三级跳丛书

高三数学

发散思维训练
综合能力立意
最新同步习题
三级层次跃进

北京考试题库研究中心
北京教育出版社

三级跳

高三数学

北京考试题库研究中心

北京教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

三级跳丛书．高三数学／北京考试题库研究中心编著．北京：北京教育出版社，1999.12
ISBN 7-5303-2002-5

Ⅰ．三… Ⅱ．北… Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 52663 号

三级跳丛书
高三数学
GAOSAN SHUXUE
北京考试题库研究中心
*
北 京 教 育 出 版 社 出 版
（北京北三环中路 6 号）
邮政编码：100011
北京出版社出版集团总发行
新 华 书 店 经 销
北京市朝阳展望印刷厂印刷
*
850×1168 毫米 32 开本 10.375 印张 200 000 字
2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷
印数 1-10 000

ISBN 7-5303-2002-5
G·1976 定价：12.00 元

《三级跳丛书》

主　编　单　位：北京考试题库研究中心
　　　　　　　　北京教育出版社
语文学科主编：高石曾
数学学科主编：傅敬良
英语学科主编：李俊和（高中部分）
　　　　　　　李　黎（初中部分）
物理学科主编：樊　福
化学学科主编：王美文
本　册　编　者：吴铁庆
　　　　　　　邹　斌
　　　　　　　吕晓琳
　　　　　　　傅　娟
　　　　　　　白　雪
　　　　　　　傅敬良

前　言

为了减轻学生课业负担，加强素质教育，注重能力培养，体现新世纪教育要求，适应应试教育向素质教育转轨的新形势，我们特邀北京考试题库研究中心的专家精心为大家编写了《三级跳丛书》。

这套丛书按年级编写，每年级一科一本，共包括语文、数学、英语、物理、化学五科。它特点鲜明、容量精当、适应教改要求，是最新推出的换代产品。

符合学生实际 本书的编写以教育部的最新教学大纲为依据，与课本配套；以章（单元）为序，理科同步到节，文科同步到课。在内容设置上包含例题精解和能力训练三级跳两大部分，讲练结合、层层提高。所有例题均经专家们反复筛选后确定，标准化程度高，科学性强；每道例题均安排了思路分析与讲解、说明，逐一为广大学生指明了各类题目的解题要领，重在把学习方法教给你。

训练方法先进 本书在“能力训练三级跳”中采用阶梯跃进的方法，分为能力训练一级跳、能力训练二级跳、能力训练三级跳三个层次，由浅入深、由易到难，不但可以满足不同学生的实际需要，而且可以避免滑落题海，无功而返。三级跳这一阶梯跃进训练法，既是为了适应教学

要求设定的不同标准，又是为了方便学生根据自己的能力加强主动学习的积极性。

突出能力立意 针对教育改革特别是考试改革的要求，本书在编写中特别注重突出能力立意的特点，通过“能力训练三级跳”的形式，以综合性、应用性的能力训练为主，从多角度、多侧面、多情境、多层次等不同方面展开训练，不但可以综合考察自己的知识能力应用水平，而且可以有效地帮助你灵活掌握学习方法和规律。

参考答案详细 本书的又一个特点是参考答案详细。过去学生经常发愁的是，做了题却不知究竟对不对，即便答案相符，也对解题思路一知半解，很难获得真正的收获。本书则有别于以往的教学辅导书，在参考答案上力求详尽提示，讲明步骤，准确无误，不仅要让你学会，还要帮助你会学。

为使本书能更好地为读者服务，在每本书的后面，我们均安排了意见反馈表，并特别设置了如下奖励措施：凡是发现书内差错5个以上的，我们将奖励您下一年级同科目书一册（高三学生奖励当年《十月》杂志一册），并在此书再版时，您将作为本书特聘监督员登录在册，希望读者积极参与（注：相同差错的取前20名）。由于时间紧，水平有限，书中难免会有不足之处，恳请读者批评指正。

目 录

第一章

排列、组合、二项式定理

第一单元　排列、组合

例题精解

例 1　书架上放有若干本课外参考书，其中不同的语文书 5 本，不同的数学书 4 本，不同的英语书 3 本，现从书架上取书.

(1) 若从这些参考书中取一本书，有多少种不同的取法？ C_{12}^1

(2) 若从语文、数学、英语参考书中各取一本书，有多少种不同的取法？ $C_5^1C_4^1C_3^1$

(3) 若从这些参考书中取两本不同学科的参考书，有多少种不同的取法？ $C_5^1C_4^1C_3^1\cdot P_2^2C_3^2$　5.4.3　3=20·5=11

分析　(1) 要完成的事是“取一本参考书”，由于不论取哪一学科的参考书都完成了这件事，因此是分类问题，应用加法原理.

(2) 要完成的事是“取语文、数学、英语书各一本”，因此取一种学科的一本书只完成了这件事的一个步骤，只有几种学科的书都取定后才完成这件事. 因此是分步问题，应用乘法原理.

(3) 要完成的事是“取两本不同学科的书”，因此要分情况考虑，分为三类，即取语文和数学书各一本、取数学和英语书各一本、取语文和英语书各一本. 而每一类又分两个步骤去完成，用乘

法原理．各类取法种数求出后，再根据加法原理求出完成这件事总的取法种数．

解 (1) 有 $5+4+3=12$（种）；

(2) 有 $5\times4\times3=60$（种）；

(3) 有 $5\times4+4\times3+5\times3=47$（种）．

小结 应用加法原理和乘法原理解题时，首先要搞清楚完成的是什么事，其次再考虑是分类问题还是分步问题．分类要注意不重、不漏；分步要注意步骤要完整无缺．

例 2 证明下列恒等式：

(1) $P_1^1+2P_2^2+3P_3^3+\cdots+nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-1$；

(2) $C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{n-2}^m+C_{n-1}^m=C_n^{m+1}$．

分析 (1) 等式左边利用 $nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-P_n^n$ 裂项求和．

(2) 等式左边利用 $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$ 并项求和．

解 (1) $\because$ $nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-P_n^n$，

$\therefore$ $P_1^1+2P_2^2+3P_3^3+\cdots+nP_n^n$

$=(P_2^2-P_1^1)+(P_3^3-P_2^2)+(P_4^4-P_3^3)+\cdots+(P_{n+1}^{n+1}-P_n^n)$

$=P_{n+1}^{n+1}-P_1^1=P_{n+1}^{n+1}-1$．

$\therefore$ 左边＝右边．

(2) $\because$ $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$，

$\therefore$ $C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{n-2}^m+C_{n-1}^m$

$=C_{m+1}^{m+1}+C_{m+1}^m+\cdots+C_{n-2}^m+C_{n-1}^m$

$=C_{m+2}^{m+1}+C_{m+2}^m+\cdots+C_{n-2}^m+C_{n-1}^m$

$=C_{n-1}^{m+1}+C_{n-1}^m=C_n^{m+1}$．

$\therefore$ 左边＝右边．

例 3 解方程或不等式：

(1) $3P_x^3=2P_{x+1}^2+6P_x^2$；　　(2) $2C_{x+1}^{x-2}<3C_{x+1}^{x-1}$.

分析　解此类方程或不等式，关键是利用排列数公式和组合数公式进行转化.

解　(1) 原方程化为

$3x(x-1)(x-2)=2(x+1)x+6x(x-1)$.

$\because\ x\geqslant 3, \therefore\ 3(x-1)(x-2)=2(x+1)+6(x-1)$.

即 $3x^2-17x+10=0$，解得 $x=5$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$（舍去）.

$\therefore$ 原方程解为 $x=5$.

(2) 原不等式化为 $2C_{x+1}^3<3C_{x+1}^2$，

即 $2\times\dfrac{(x+1)x(x-1)}{1\times2\times3}<3\times\dfrac{(x+1)x}{1\times2}$.

$\because\ x+1\geqslant 3, x\geqslant 2, (x+1)x>0$,

$\therefore\ \dfrac{x-1}{3}<\dfrac{3}{2}, x<\dfrac{11}{2}$.

$\because\ 2\leqslant x<\dfrac{11}{2}$　且　$x\in N$,

$\therefore$ 原不等式解集为$\{2,3,4,5\}$.

小结　在解有关排列数、组合数的方程或不等式时，必须注意 P_n^m 或 C_n^m 中的 n 为自然数，m 为非负整数且 $m\leqslant n$. 因此求出方程或不等式的解后要检验，把不合题意的解舍去.

例 4　由 0、1、2、3、4 组成没有重复数字的自然数.

(1) 能组成多少个四位数？

(2) 能组成多少个能被 5 整除的四位数？

(3) 能组成多少个四位数的偶数？

(4) 能组成多少个比 2103 大的四位数？

分析　(1) 四位数是从这五个数字取出四个数字组成的. 因为 0 作为千位数字时不是四位数，所以对于确定千位的数字要加以

限制．用直接法可分为两步，第一步确定千位数字有 P_4^1 种方法；第二步确定百、十、个位数字有 P_4^3 种方法，共有 $P_4^1P_4^3=96$ 个四位数．用间接法可求出从这五个数字中取出四个数字的排列个数，再减去 0 在千位时的排列个数，共有 $P_5^4-P_4^3=96$ 个四位数．

（2）因为只有个位数字为 0 时的四位数才能被 5 整除，因此共有 $P_1^1P_4^3=24$ 个能被 5 整除的四位数．

（3）直接法可分两类，即 2 或 4 在个位和 0 在个位两类，间接法可用所有的由这五个数字组成的四位数的个数减去其中所有奇数的个数．

（4）要分类去考虑．第一类 3 或 4 在千位，有 $P_2^1P_4^3=48$ 个；第二类 2 在千位、3 或 4 在百位，有 $P_2^1P_3^2=12$ 个；第三类 2 和 1 分别在千位和百位、3 或 4 在十位，有 $P_2^1P_2^1=4$ 个；第四类只有 2104 这个数．共有 $P_2^1P_4^3+P_2^1P_3^2+P_2^1P_2^1+1=48+12+4+1=65$ 个．

解 （1）直接法：$P_4^1P_4^3=96$（个）；间接法：$P_5^4-P_4^3=120-24=96$（个）．

（2）$P_1^1P_4^3=24$（个）．

（3）直接法：$P_2^1P_3^1P_3^2+P_4^3=36+24=60$（个）；间接法：$P_4^1P_4^3-P_2^1P_3^1P_3^2=96-36=60$（个）．

（4）$P_2^1P_4^3+P_2^1P_3^2+P_2^1P_2^1+1=48+12+4+1=65$（个）．

答：（1）有 96 个；（2）有 24 个；（3）有 60 个；（4）有 65 个．

小结 组数问题是排列问题，注意对于特殊元素和特殊位置的限制条件，如数 0 不能排在首位．由于这种限制条件，我们无论从分类还是分步解决问题时，就首先要从特殊元素或特殊位置入手．另外，直接法和间接法是解题常用的两种途径．

例 5 有 6 人排队照相留念．

(1) 若分成两排照相，前排 2 人，后排 4 人，有多少种不同的排法?

(2) 若排成一排照相，甲、乙两人必须排在一起，有多少种不同的排法?

(3) 若排成一排照相，甲、乙两人不能相邻，有多少种不同的排法?

(4) 若排成一排照相，甲、乙、丙 3 人按甲在左、乙在中、丙在右的一定顺序，有多少种不同的排法?

(5) 若排成一排照相，甲不在左端且乙不在右端，有多少种不同的排法?

分析　(1) 可分两步，第一步确定前排的排法有 P_6^2 种；第二步确定后排的排法有 P_4^4 种，由乘法原理共有 $P_6^2P_4^4=P_6^6=720$ 种排法. 排成两排实际上与排成一排一样，只不过是把第 3～6 个位子看成第二排而已，即有 P_6^6 种不同排法.

(2) 采用"捆绑法"，即先把甲、乙两人"捆绑"在一起看成一个人，这样和其他 4 个人一起排，有 P_5^5 种排法. 然后甲、乙两人再排，有 P_2^2 种排法，应用乘法原理，共有 $P_5^5P_2^2$ 种不同排法.

(3) 采用"插空法"，先把其余 4 人排好，有 P_4^4 种排法，这样在这 4 人两边及每两人之间共有 5 个空位，然后甲、乙两人在这 5 个空位中选 2 个去排，共有 $P_4^4P_5^2=480$ 种不同排法.

(4) 先选 3 个位子把甲、乙、丙按左、中、右的顺序排好，有 C_6^3 种排法，然后其余 3 人在其他 3 个位子排好，有 P_3^3 种方法，共有 $C_6^3P_3^3=120$ 种不同排法.

(5) 可用间接法，6 人全排列有 P_6^6 种排法，要减去甲在左端或乙在右端的排法数，但要注意不重不漏，因此共有 $P_6^6-2P_5^5+P_4^4=504$ 种不同排法.

解　(1) $P_6^6=720$ (种).　　(2) $P_5^5P_2^2=240$ (种).

(3) $P_4^4P_5^2=480$（种）.　　(4) $C_6^3P_3^3=120$（种）.

(5) $P_6^6-2P_5^5+P_4^4=504$（种）.

答：(1) 有 720 种不同排法；(2) 有 240 种不同排法；(3) 有 480 种不同排法；(4) 有 120 种不同排法；(5) 有 504 种不同排法.

小结　(1) 对于排队问题，无论分成几排都可按排成一排的情况处理.

(2) 对于相邻问题，采用“捆绑法”解决.

(3) 对于不相邻问题，采用“插空法”解决，也可用间接法，即 6 人全排列的排法数减去甲、乙二人相邻的排法数.

(4) 对于顺序一定问题，先确定顺序一定的元素的位置，其排法数是一个组合数，再把其他元素在其余位置排列. 也可这样考虑，6 个人进行全排列，当其余 3 人位置确定后的排列数为甲、乙、丙 3 人全排列数 P_3^3，而这 P_3^3 个排列对应一个甲、乙、丙顺序一定的排列，因此在 6 人所有排列中共有 $P_6^6/P_3^3=C_6^3P_3^3$ 种排法.

(5) 对于第(5)小题也可采用直接法，要分为 3 类. 第一类甲、乙都不在两端，有 $P_4^2P_4^4$ 种排法；第二类甲、乙只有一人在两端，有 $2P_4^1P_4^4$ 种排法；第三类甲在右端且乙在左端，有 P_4^4 种不同排法. 共有 $P_4^2P_4^4+2P_4^1P_4^4+P_4^4=288+192+24=504$ 种排法.

例 6　由 A、B 两人在内的 50 人中推选 3 名代表参加一个会议.

(1) 若 A、B 两人是当然代表，有多少种不同的选法?

(2) 若 A、B 两人有且只有一人作为代表，有多少种不同的选法?

(3) 若 A、B 两人至少有一个是代表，有多少种不同的选法?

(4) 若 A、B 两人都不是代表，有多少种不同的选法?

分析　(1) 因 A、B 两人已确定为代表，所以从其余 48 人

中选 1 人为代表即可，有 C_{48}^1种选法.

(2) 先从 A、B 两人中确定 1 人为代表，有 C_2^1 种选法，再从其余 48 人中确定 2 人为代表，有 C_{48}^2种选法，因为是分步问题，所以共有 $C_2^1C_{48}^2$种选法.

(3) 可以分为第(1)题和第(2)题两类情况，因为是分类问题，所以用加法原理.

(4) 此题实际上是在除 A、B 两人外的其余 48 人中选 3 人为代表，有 C_{48}^3种选法.

解 (1) $C_{48}^1=48$（种）.

(2) $C_2^1C_{48}^2=48\times47=2256$（种）.

(3) $C_2^2C_{48}^1+C_2^1C_{48}^2=48+2256=2304$（种）.

(4) $C_{48}^3=17296$（种）.

答：(1) 有 48 种不同的选法；(2) 有 2256 种不同的选法；(3) 有 2304 种不同的选法；(4) 有 17296 种不同的选法.

小结 选代表问题和产品抽样问题属于同一个数学模型，50 人可看作 50 件产品，A、B 两人可看作 2 件次品，从 50 人选 3 名代表可看作从 50 件产品中抽取 3 件产品. 第(3)小题也可用间接法来求，有 $C_{50}^3-C_{48}^3=19600-17296=2304$ 种不同的选法.

例 7 有 6 本不同的书.

(1) 平均分成 3 堆，每堆 2 本，有________种不同分法；分成 3 堆，一堆 1 本、一堆 2 本、一堆 3 本，有________种不同分法；分成 3 堆，一堆 4 本、另两堆每堆各 1 本，有________种不同分法.

(2) 平均分给 3 人，每人 2 本，有________种不同分法；分给 3 人，一人 1 本、一人 2 本、一人 3 本，有________种不同的分法；分给 3 人，一人 4 本、另两人各 2 本，有________种不同分