{-3\}$的充分条件给出来的，忽略了原条件的充分性，就可能出错.

在这里，当 $a=0$ 时，$A=\{-3,0,1\}$，$B=\{-3,1,-1\}$，这时 $A\cap B=\{-3,1\}$ 与 $A\cap B=\{-3\}$ 相矛盾，故 $a\neq 0$；当 $a=-1$ 时，$A=\{-3,1,0\}$，$B=\{-4,2,-3\}$，符合条件 $A\cap B=\{-3\}$，故所求为 $a=-1$.

例 5 已知 $A=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，若 $A\cap C=\varnothing$，$B\cap C\neq\varnothing$，求实数 a 的值.

解：由已知解得 $A=\{2,-4\}$，$B=\{2,3\}$.

由 $A\cap C=\varnothing$知 $2\notin C$，$-4\notin C$. 又根据 $B\cap C\neq\varnothing$可知 $3\in C$，于是由 $3^2-3a+a^2-19=0$ 得 $a=-2$ 或 $a=5$.