

北京四中根据教育部考试中心最新动态编写

名校高考圣经

数 学

傅以伟 编著

知 識 出 版 社

名校高考圣经

数 学

傅以伟 编著

知识出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

名校高考圣经: 数学/傅以伟编著. - 北京: 知识出版社,
2000.1

ISBN 7-5015-2450-5

I. 名… II. 傅… III. 数学课 - 高中 - 升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 71520 号

责任编辑: 邓 茂

封面设计: 刘家峰

责任印制: 张京华

知识出版社出版发行

(100037 北京阜成门北大街 17 号 电话: 6834 3259)

河北省固安县印刷厂印刷 新华书店经销

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 1 次印刷

开本: 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张: 13.125

字数: 450 千字 印数: 1-10000 册

定价: 14.50 元

本书如有印装质量问题, 可与出版社联系调换。

编写说明

北京四中每年均有 50% 左右的毕业生进入清华、北大深造, 高考升学率为 100%, 其教与学的成果十分显著。这些都与其丰富的教学经验, 严谨的教风、学风, 先进的管理体制分不开。

教育部《关于进一步深化普通高校考试制度改革意见》文件中关于 2001 年全国分步骤推行“3+X”方案, 今年广东省高考实行“3+X”科目设置方案颁布后, 北京四中多年连续从事高三教学并成功指导高考复习的教研组长、学科带头人, 应广大兄弟学校师生的迫切要求, 依据多年的教学经验, 结合高三教学的实际情况与“3+X”高考改革新动向从基础知识入手, 精心编写了这套高考全程复习丛书——《名校高考圣经》。

本套丛书科学性、可信度高、信息量大, 结合了上海、广州及其他地区考前模拟, 对 2000 年高考做出了科学的预测与分析。本套丛书总体结构分三大部分: 基础知识复习, 名师考前指导, 高考回顾与展望。丛书体现了“3+X”考试形式的几个特点:

I. “3+X”高考中的“3”仍然是语、数、英三门基础课程, “X”是指物、化、生、政、史、地或文科综合, 理科综合, 不分文理的综合或专科综合。它是一种考察学生理解、掌握和应用知识的能力测试; 它是在前九种高考方案的基础上, 按照现代教育理论和规律设计的改革方案。

II. “3+X”的本质是要求学生要有扎实的基础, 又允许学生根据自己的特长、优势和兴趣去发展。它是高中会考基础上的高考制度的改革, 既注重学生的全面素质发展, 又尊重了个性教育, 更有利于素质教育的实施。

III. “3+X”充分给了学生与高校选择的权利, 是让人选择教育, 而不是教育选择人。

IV. “3+X”的高考制度改革是开放性的改革, 它与社会主义市场经济的运行机制有机相连, 尤其是“X”更体现了可变化与可发展的特点。

本套丛书暂定出版语文、数学、英语、物理、化学五个分册。书中不妥之处, 敬请指正。

《名校高考圣经》编写组

1999 年 9 月中旬于北京四中

目 录

第一部分 基础知识复习

一 幂函数、指数函数和对数函数	(1)
(一)集 合	(2)
(二)函数概念	(5)
(三)幂函数	(10)
(四)反 函 数	(14)
(五)指数函数和对数函数	(17)
跟踪强化测试(一)	(29)
二 三角函数	(34)
(一)任意角的三角函数	(34)
(二)三角函数的图像和性质	(39)
跟踪强化测试(二)	(52)
三 两角和与差的三角函数	(58)
跟踪强化测试(三)	(76)
四 反三角函数和最简单三角方程	(84)
(一)反三角函数	(84)
(二)最简单的三角方程	(91)
跟踪强化测试(四)	(97)
五 不等式	(102)
(一)不等式的概念和性质	(103)
(二)不等式的解法	(106)
(三)不等式的证明	(114)
(四)不等式的综合应用	(123)
跟踪强化测试(五)	(133)
六 数列 极限 数学归纳法	(140)
(一)等差数列与等比数列	(140)
(二)数列的极限	(148)
(三)数学归纳法	(153)
跟踪强化测试(六)	(164)

七 复 数	(171)
(一)复数的概念	(171)
(二)复数的运算	(174)
跟踪强化测试(七)	(185)
八 排列 组合 二项式定理	(191)
(一)加法原理与乘法原理	(191)
(二)排列 排列数公式	(193)
(三)组合 组合数公式 组合数的两个性质	(194)
(四)二项式定理	(198)
跟踪强化测试(八)	(205)
九 直线和平面	(208)
(一)平面	(208)
(二)空间两条直线	(210)
(三)直线和平面的位置关系	(213)
(四)两个平面的位置关系	(217)
跟踪强化测试(九)	(221)
十 多面体和旋转体	(226)
(一)多面体	(227)
(二)旋转体	(231)
(三)多面体和旋转体的体积	(233)
(四)综合例题分析	(237)
跟踪强化测试(十)	(240)
十一 直线	(245)
(一)有向线段 定比分点 直线方程	(245)
(二)两条直线的位置关系	(250)
(三)直线与点的位置关系	(257)
十二 圆锥曲线	(266)
(一)曲线与方程	(267)
(二)圆	(270)
(三)椭圆	(281)
(四)双曲线	(292)
(五)抛物线	(299)
(六)坐标轴的平移	(304)

跟踪强化测试(十二).....	(311)
十三 极坐标与参数方程	(318)
跟踪强化测试(十三).....	(322)
第二部分 名师考前指导	
一、数学高考应试诀窍	(328)
二、综合题的解答与技巧	(334)
三、高考模拟数学试题精选	(341)
(一) 立体几何部分.....	(341)
(二) 平面解析几何部分.....	(348)
(三) 代数部分.....	(354)
第三部分 高考命题回顾与展望	
一、高考命题依据	(387)
二、高考数学试题的特点	(389)
三、2000 年高考数学试题命题展望	(394)
附:1999 年高考全国与广东合并试卷	(397)

第一部分 基础知识复习

一 幂函数、指数函数和对数函数

本章高考要求与说明

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等的关系的意义,能掌握并运用有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合。
2. 理解 $|ax + b| < c$ 、 $|ax + b| > c (c > 0)$ 型不等式的概念,并掌握它们的解法;了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系,掌握一元二次不等式的解法。
3. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关概念,掌握互为反函数的函数图像间的关系。
4. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像。
5. 理解分数指数幂、根式的概念,掌握分数指数幂的运算法则。
6. 理解对数的概念,掌握对数的性质和运算法则。
7. 掌握幂函数的概念及其图像和性质。在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时,所涉及的幂函数 $f(x) = x^a$ 中的 a ,限于在集合 $\left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ 中取值。
8. 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质,并会解简单的指数方程和对数方程。

函数是数学中最主要的概念之一,函数概念贯穿于中学代数的始终,数、式、方程、函数、排列组合、数列极限等,是以函数为中心的代数,利用函数观点可以从较高的角度,处理等式、方程、不等

式、数列、曲线与方程(隐函数)等内容,“一般受教育者,在数学课上应该学会的重要内容,就是用变量和函数来进行思考,它贯穿于数学理论和应用的每一个场合”。

由于上述原因,近十年来的高考数学试题中,都以函数及其性质为主线,它在试卷所占的比例,高于课时中相应内容在教材中所占的比例,约占全卷总分的30%。其中,集合、函数两要素、函数图像、函数性质、反函数、二次函数、幂函数,以及指数函数和对数函数、指数方程和对数方程等,是高考试题中经常出现的内容。

(一) 集 合

知识点1 集合

知识点2 子集 交集 并集 补集

学习重点:

1. 集合语言与集合思想的运用。用它们来表达元素与集合以及集合与集合之间的关系。

2. 集合中的元素的三个特征:

① 确定性 ② 互异性 ③ 无序性

3. $A \subseteq B$ 包括 $A = B$ 或 $A \subset B$, 两者必居其一且仅居其一。当 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$ 时, 有 $A = B$ 。

$$4. A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

$$5. A \cap A = A, A \cup A = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$$

$$6. A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset$$

在高考中,集合几乎是每年必考的内容,一般地说,以两种形式考查,一种是考查集合本身的知识,一种是考查集合语言与集合思想的应用。这些往往是渗透在方程与不等式、三角函数及解析几何之中,即把集合作为工具在其他数学问题中运用。

典型例题分析

例 1 已知集合 $A = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 。

解析 集合 B 可化简为 $\{x \mid -1 < x < 3\}$

$$\therefore A \cap B = A = \{x \mid 0 \leq x < 2\},$$

$$A \cup B = \{x \mid -1 < x < 3\}.$$

例 2 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 4, 5\}$, 求 $\overline{M} \cap N$ 和 $\overline{M \cup N}$ 。

解析 由补集定义知 $\overline{M} = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin M\} = \{2, 5\}$, $\therefore \overline{M} \cap N = \{2, 5\}$

求 $\overline{M \cup N}$, 可先求出 $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\} = I$

$\therefore \overline{M \cup N} = \emptyset$, 也可由补集的性质 $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ 得出同样结果。

例 3 集合 $A = \{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 A, B 间的关系是()。

A. $A \subset B$

B. $A \supset B$

C. $A = B$

D. $A \neq B$

解析 $\because 2n+1 (n \in \mathbb{Z})$ 表示任意奇数

由于整数被 4 除所得余数只有 0、1、2、3 四类, 而余数为 0 和 2 时是偶数, $4k+1$ 的余数为 1, $4k-1$ 的余数为 3, 故 $4k \pm 1 (k \in \mathbb{Z})$ 表示任意奇数。

$$\therefore \{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\} = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

故选 C。

例 4 设全集 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$$

$N = \{(x, y) \mid y \neq x+1\}$, 那么 $\overline{M \cup N}$ 等于()。

A. $\emptyset$

B. $\{(2, 3)\}$

C. $(2, 3)$

D. $\{(x, y) \mid y = x+1\}$

解法一

$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$$

$$= \overline{\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}} \cap \overline{\{(x, y) \mid y = x+1\}}$$

$$= \{(x, y) \mid y = x+1, x \neq 2\} \cap \{(x, y) \mid y = x+1\}$$

$$= \{(x, y) \mid y = x + 1, x = 2\}$$

$$= \{(2, 3)\}$$

故选 B。也可用数形结合的办法来解。

$$\begin{aligned}\text{解法二} \quad M &= \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\} \\ &= \{(x, y) \mid y = x + 1 \text{ 且 } x \neq 2\}\end{aligned}$$

表示直线 $y = x + 1$ 去掉点 $(2, 3)$ 的部分。

$N = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$ 表示 xy 平面上直线 $y = x + 1$ 外的点集。

$\therefore M \cup N$ 表示 xy 平面上除点 $(2, 3)$ 以外的区域 (见图 1-1)

$$\therefore \overline{M \cup N} = \{(2, 3)\}$$

说明 此题考查了并集、补集的概念, 元素和集合的概念及方程和不等式的几何意义, 要注意答案 C 和 B 的区别: $(2, 3)$ 表示一个点, 而 $\{(2, 3)\}$ 是以点 $(2, 3)$ 为元素的点集。 $\overline{M \cup N}$ 表示点集, 所以不能选 C。

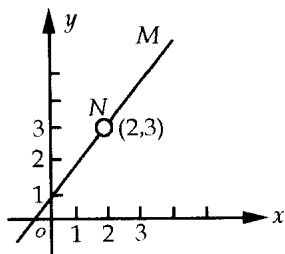


图 1-1

例 5 已知集合 $M = \{x, xy, \lg xy\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 且 $M = N$, 求 x, y 。

解析 由 $M = N$, $\therefore 0 \in M$, 若 $x = 0$, 则 $xy = 0$, 由集合中元素的互异性知这不可能, $\therefore$ 只有 $\lg xy = 0$, $\therefore xy = 1$, 再由 $M = N$, $\therefore |x| = 1$ 或 $y = 1$ 。若 $y = 1$, 则 $x = 1$, 这也不行, $\therefore$ 只能 $|x| = 1$, 且 $x \neq 1$, $\therefore x = -1, y = -1$ 。

例 6 已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 2x - 15 > 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - ax - 6a^2 < 0\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 。

$$\text{解析} \quad x^2 - ax - 6a^2 < 0$$

① 当 $a = 0$ 时, 不等式无解, $\therefore N = \emptyset$, 结论成立。

$$\text{化简 } M = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$$

② 若 $a > 0$ 时, $N = (-2a, 3a)$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则必须 $\begin{cases} -2a \geq -3 \\ 3a \leq 5 \end{cases}$ 即

$$0 < a \leq \frac{3}{2}。$$

③ 若 $a < 0$ 时, $N = (3a, -2a)$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则

$$\begin{cases} 3a \geq -3 \\ -2a \leq 5 \end{cases} \quad \text{即 } -1 \leq a < 0$$

综上可得 $-1 \leq a \leq \frac{3}{2}$

说明 集合 N 与 a 的取值有关, 因此应对 a 取 0 或正、负值进行讨论, 特别是 $a = 0$ 时, 显然 $M \cap N = \emptyset$, 这是容易忽略的一点。

自测题(一)

1. 已知全集 $I = R^+$, $a > b > 0$, $M = \{x \mid \sqrt{ab} < x < a\}$,
 $N = \{y \mid b < y < \frac{a+b}{2}\}$, $P = \{z \mid z \leq \sqrt{ab}\}$, 则()。

A. $P = M \cap N$

B. $P = M \cap \bar{N}$

C. $P = \bar{M} \cap N$

D. $P = \bar{M} \cup N$

2. 已知集合 $A = [-2, 5]$, $B = \{x \mid x > a\}$, 求 $A \cap B$ 。

3. 已知集合 $A = \{2, 4, a^3 - 2, a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 且 $A \cap B = \{2, 5\}$, 求数 a 及 $A \cup B$ 。

4. 设 $A = \{x \mid 2x^2 - px + q = 0\}$, $B = \{x \mid 6x^2 + (p+2)x + 1 = 0\}$
且 $A \cap B = \{\frac{1}{2}\}$, 求 $A \cup B$ 。

(二) 函数概念

知识点 3 映射

知识点 4 函数(函数记号、定义域、值域)

学习重点:

1. 单值对应, 一一对应和逆对应的概念
2. 函数的定义及函数定义域与值域的求法
3. 函数的单调性与奇偶性
4. 函数的符号的意义和函数解析式的求法
5. 绘制函数图像的草图

典型例题分析

例 1 已知 $A = \{1, 2, 3, k\}$, $B = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$, 且 $a, k \in N$; 若 $x \in A, y \in B, f: x \rightarrow y = 3x + 1$, 是从 A 到 B 的一个映射, 求 a 和 k 。

解析 由映射定义知, A 中每一元素, 在 B 中存在唯一的元素与之对应。

由已知。显然 $f: x = 1$ 时, $y = 4$; $x = 2$ 时, $y = 7$,

则有 $3 \rightarrow a^4$ 或 $3 \rightarrow a^2 + 3a$ 。

若 $3 \rightarrow a^4$, 则 $a^4 = 3 \times 3 + 1$, 显然 $a \notin N$;

若 $3 \rightarrow a^2 + 3a$, 则 $a^2 + 3a = 3 \times 3 + 1$ 。解之得 $a = 2$ 或 -5 , 显然 $-5 \notin$

N ,

$$\therefore a = 2$$

$$\text{此时 } a^4 = 16, 16 = 3k + 1 \therefore k = 5$$

综上, 得 $a = 2, k = 5$ 。

例 2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$$

$$(2) y = \log_4(x^2 - 2x - 3)$$

$$(3) y = \log_2 \frac{x^2 - 7x + 10}{3 - x}$$

$$(4) y = \sqrt{1 - a^x} \quad (0 < a < 1)$$

解析 求函数定义域时, 应先列出使函数有意义的 x 所满足的不等式组, 解之即得。

$$\text{其中 (1) } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \text{ 得 } [-4, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$(2) x^2 - 2x - 3 > 0, \text{ 得 } (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

$$(3) \frac{x^2 - 7x + 10}{3 - x} > 0, \text{ 得 } (-\infty, 2) \cup (3, 5)$$

$$(4) 1 - a^x \geq 0, \text{ 得 } [0, +\infty)$$

例 3 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(1, 3]$, 求 $f(x^2 - 1)$ 的定义域。

解析 由函数记号, 及 $f(x)$ 定义域为 $(1, 3]$ 可知 $1 < x^2 - 1 \leq 3$, 解之可得定义域为 $[-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2]$ 。

说明 这是一个已知函数定义域, 求复合函数的定义域问题。

下面的解法, 显然是错误的。

$$\text{由 } x \in (1, 3] \text{ 得 } x^2 \in (1, 9], \therefore x^2 - 1 \in (0, 8]$$

例 4 求下列函数的值域:

$$(1) y = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$(2) y = 2x^2 - 3x - 1$$

$$(3) y = 1 - \sqrt{3 - 2x - x^2}$$

$$(4) y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

解析 本题中几个小题均可通过变形函数式并利用实数的基本性质可解决问题, 其方法是:

$$(1) y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3(x+2)-7}{x+2} = 3 - \frac{7}{x+2}$$

$$\text{其中 } \frac{7}{x+2} \neq 0$$

$\therefore$ 值域为 $\{y \mid y \neq 3\}$ 。

$$(2) y = 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{17}{8}, x = \frac{3}{4} \text{ 时}$$

$$y_{\min} = -\frac{17}{8}$$

$\therefore$ 值域为 $[-\frac{17}{8}, +\infty)$ 。

$$(3) y = 1 - \sqrt{-(x-1)^2 + 4}$$

$$0 \leq \sqrt{-(x-1)^2 + 4} \leq 2$$

$\therefore$ 值域为 $[-1, 1]$ 。

$$(4) y = \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\text{且 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, } y_{\max} = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ 值域为 $(0, \frac{4}{3}]$ 。

例 5 求下列函数的值域：

$$(1) y = \log_{\frac{1}{2}}(3x-5), x \in [2, 3]。$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 1 \quad \textcircled{1} x \in [-2, 0], \quad \textcircled{2} x \in [-2, 3]。$$

$$(3) y = x + \frac{1}{x}, \quad x \in [\frac{1}{2}, 4]。$$

解析 (1) 函数为单调减函数, 只需将给定区间的边界值代入, 即可得出值域为 $(-2, 0]$ 。

(2)① 在 $[-2, 0]$ 上, 函数 $y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$ 是单调增函数, 方法与(1)同, 得值域为 $[-7, 1]$ 。

(2)② 函数 $y = -x^2 + 2x + 1$ 在 $[-2, 3]$ 上非单调函数, 故不能将边界值代入而得其值域, 应把区间 $[-2, 3]$ 分成两个单调区间 $[-2, 1]$ 和 $[1, 3]$ 。函数在 $[-2, 1]$ 上取值为 $[-7, 2]$, 而在区间 $[1, 3]$ 上取值范围是 $[-2, 2]$, 它们的并集为 $[-7, 2]$, 故原来函数的值域为 $[-7, 2]$ 。

$$(3) \text{ 由 } x \in [\frac{1}{2}, 4] \text{ 时, } x + \frac{1}{2} \geq 2, \text{ 当且仅当 } x = 1 \text{ 时取得最小值 } 2。$$

$\therefore$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 4]$ 上, 函数 $x + \frac{1}{x}$ 不是单调函数, 且在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为减函数, 在

$[1, 4]$ 上为增函数, 在这两个区间上的函数值域分别为 $[2, \frac{5}{2}]$ 和 $[2, \frac{17}{4}]$, 它们的并集为 $[2, \frac{17}{4}]$, 故函数 $y = x + \frac{1}{x}, x \in [\frac{1}{2}, 4]$ 的值域为 $[2, \frac{17}{4}]$ 。

例 6 求函数的值域:

$$(1) y = \frac{1}{x} + x, \quad (2) y = \frac{2x^2 - x}{x + 2}$$

解析 本题两小题均可利用基本不等式求函数的值域。

$$(1) x > 0 \text{ 时}, x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ 且仅当 } x = 1 \text{ 时取等号},$$

$$x < 0 \text{ 时}, -\frac{1}{x} + (-x) \geq 2, \therefore x + \frac{1}{x} \leq -2, \text{ 当且仅当 } x = -1 \text{ 时取等号},$$

$\therefore$ 值域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 。

(2) 变形函数式

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x^2 - x}{x + 2} = \frac{2x(x + 2) - 5x - 10 + 10}{x + 2} \\ &= 2x - 5 + \frac{10}{x + 2} \\ &= 2(x + 2) + \frac{10}{x + 2} - 9 \end{aligned}$$

当 $x > -2$ 时, $y \geq 4\sqrt{5} - 9$, 当且仅当 $2(x + 2) = \frac{10}{x + 2}$, 即 $x = -2 + \sqrt{5}$ 时取等号。

当 $x < -2$ 时, $y \leq -4\sqrt{5} - 9$, 当且仅当 $2(x + 2) = \frac{10}{x + 2}$, 即 $x = -2 - \sqrt{5}$ 时取等号。

故得其值域为 $(-\infty, -4\sqrt{5} - 9] \cup [4\sqrt{5} - 9, +\infty)$ 。

说明 本小题也可采用下述方法(判别式法):

变形函数式 $y = \frac{2x^2 - x}{x + 2}$ 为 $2x^2 - (y + 1)x - 26 = 0 (*)$ 由原函数中 x 可取 -2 以外的一切实数, 即方程 $(*)$ 有实数根, 一元二次方程有实根的条件为 $\Delta \geq 0, \therefore (y + 1)^2 + 16y \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{即 } y^2 + 18y + 1 &\geq 0. \quad \text{解之得 } y \leq \frac{-18 - \sqrt{18^2 - 4}}{2} \text{ 或 } y \geq \\ &\frac{-18 + \sqrt{18^2 - 4}}{2}, \text{ 即 } y \leq -9 - 4\sqrt{5} \text{ 或 } y \geq -9 + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

例 7 求函数值域:

$$(1) y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad (2) y = \frac{2\sin x - 3}{2 - \sin x}, \quad (3) y = \frac{\sin x + 1}{2 - \cos x}$$

答 (1)(-1, 1) (2) $[-\frac{5}{3}, -1]$ (3) $[0, \frac{4}{3}]$

解析 本题几个小题均为复合函数, 分别可利用函数 e^x , $\sin x$ 或 $\cos x$ 的值域来解决问题:

(1) 将函数式变形为 $e^x = \frac{-y-1}{y-1}$, 利用 $e^x > 0$ 求解, 可得值域为 $(-1, 1)$ 。

(2) 将函数式变形为 $\sin x = \frac{2y+3}{y+2}$, 利用 $|\sin x| \leq 1$ 可解, 得值域为 $[-\frac{5}{3}, -1]$ 。

(3) 变形函数式为 $\sin x + y\cos x = 2y - 1$, 再利用三角函数式变形为 $\sqrt{y^2 + 1}\sin(x + \varphi) = 2y - 1$,
 $\therefore \sin(x + \varphi) = \frac{2y-1}{\sqrt{y^2+1}}$, 利用 $|\sin(x + \varphi)| \leq 1$, 可求得值域为 $[0, \frac{4}{3}]$ 。

自测题(二)

- 已知集合 $A = \{y \mid y = x^2 - 2x + 3\}$, $B = \{y \mid y = 2x^2 - 3x + 1\}$, 则 $A \cap B$ 为()。
 A. $\{y \mid y \geq 2\}$ B. $\{(2, 3), (-1, 6)\}$
 C. $\{y \mid -\frac{1}{8} \leq y \leq 2\}$ D. $\{y \mid y \geq 1\}$
- 与函数 $y = x$ 有相同图像的一个函数是()。
 A. $y = \sqrt{x^2}$
 B. $y = \frac{x^2}{x}$
 C. $y = a^{\log_a x}$, 其中 $a > 0, a \neq 1$
 D. $y = \log_a a^x$, 其中 $a > 0, a \neq 1$
- 函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则函数 $y = f(x^2)$ 的定义域是_____。
- 函数 $y = \sqrt{6 - x - x^2}$ 的值域是_____。
- 函数 $y = \sqrt{5^{2x} - 1}$ 的定义域是_____。
- 函数 $y = \log_2(x^2 - 2x + 2)$ 的值域是_____。
- 定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $y = -2x^2 - 3x + 1$ 的最大值是_____。

_____, 最小值是_____。

8. 函数 $y = \sqrt{-3x^2 + x + 1}$ 的最大值是_____, 最小值是_____。

9. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\frac{1}{2}, 3)$ 试求 $f[\lg x]$ 的定义域。

10. 求函数 (1) $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x}$, (2) $y = \frac{2x}{1-x}$ 。

(三) 幂函数

知识点 5 幂函数

知识点 6 函数的单调性

知识点 7 函数的奇偶性

典型例题分析

例 1 已知函数 $f(x)$ 是奇函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数?

解析 根据单调性定义, 要在所判断的区间上任取 $x_1 < x_2$, 再判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号, 即

设 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 < x_2$

$\because f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(-x_1) = -f(x_1), f(-x_2) = -f(x_2) \quad (1)$$

由假设可知 $-x_1, -x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $-x_1 > -x_2$, 又已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 于是有

$$f(-x_1) < f(-x_2) \quad (2)$$

把(1)代入(2), 于是: $-f(x_1) < -f(x_2)$, 从而

$$f(x_1) > f(x_2)。$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数。

例 2 根据函数单调性定义, 证明函数 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数。
(1991 年全国高考试题)

解法一 任取 $x_1, x_2 \in R$, 且 $x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 -$$