研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

物理学与偏微分方程

（第二版）（上册）

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume I)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

物理学与偏微分方程

（第二版）（上册）

Physics and Partial Differential Equations

(Second Edition) (Volume Ⅰ)

李大潜　秦铁虎　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部研究生工作办公室推荐的“研究生教学用书”,是在第一版的基础上修订而成的。这次修订除了改正了第一版中的几处印刷错误,并在第五章第四节末尾加了一小段外,其余未作改动。

本书力求在物理学与偏微分方程之间架设一座桥梁,帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生、高年级大学生及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程,了解其来龙去脉及推导过程,理解现今国际上一些重要并常见的数学模型,从而可以更自觉地学习和运用,并学会抓住一些有意义的问题开展研究工作。

全书分上、下两册出版。上册共5章,从最基本的物理概念出发,分别介绍了电动力学、流体力学、磁流体力学、反应流体力学、弹性力学,重点介绍建立它们的基本方程的全过程,并对这些方程在数学上的结构与特征作简略的说明,还有选择地介绍了近年来国际上的一些最近的研究成果。

图书在版编目(CIP)数据

物理学与偏微分方程. 上册/李大潜,秦铁虎编著.
2版.—北京:高等教育出版社,2005.1
ISBN 7-04-015853-1

Ⅰ.物… Ⅱ.①李… ②秦… Ⅲ.①物理学-研究生-教学参考资料②偏微分方程-研究生-教学参考资料 Ⅳ.①O4②O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第139819号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 郭思旭 **封面设计** 李卫青
责任绘图 郝林 **责任印制** 杨明

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总　　机 010-58581000

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂

开　　本 787×960 1/16
印　　张 19.75
字　　数 330 000

版　　次 1997年7月第1版
　　　　 2005年1月第2版
印　　次 2005年1月第1次印刷
定　　价 29.40元

物料号:15853-00

新版序

本书第一版上册于 1997 年 7 月，下册于 2000 年 6 月出版. 在下册出版的同年 7 月，应读者的需要，在改正了少数印刷错误后，将上册第 2 次印刷.

这次出版，除改正了上、下册中已发现的不多几处印刷错误，并在第五章 §5.4 末尾加一小段外，其余均未更动，特此说明. 利用这个机会，对本书面世以来众多师友和广大读者的鼓励和厚爱表示由衷的谢意.

作者

2003 年 9 月于上海

序

很多重要的物理、力学学科，其基本方程均是偏微分方程．这些方程的名称虽然不少是人们熟悉的，且有相当多的研究工作在其基础上进行，但要真正全面、深入地了解有关的物理、力学背景，却不是一件容易的事．为了帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生与大学高年级学生、以及其他学科领域与应用部门的学者和研究工作者熟练掌握近代物理学中一些重要的基本方程，深入了解其来龙去脉及推导过程，方便地理解现今国际上常用的一些数学模型，从而更自觉地学习和运用，并学会抓住一些真正有意义的问题，有的放矢地开展研究工作，特编著本书，力求在物理学与偏微分方程之间架设一座桥梁．

在本书中，将从最基本的物理概念出发，对电动力学、流体力学、磁流体力学、反应流体力学、弹性力学、热弹性力学、粘弹性力学、气体分子运动论、狭义相对论、量子力学等物理、力学学科，重点介绍建立它们的基本方程的全过程，同时，对这些方程在数学上的结构与特征，包括方程的类型及基本特点、解的性态及常用的求解方法等作一简略的说明，对近年来国际上的一些最新研究成果，包括作者及其研究集体的一些研究成果，也有选择地加以介绍．希望不熟悉有关物理、力学学科的读者能在不太长的时间内由浅入深地接触到该学科的核心，从而尽快地完成从物理到数学，从有关物理、力学领域到其由偏微分方程描述的数学模型的过渡．另一方面，对

已经比较熟悉有关物理、力学内容的读者，希望通过对其基本方程的数学结构及特征的深入了解，进一步看到由于采用了有效的数学工具与表达方式，物理学的基本内容将以更为清晰的形式表现出来，从而更自觉地运用近代数学的概念、方法和工具来研究有关的物理、力学问题.

本书分上、下两册，每册各五章. 各章内容是相对独立的，但又有一定的呼应与联系. 每章后均附有习题及参考文献. 学习过大学数学、物理等本科基础课程的读者，阅读本书的绝大部分章节应不会遇到本质上的困难. 本书可用作研究生课程或大学高年级选修课教材，亦可用作参考书或课外读物.

自 1987 年下半年起，本书中的内容作为大学高年级选修课及研究生学位基础课已在复旦大学连续讲授过多次，取得了良好的教学效果，讲稿也经过了不断地补充和修改，本书是在此基础上定稿的.

感谢高等教育出版社对本书出版的热情支持以及郭思旭编审精心细致的编辑工作. 感谢蔡志杰博士以负责的态度与娴熟的技巧打印了全部书稿. 感谢辜英求博士协助作者用国际单位制统一了本书中的物理单位. 特别是，感谢武汉大学数学系齐民友教授及复旦大学物理系倪光炯教授仔细地审阅了本书原稿，并提出了许多有益的意见和建议. 他们的辛勤劳动使本书为之生色.

作者是数学工作者，水平有限，对物理学的理解更属肤浅，不妥及疏漏之处在所难免，恳请读者不吝赐正.

作者

1996 年 11 月 10 日

目　　录

第一章　电动力学 ……………………………………………(1)

§1. 引言 ……………………………………………(1)

§2. 预备知识 ……………………………………………(2)

2.1. 库仑 (Coulomb) 定律，静电场的散度与旋度 …………(2)

2.1.1. 库仑定律，电场强度 ……………………………(2)

2.1.2. 高斯 (Gauss) 定理 ……………………………(4)

2.2. 安培 – 毕奥 – 萨伐尔 (Ampère–Biot–Savart) 定律，静磁场的散度与旋度 ……………………………(7)

2.2.1. 电流密度，电荷守恒定律 ……………………………(7)

2.2.2. 安培 – 毕奥 – 萨伐尔定律，磁感强度 …………(9)

2.2.3. 安培定理 ……………………………………………(10)

2.3. 法拉弟 (Faraday) 电磁感应定律 ……………………(13)

§3. 真空中的麦克斯韦方程组，洛伦兹力 ……………………(15)

3.1. 真空中的麦克斯韦方程组 ……………………………(15)

3.2. 洛伦兹力 ……………………………………………(18)

§4. 电磁能量和电磁动量，能量、动量守恒与转化定律 ……(19)

4.1. 电磁能量，能量守恒与转化定律 ……………………(19)

4.2. 电磁动量，动量守恒与转化定律 ……………………(21)

4.3. 电磁能量 (动量) 密度，电磁能量流 (动量流) 密度 ……………………………………………(24)

§5. 麦克斯韦方程组的数学结构，电磁场的波动性 …………(25)

5.1. 麦克斯韦方程组的数学结构 ……………………………(25)

5.2. 一阶对称双曲型偏微分方程组 ……………………………(26)

5.3. 电磁场的波动性，自由电磁波 ……………………………(31)

§6. 电磁场的标势与矢势 ……………………………………(35)

6.1. 预备知识 ……………………………………………(35)

6.2. 电磁场的标势与矢势 ……………………………………(38)

6.3. 例 —— 电偶极辐射 ……………………………………(41)

§7. 媒质中的麦克斯韦方程组 ……………………………(46)

7.1. 媒质中的麦克斯韦方程组 .... (46)
7.2. 媒质交界面上的条件 .... (49)
7.3. 媒质中电磁场量的表示 .... (53)
§8. 静电场和静磁场 .... (54)
8.1. 静电场 .... (54)
8.2. 稳定电流的电场 .... (57)
8.3. 静磁场 .... (60)
§9. 达尔文 (Darwin) 模型 .... (65)
9.1. 拟静电模型及其修正形式 .... (65)
9.2. 麦克斯韦方程组的一个定解问题 .... (66)
9.3. 达尔文模型 .... (67)
习题 .... (75)
参考文献 .... (76)
第二章 流体力学 .... (79)
§1. 理想流体力学方程组 .... (79)
1.1. 预备知识 .... (79)
1.2. 理想流体力学方程组 .... (81)
1.3. 理想流体力学方程组的数学结构 .... (87)
1.4. 一维理想流体力学方程组 .... (100)
§2. 粘性流体力学方程组 .... (103)
2.1. 引言 .... (103)
2.2 应力张量 .... (106)
2.3. 广义牛顿法则 —— 本构方程 .... (109)
2.4. 粘性热传导流体动力学方程组 .... (112)
2.5. 粘性热传导流体动力学方程组的数学结构 .... (114)
2.6. 一维粘性热传导流体动力学方程组 .... (120)
§3. 纳维 - 斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程组 .... (121)
§4. 激波 .... (125)
4.1. 间断连接条件 .... (125)
4.2. 熵条件 .... (130)
§5. 一维流体力学方程组的拉格朗日形式 .... (138)
5.1. 引言 .... (138)
5.2. 拉格朗日坐标 .... (138)
5.3. 一维理想流体力学方程组的拉格朗日形式 .... (141)

5.4. 一维粘性热传导流体力学方程组的拉格朗日形式 ……(143)
习题 ……(145)
参考文献 ……(147)
第三章　磁流体力学 ……(150)
§1. 等离子体 ……(150)
§2. 磁流体力学方程组 ……(152)
2.1. 考虑到导电媒质 (等离子体) 的运动对麦克斯韦方程组的修正 ……(153)
2.2. 考虑到电磁场的存在对流体力学方程组的修正 ……(155)
2.3. 磁流体力学方程组 ……(161)
2.4. 不可压缩情形的磁流体力学方程组 ……(163)
§3. 电导率 σ 为无穷时的磁流体力学方程组 ……(164)
3.1. 电导率 σ 为无穷时的磁流体力学方程组 ……(164)
3.2. 向量场过任一随流体运动的曲面的通量对时间的微分式及其应用 ……(165)
3.3. 磁场线 "冻结" 原理 ……(167)
§4. 磁流体力学方程组的数学结构 ……(169)
§5. 一维磁流体力学方程组 ……(174)
5.1. 一维磁流体力学方程组 ……(174)
5.2. 一维磁流体力学方程组的拉格朗日形式 ……(179)
习题 ……(180)
参考文献 ……(182)
第四章　反应流体力学 ……(183)
§1. 引言 ……(183)
§2. 反应流体力学方程组 ……(184)
2.1. 粘性热传导反应流体力学方程组 ……(184)
2.2. 反应流体力学方程组形式的化约 ……(186)
2.3. 混合气体的状态方程 ……(189)
2.4. 反应流体力学方程组的数学结构 ……(191)
§3. 一维反应流体力学方程组 ……(192)
3.1. 一维反应流体力学方程组 ……(192)
3.2. 一维反应流体力学方程组的拉格朗日形式 ……(194)

3.3. 一维反应流体力学方程组的数学结构 ....(194)
习题 ....(196)
参考文献 ....(196)
第五章　弹性力学 ....(197)
§1. 引言 ....(197)
§2. 变形的描述，应变张量 ....(199)
2.1. 变形梯度张量 ....(199)
2.2. 柯西 - 格林应变张量 ....(200)
2.3. 位移梯度张量与无穷小应变张量 ....(202)
§3. 守恒定律，应力张量 ....(205)
3.1. 质量守恒定律 ....(205)
3.2. 应力 ....(206)
3.3. 动量守恒定律的积分形式 ....(207)
3.4. 动量矩守恒定律的积分形式 ....(209)
3.5. 柯西应力张量 ....(209)
3.6. 在空间描述下动量守恒定律的微分形式，柯西应力张量的对称性 ...(212)
3.7. 彼奥拉 (Piola) 应力张量，物质描述下动量守恒定律的微分形式 ...(214)
§4. 本构方程 —— 应力与变形之间的关系 ....(218)
4.1. 本构关系的一般形式 ....(218)
4.2. 各向同性材料的本构方程 ....(222)
4.3. 贮能函数的例子 ....(226)
4.4. 线性弹性 —— 广义胡克定律 ....(229)
§5. 弹性动力学方程组及其数学结构 ....(233)
5.1. 线性弹性动力学方程组 ....(233)
5.2. 非线性弹性动力学方程组 ....(240)
5.3. 非线性弹性动力学方程组的一阶守恒律形式 ....(241)
5.4. 化弹性动力学方程组为一阶对称双曲组 ....(246)
5.5. 一维非线性弹性动力学方程 ....(250)
§6. 弹性静力学方程组的定解问题 ....(252)
6.1. 线性弹性静力学方程组 ....(253)
6.2. 非线性弹性静力学方程组 ....(256)
习题 ....(263)

参考文献 ......(264)
附录一　笛卡儿张量 ......(265)
1. 张量的定义 ......(265)
2. 张量的计算 ......(267)
3. 二阶对称张量的不变量 ......(270)
4. 各向同性张量 ......(272)
5. 张量的微分运算 ......(275)
附录二　热力学概述 ......(278)
1. 热力学研究的对象 ......(278)
2. 热力学第一定律，内能 ......(278)
3. 热力学第二定律，熵 ......(279)
4. 勒让德 (Legendre) 变换 ......(282)
5. 热力学函数 ......(285)
6. 内能与熵的表达式 ......(288)
索引 ......(291)

第一章　电动力学

§1. 引　　言

电动力学研究的对象是电磁场, 研究电磁场的基本属性 —— 运动规律及它和带电物质的相互作用.

电场和磁场开始是作为一种描述手段而引入的. 后来才逐步揭露了它的本质, 知道它也是物质的一种存在形式, 有其运动规律, 并可以和带电物质相互作用. 而且, 它也有能量及动量等物质运动的基本属性; 在和带电物质相互作用时, 其能量、动量可以互相转化.

要了解电磁场, 就是要知道电场强度 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ 和磁感强度 $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ 随空间位置 (x,y,z) 及时间 t 的变化情况, 即掌握函数 $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ 和 $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$. 有了它们就知道了电磁场的分布及变化规律, 就可以算出电磁场对带电物质的作用力 (由洛伦兹 (Lorentz) 公式表示), 也可以算出电磁场的能量与动量等.

电磁场的运动规律由场的运动方程, 即 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 所满足的一组偏微分方程 —— 称为麦克斯韦 (Maxwell) 方程组来描述. 根据问题的具体特点, 在一些给定的定解条件下求解麦克斯韦方程组, 就可以求得相应的 $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ 及 $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$, 从而确定所考察的电磁场, 并由此得到其一切特性. 像牛顿 (Newton) 力学中的 $F=ma$ 一样, 麦克斯韦方程组是电动力学中的基本方程, 是一切有关电磁场讨论的基础和出发点.

因此电动力学的内容, 粗略地概括起来为

(a) 根据电磁场的基本特性, 建立麦克斯韦方程组. 这是电动力学的基本方程及一般框架.

(b) 针对各种具体情况, 对麦克斯韦方程组作各种简化, 求得其解, 并进行相应的物理解释.

我们将重点放在 (a) 上, 对 (b) 中的内容仅有选择性地作一些讲解.

§2. 预备知识

对于建立麦克斯韦方程组所需要的预备知识，包括电场、磁场及电磁感应等有关内容，在此先作一些必要的回顾，并给出相应的数学形式，然后在下节中，将其有机地组合成所要求的麦克斯韦方程组.

2.1. 库仑 (Coulomb) 定律，静电场的散度与旋度

2.1.1. 库仑定律，电场强度

库仑定律是一个实验定律，是整个静电理论的基础. 其基本内容如下：设在真空中有两个带电量分别为 q 与 q_1 的静止点电荷. 记 $\boldsymbol{r}_1$ 为由点电荷 q_1 所在的位置到点电荷 q 所在的位置的向量 (矢径), 其距离 $r_1 = |\boldsymbol{r}_1|$, 则点电荷 q 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = k\frac{qq_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}, \tag{2.1}$$

其中 $k > 0$ 为常数，其大小与我们选用的单位有关. 本书采用国际单位制，此时力的单位为牛顿 (N), 距离的单位为米 (m), 电荷的单位为库仑 (C), 而

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{2.2}$$

其中 $\varepsilon_0 = 8.854\,19 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$ 为真空中的介电常量.

这里要注意的是，库仑定律成立的条件限于真空中静止的点电荷.

如果一个点电荷 q 同时受几个点电荷 q_i $(i = 1, \cdots, n)$ 的作用，则可以应用向量叠加方式得到 q 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{qq_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3},$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为点电荷 q_i 到 q 的矢径， $r_i = |\boldsymbol{r}_i|$.

类似地，如果一个点电荷 q 受到连续分布在空间区域 Ω 中的电荷的作用，而电荷分布的体积密度为 $\rho(x, y, z)$, 则由叠加原理， q 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{q\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V,$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为体积元 $\mathrm{d}V$ 到 q 的矢径，而 $r = |\boldsymbol{r}|$.

由库仑定律，电荷附近的空间有特殊的物理性质：在此空间中的电荷将受到力的作用. 具有这种性质的物理对象，称为 *电场*，它在数学上可用反映电荷受力作用的向量场来描述. 这里，电场是由于电荷的存在而产生的. 但今后可以看到，电场是物质存在的一种形式，它可以离开电荷而独立存在 (例如，变化的磁场产生电场). 由静止电荷产生的电场称为 *静电场*.

在电场中不同地点，电荷所受的力是不相同的. 为了描述电荷在电场中各点的受力情况，用一个静止的单位正点电荷 (试验电荷) 在该点所受的力来衡量电场在该点的强度，称为 *电场强度*，记为 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$. 在静电场的情况，它只是 (x,y,z) 的函数. 对于随时间 t 变化的电场，电场强度可以同样定义，这时它就也是 t 的函数了. 但对于变化的电场而言，为定义电场强度，试验电荷仍必须是静止的.

由库仑定律，静止的点电荷 q 在强度为 $\boldsymbol{E}$ 的电场中所受的力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}. \tag{2.3}$$

在实际测定电场强度时，要注意试验电荷的引进不致于对原先的电场造成大的改变. 因此，不一定用单位正点电荷作试验电荷，而可以用一个小的点电荷 q，由 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{F}/q$ 来确定电场强度 $\boldsymbol{E}$.

由 (2.1)—(2.2) 知，点电荷 q_1 产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}, \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1$ 为以 q_1 为心的矢径；类似地，若干个点电荷 q_i $(i=1,\cdots,n)$ 产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\boldsymbol{r}_i}{r_i^3}; \tag{2.5}$$

而体积密度为 ρ 、在 Ω 中连续分布的电荷产生的电场的强度为

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Omega}\frac{\rho(P')\boldsymbol{r}_{P'P}}{r_{P'P}^3}\mathrm{d}V_{P'}, \tag{2.6}$$

其中 $P:(x,y,z)$, $P':(x',y',z')$, $\boldsymbol{r}_{P'P}=\overrightarrow{P'P}=(x-x',y-y',z-z')$, $\mathrm{d}V_{P'}=\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$.

以上公式，只适用于由静电荷产生的电场.

2.1.2. 高斯 (Gauss) 定理

首先引进 电通量 的概念.

有了电场强度 $\boldsymbol{E}$, 就可以定义 电场线. 电场线是向量场 $\boldsymbol{E}$ 的积分曲线，即处处与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 方向相切的曲线，它满足

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x}=\frac{\mathrm{d}y}{E_y}=\frac{\mathrm{d}z}{E_z}, \tag{2.7}$$

并用 $\boldsymbol{E}$ 的方向给出其定向. 电场线应该充满整个空间. 但为了用电场线来显示电场的强弱分布情况，习惯上规定：电场强度大的地方，电场线密集；电场强度小的地方，电场线稀疏. 为此，规定在电场中一点，沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过一垂直于 $\boldsymbol{E}$ 方向的单位曲面元的电场线数目为 $\pm|\boldsymbol{E}|=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为该曲面元的单位法向量，而 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的内积 (数量积). 若 $\boldsymbol{n}$ 的方向与 $\boldsymbol{E}$ 一致，上式取正号； $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 反向时，取负号. 这样，对一般的曲面微元 $\mathrm{d}S$, 设其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则其上沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过的电场线数目为 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, 这称为沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过 $\mathrm{d}S$ 的 电通量. 从而，沿法线 $\boldsymbol{n}$ 方向通过任意给定曲面 S 的电通量应为 $\int_S\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, 其中 $\mathrm{d}S$ 为 S 上的面积微元. 由以上定义知，电通量实际上就是向量场 $\boldsymbol{E}$ 通过相应曲面的流量.

高斯定理 *在静电场中，通过任一封闭曲面 Γ 向外的电通量，等于此曲面内部所包含的电荷的代数和除以 ε_0.*

由高斯定理，若 Γ 内部为点电荷，其电量的代数和为 Q, 则

$$\int_\Gamma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}Q; \tag{2.8}$$

若 Γ 内部是体积密度为 ρ 的连续分布的电荷，则

$$\int_\Gamma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega\rho\mathrm{d}V, \tag{2.9}$$

其中 Ω 为 Γ 所围区域， $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 的单位外法线向量.

高斯定理的证明 由叠加原理，只需对 Γ 内为单位正点电荷的情形予以证明，且不妨取此点电荷所在点为原点. 此时，由 (2.5) 式，电

场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{2.10}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. 因此

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta\mathrm{d}S,$$

其中 θ 为 $\mathrm{d}S$ 的单位外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角. 不难看出

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}S$$

是 $\mathrm{d}S$ 对原点所张的立体角, 其取正值或负值视 θ 为锐角或钝角而定. 由于封闭曲面对其内部任一点的立体角均为 4π, 故

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Gamma \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

定理证毕.

这样, 通过一封闭曲面的电通量只与其内部所含电荷的总量有关, 与电荷的分布无关, 也与外界的电荷无关！

(2.9) 式是高斯定理的积分形式. 现在我们来讨论其微分形式. 利用格林 (Green) 公式

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{E}\mathrm{d}V, \tag{2.11}$$

由 (2.9) 式得到

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega \rho\mathrm{d}V.$$

上式应对电场中的任何区域 Ω 均成立, 由此得到高斯定理的微分形式为

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.12}$$

这是在电荷连续分布情形的高斯定理.

对于点电荷的情形, 利用 δ- 函数, 也可将 (2.8) 式写为 (2.12) 的形式. 为简单计, 不妨设只有一个点电荷 Q 位于原点, 其电荷密度函数可写为 $Q\delta(x, y, z)$, 此时由 (2.8) 与 (2.11) 式, 仍有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q\delta(x, y, z). \tag{2.13}$$

这是高斯定理在点电荷情形的微分形式.

由 (2.12)—(2.13) 式可知，*静电场是有源场*, 而电荷是其源. 每个单位正电荷发出 $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ 的电通量, 而单位负电荷则敛入 $\dfrac{1}{\varepsilon_0}$ 的电通量. 下面将看到，这是静电场与静磁场，也是一般电场与磁场的一个重要区别.

下面说明静电场是无旋的. 首先证明，对静电场中任一封闭曲线 l, 成立

$$\int_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0. \tag{2.14}$$

上式说明，静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任一封闭曲线 l 的环量为零，即静电场沿任一封闭环路所作的功为零. 像前面那样，我们也只要对由在原点处的单位正点电荷形成的静电场来证明 (2.14) 式. 此时电场强度 $\boldsymbol{E}$ 由 (2.10) 式给出，故

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

而 $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\mathrm{d}(r^2)=r\mathrm{d}r$, 所以

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_l \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)=0,$$

从而 (2.14) 式成立.

下面讨论 (2.14) 式的微分形式. 由斯托克斯 (Stokes) 公式，(2.14) 可写为

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,$$

其中 S 为任一以 l 为边缘的曲面. 由 l 与 S 的任意性，由上式立即得出

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, \tag{2.15}$$

因此 *静电场是无旋场*.

现在，利用静电场的无旋性，引进静电场的势的概念. 因向量场 $\boldsymbol{E}$ 无旋，因而存在一个标量函数 $\phi(x,y,z)$ 使

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi, \tag{2.16}$$

这里 ϕ (可以相差一个任意常数) 称为 *静电场的势* (参见本章 §6, 引理 6.2). (2.16) 式的右端取负号是为使电场强度指向电势降低的方向.