科學譯叢

天體力學中的n體問題與天體演化學

希爾米 著

中國科學院出版

科 學 譯 叢

——天文學與天體物理學：第1册——

天體力學中的n體問題與天體演化學

希爾米 (Г. Ф. Хильми) 著

董金柱 譯

戴文賽 校

中國科學院出版

1953年9月

內 容 提 要

本書除緒論外，包含六章．在第一章內重述了對於 n 體問題有用的動力學方程、積分和一些不等式．在第二章內作者用集合論的方法討論動力學裏的幾個問題，特別是關於由 n 個引力物體組成的動力系統的運動的問題．在第三章裏討論能量常數不同時的各種運動形式和全穩定運動及半穩定運動的條件，然後討論引力物體系統裏穩定次系的產生問題，並詳細分析施密特院士用數字積分法所算出的三體問題中俘獲的例子．第四章討論當初始條件非力學起源時 n 體系統的幾種運動．第五章討論大數目的小引力物體所組成的穩定系統在非彈性碰撞的情況下的演化問題，證明了小質點結合爲大物體的傾向是存在的，如果在這個過程中系統的動能有相當大的損失，則由結合而成的物體將具有正向的自轉．第六章討論引力物體系統的動力學和演化學裏的一些一般性的和哲學的問題，並且和行星系演化學的問題聯繫起來．

序

天體演化的問題是自然科學中具有哲學意義的最主要關鍵問題的一個，並且對於一系列的科學：天文、地球物理、地質及地球化學都很重要．唯物主義和唯心主義的一個鬥爭前綫就在天體演化學上面．因此，在我們的國家裏人民廣泛地，像其他各種科學的代表人物一樣，對它有着很大的興趣．以辯證唯物論的哲學武裝起來的蘇聯學者們成功地研究着天體演化學的問題，並且在我們的國家裏這個科學已經提高到了嚴格的物理-數學科學的水平．然而，天體演化學中的特殊問題理論的思考提出了新的問題，其解決用普通的力學的及理論物理的方法已經不够，而是要求其更進一步的發展．

Г. Ф. 希爾米的書陳述天體演化學的基本的理論問題之一，就是按照牛頓定律互相吸引的 n 個物體所成的系統的演化問題．Г. Ф. 希爾米把這問題考慮爲系統的完全或部分分散（散逸）及，相反的，穩定子系統的形成，而且作者在一系列的情形中把定理引證到很多適宜於具體應用的數值鑑定上來．作者正確地聯繫了物體系統的演化與關於"排斥"及"吸引"在廣義上的問題之哲學敘述．

特別有價值的是，與通常的力學工作不同，作者强調了純粹的力學方法在眞實世界上應用的局限性，並且謹愼地觀察力學

在所研究的現象上的應用的界限.作者——在一系列的情形中都是第一次的——建立了:很多存在的規律性,例如在我們的行星系統中的,原則上不能只用一些力學因素來解釋淸楚.引入了一部份動能轉變成熱能的非彈性碰撞的考慮,作者第一個發現了對此更普遍的演化情形的一系列嚴格地證明了的重要定理.

作者的精緻而且很普遍的定理在廣泛種類的現象上投下了光明.作者爲了得到優良的結果,用了獨特的數學方法,此方法的基礎首先是現代的微分方程定性理論,不過也引用了其他的方法,從集合論的觀點,一直到建立了對動力學很重要的具體不等式,也應用了數值積分法.

當然,閱讀 Г. Ф. 希爾米的書要求相當的數學程度,但是這本書却顯示了:當很一般的數學方法在正確的哲學意向的領導下應用到自然界實際對象時,對於求得知識是有如何巨大的力量.

Г. Ф. 希爾米的書不只對天體演化學,是一個很大的貢獻,對天體力學和數學也是不平凡的補充.對有興趣於與其本門科學與數學及天體力學有關部份的理論物理學家們,這本書也表現了很大的趣味.對於天體演化學方面的工作者,出現了 Г. Ф. 希爾米的書是理論武裝的增强.

院士 О. 施密特.

目　次

緒　論

1. 這本不太大的專論研究的對象乃是動力學中的一些普遍問題和在牛頓定律下互相吸引的 n 個質點的演化.這些問題是數理科學中古典的問題,其研究主要是用物理統計的方法.但關於物理統計方法在許多引力物體問題上的應用範圍,至今尚未搞清楚.我們想用天體力學的方法及動力系統的一般理論來考慮 n 個引力物體的運動問題,集中注意力於一些有或可能有天體演化學意義的問題,特別是關於太陽系的產生的隕星假設或微星假設.雖然大部分的結果在這個範圍之外也有意義,不過在範圍內發生的問題是這個研究的主要刺激.行星系統的演化不只受着引力的制約而且和它有最密切的連繫,引力在演化中的地位正是所要研究的.所有宇宙系統的物理及化學的演化和力學系統相似,都與其發展的背景有關.更重要的是把這些事實和物理及力學的因素連繫起來,這些因素在系統的發展不同的演化階段上的特殊地位不能够先驗地解决;其解决與系統的物理演化速率、成分以及力學系統全面的發展速率有關係.通過引力物體的系統不可能回答所有這些問題.

2. 在動力學中 n 個引力點在質點的性質上可以當做眞實的物體:恆星、行星、流星塵物質點或其他物體.無論如何,只在衆所週知的範圍內才許用質點來替代眞實的物體.如果所考慮的

物體的綫性大小比它們相互間的距離小得多的話，就可以把這些物體看做物質點，互相吸引着，各質點的位置就是物體的質量中心，質量就是物體的質量．如果這些物體的形狀都和圓球相近，則這樣假設就近似於眞實的景象．因此只在物體間距離不變小，也即把物體理想化成物質點還是合法的一段時間內，質點動力學定律才能够滿意地描述實在物體的運動．

此外，當眞實的物體足够接近時就產生各種類型的物理現象，通常有能量從一種形式到另一種形式的轉換相伴而生，特別是從力學的轉變到非力學的．這些效應對物體的運動可以有很重要的影響，只在比較不常見的情況下，才能在質點動力系統範圍內計算出來．當各物體的重心相當緊密地接近時，碰撞就要發生，在這一瞬間運動速度的方向就得改變．如果碰撞是非彈性的，動能就減少了，一部分化爲熱能．另外，在碰撞以後，看現象的實際情況如何，碰撞的物體可以合成爲一個單獨的物體或者分成好幾部份．在這種情況下不只能量有轉換，質點的數目也改變了．

然而，不要認爲類似的情形不能用質點系統的動力學方法去研究．實際上，我們要考慮眞實物體在相當短的時間內接近的情形，在這短時間內我們可以忽略由於近距離物體吸引與質點吸引的不同所引起的各種效果．此外，設相互作用的物體距離小時所生的物理現象的後果可當爲初始條件的改變，和相伴隨的物體的量的改變．在這情形中眞實物體的運動可看爲某時刻及按照所定的規則發生的初始條件改換和運動點數目的改變的質點系統的運動．

我們從下列兩種質點的動力系統的形式着手：

1）"固定的"系統形式；有不變的初始條件及不變的質點數目.

2）"變化的"系統形式；按照一定的定律發生初始條件的間斷變化，隨之發生質點數目的改變.

3. 只當物體中間相互的距離不小於某給定的界限的一段時間內用"固定的"系統形式定義質點的位置及速度才是正確的. 考慮對所有的實值 t 用"固定的"系統形式的情形；此時在引力物體動力學的基礎上，原則上可以確定在過去及將來所有的時間內物體的位置及速度. 在這個情形，如果演化只在引力的影響下，即只和力學因素有關，來進行的話，我們就可以確定物體系統的演化. 雖然在個別的階段及某限定時間內力學因素最重要，可是實際上物質的演化絕不能單用力學因素來决定. 然而，在所有天體演化學問題的研究中把只在力學因素——如果它們眞地參加所給的過程的話——的基礎上演化的可能性搞清楚還是必要的. 不然，則正確地解决在個別具體的宇宙現象中關於力學的和非力學的因素的關係問題是不可能的. 此處須引恩格斯所說的話："一切運動都和某種位移有關係，如天體、地球上的物體、分子、原子，或以太微粒的位移. 運動的形態愈高，此種位移就不顯著. 移動不能包盡某種運動的性質，但是它與後者是不能分開的. 因此我們必須首先來研究它."[1]（見自然辯證法，"運動的基本形式"一節——譯者註）. 現在轉到一個問題上來：在"固定的"系統形式中什麽樣的問題具有或可能具有天體演化學的價值.

1） Ф. Энгельс: Диалектика природы, стр. 44, 1950.

設有 n 個引力物體 $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_{n-1}$. 考慮此系統的形式地想像的運動，而暫時不管實現它所需的條件.對所有時間的值 t (即對所有過去和將來)，可能發生一種情況，即所有的質點總保留在以其系統的質量中心為中心以一相當大的 R 為半徑的圓球內.這樣的系統稱為穩定的系統.穩定系統的研究在天體力學中是一個最重要的問題. 然而穩定系統的力學演化中沒有任何方向，因此這種情形的研究沒有天體演化學的價值.

相反的，不穩定系統的研究在天體演化學上面却有重要價值.

從新考慮 n 個引力物體 $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_{n-1}$, 且令 r_{ij} 表物體 P_i 與 P_j 間的距離.如果所有的距離滿足條件

當 $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ 時 $\gamma_{ij}(t)\to+\infty$, 我們就說這些物體的運動是完全不穩定的.

如果可指出一數 R, 使對任一時刻 $t\geqslant 0$ $(t\leqslant 0)$ 至少有一距離 r_{ij} 適合

$$r_{ij}(t)<R,$$

包括在不同時間內適合這個要求的乃是不同物體間的距離的情形，我們說物體 $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_{n-1}$ 的運動當 $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ 時是半穩定的. 我們特別關心的半穩定的運動是物體系統有穩定子系統的情形.

從哲學觀點看來很重要而且是具體的天體演化學說中本質上的問題之一是關於當 $t\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ 時完全不穩定系統與當 $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ 時半穩定系統的結合所支配的運動之可能性；特別有興趣的是當其在 $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ 時有穩定子

系統的情形.這些情形的實現就意味着在引力的影響下,下面的現象是可能的:

1) 在過去物體的距離接近時可能產生穩定的子系統;

2) 過去具有穩定部份的系統的完全逸散是可能的.

在三體問題這種特別情形中，這就是關於俘獲和逃脫的問題．在法國學者沙集 (J. Chazy) 的衆所週知的而不嚴格的研究和對一般的動力學定理的不正確解釋的基礎上所得到的關於俘獲不可能性之論斷，阻礙了天體力學中關於俘獲問題和物體的引力結合的可能性這個更一般性問題的發展．這個不正確的推測先在 1947 年由 О. Ю. 施密特,後來在 1948 年由作者所否定.

4. 設在 n 個眞實的引力物體的初始狀態上可形式地應用在全部時間軸上的"固定的"系統形式.由此初始狀態可能導出這個系終形式的有限的合乎事實的實用性.這個事實將在如此情形中發生,即當採取了已給的初始狀態及決定了運動以後,我們發現,在過去,即在集合 $t\leqslant 0$ 上某些或全部物體間的距離的最大下界等於零.事實上,這個情形中,無論物體的大小如何,在相當久的過去不可避免地有物體相互接近,此時其動態不能只歸根於純粹的動力學定律而有物理過程參預了.在這些情形中,藉助動力學定律說明系統的狀態,只在這樣一段時間間隔之內才可能,即沒有任一個相互距離會取很小的値,致使物體不能再理想化成爲只有引力相互作用的質點.這樣就可以對問題的力學考慮建立一些界限.相類的界限在過去的存在通常是由下列條件制約的,即在一定的時刻在某一非力學系統中所考慮的物質的綜合中,所採取的形式使我們能把它看做物質點的系統.然而

無論其相類情況的原因如何，在這樣的情形我們即稱所給的系統的初始條件為非力學的起源.

以上所述可應用到太陽系.不瞭解力學由其特有原則所導出的的界限，這就是很多具有過渡的力學特性的許多古典的行星起源假說中一系列不可彌補的困難的來源.

在一些特別情形中可以由質點動力系統的"變化的"形式的幫助來研究運動物體緊密地接近時所發生的物理過程的影響.在一般的情形就不這樣，用起源的及過去的系統之分析，具有所考慮類型之初始條件的系統之發生應該建立在天體演化學的基礎上.

在研究要求非力學起源的初始條件之運動問題中，包含着關於現在與過去的連繫之問題的幾個方面. 這個問題有天體演化學的意義，我們將略進一步探討此問題.

5. 由行星系統起源的隕星(微星)假說所引起的最重要的力學問題之一乃是關於在引力和質點在非彈性碰撞時所產生之衝力的影響下發生很大數目的剛體質點的運動問題. 碰撞的非彈性特徵是在二個或多個物體的接觸時刻，該系統的動能減少，一部份轉化為熱能.

每當一部份質點和其他一部份碰撞時，該運動系統的初始條件就立刻發生改變. 這個初始條件的改變就是那些接觸時產生的物理現象的力學效果. 由於質點在碰撞時的相對速度大小的不同，碰撞的質點可能保持原來的數目，但也可能有某些質點合而為一或碰碎為多個更小的質點.在這種現象的出現下，我們不可避免地得到了系統的不可逆的及有方向的變化. 用這個過

程的規律的分析可以說明流星塵物質團演化的某幾方面，按隕星假說，這物質羣是太陽系的行星前階段．我們提出下列這些和天體演化學最有重要關係的問題：

1）如果很大數目的引力物體系統總留在空間中一有限部份（即穩定的）或者即使分散也很慢，而且其中有物體的部份非彈性碰撞，則此系統的演化的一般規律爲何；

2）如果同一系統有很大的動量矩，則在此情形下演化有何特性．

顯然，只能够利用質點系統動力學的"變化的"形式來研究這些問題．我們更進一步考慮這些很一般形式的問題．

6. 把問題叙述了以後，讓我們把在不同程度上闡明該問題的各章內容做一個簡短的概述．

在第一章我們提到 n 個引力物體的方程、一般的積分和基本不等式．表述一些多體問題的有名的分析關係，只有不等式(1.23)及積分不等式(1.35)在本章中是新的關係．

在第二章叙述幾個一般（集合論的）動力學的問題．然後在昂利·普安加雷 (H. Poincarè)-卡拉梯奧多利(K. Caratheodory)定理上，引入度量動力學(Метрическая Динамика)的一些問題．這一章需要一些研究工作．熟習一些問題；讀者可注意問題的新的及更一般的叙述及新解決．重新處理的主要原因如下：古典理論的建立是爲了研究再現的（普瓦松 (Poisson)之穩定的）動力系統的運動．我們也要創出一個理論，其功用是爲了解決另外一些更具體且有天體演化學興趣的問題，即研究 n 個引力物體系統只在非力學起源的初始條件下可實現的運動的幾種類型．

在以後數章中包含了我們的研究以上的問題及懸案的結果.

在第三章中，考慮當能量常數的數值不同時，運動的可能形式，且證明關於完全不穩定及半穩定運動系統之可能性的條件(在某些情形是充分的，另一些是必要的)之一些定理.然後再考慮關於在過去逸散的引力物體接近時當 $t\to+\infty$ 時半穩定運動及穩定子系統之發生的問題；證明了的一般定理可容許建立實現這個現象的必要條件. 然後在這些定理的基礎上詳細分析由施密特院士用方程的數字積分法所解決的三體問題中的俘獲，實現的例子.

在第四章中研究只對非力學起源的初始條件才能實現的，在 n 個引力物體中的幾個運動種類.此章的主要結果如下：如果在 n 個引力質點的系統中，在初始時刻 $t=0$ 時的點之位置及速度使得對於 $t\to\infty$ 時至少有一個點從系統的質量中心無限地遠離，則除去了可能初始位置組成的測度爲零的集合以外，適合下列二條件之一：

1) 當 $t\to\infty$ 時函數 $r^*(t)=\max\ \{r_{ij}\}$ 無限增加；

2) 系統的初始條件爲非力學起源的.

在第五章中考慮關於很大數目的小的引力物體的穩定系統在非彈性碰撞時的演化. 在我們所證明的很一般的定理基礎上建立動力系統的定性的理論，在這個情形中表現了兩個趨向：趨於運動的序次，及趨於從小的物體結合爲大的物體.然後考慮當有補充的假定——系統具有巨大動量矩——時的問題. 用引力物體動力學的方程和碰撞的古典理論從新證明小質點結合爲較

大物體的趨向的存在．如果這個過程伴隨有系統動能的相當顯著的減小，則由聯合而產生的巨大物體將具有正向的自轉．

第六章專考慮動力學的及引力物體系統演化的一些一般的和哲學的問題，及附加於此的一些行星起源的問題．

在最後這幾行，作者不得不提到教導他的幾位先生：蘇聯科學院通訊院士斯切潘諾夫及院士 О. Ю. 施密特，作者和他們不只是師生關係而且有經多年考驗的科學友誼．我感謝地提到與 П. С. 諾維科夫教授多次的、深刻的且極端有趣味的討論，和對我的科學思想及工作的很嚴格而誠懇的批評．

第　一　章

n 體問題的方程、一般積分及基本不等式

1. 考慮具有質量 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_n$ 的 n 個質點 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 按照牛頓定律互相吸引. 我們要研究這些質點的相對運動. 開始我們先看質點 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 對於它們的質量中心的運動.

取一笛卡爾直角坐標系, 使其原點固定在質點的質量中心, 而其軸的方向不變. 以 x_i, y_i, z_i 表點 P_i 的坐標. 以 r_i 表點 P_i 與原點間的距離, r_{ij} 表點 P_i 與 P_j 間的距離. 我們採取一種量度單位使萬有引力常數爲 1. 設

$$U=\sum_{ij}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}\ (i\neq j), \tag{1.1}$$

其中 $\sum_{ij}$ 表示對於所有質點中各對的和; 則運動方程[1] 可一變爲 $3n$ 個二級方程:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\ m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\ m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_i}, \tag{1.2}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n.$$

1) 在本章中我們只提到 n 體運動方程及其積分.

這些方程也可改寫爲 $6n$ 個一級的方程:

$$\frac{dx_i}{dt}=x'_i,\ \frac{dy_i}{dt}=y'_i,\ \frac{dz_i}{dt}=z'_i,$$

$$m_i\frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x_i},\ m_i\frac{dy'_i}{dt}=\frac{\partial U}{\partial y_i},\ m_i\frac{dz'_i}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z_i},\qquad(1.3)$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n.$$

表示所熟知的能量守恆定律的積分具有下列形式:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2\right)=U+H,\qquad(1.4)$$

此處 H 是積分常數.

此外尚有動量的 6 個綫性積分.在我們的坐標系之選擇下,它們的樣式是

$$\sum_{i=1}^{n}m_i x'_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}m_i y'_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}m_i z'_i=0,$$
$$(1.5)$$
$$\sum_{i=1}^{n}m_i x_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}m_i y_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}m_i z_i=0.$$

然後我們還有 3 個面積積分(動量矩)相對於坐標軸,它們的樣式爲

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i y'_i-y_i x'_i)=c_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(y_i z'_i-z_i y'_i)=c_2,\qquad(1.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(z_i x'_i-x_i z'_i)=c_3,$$