考试名家指导

考研数学专项训练系列

考研

2006版

线性代数题型精讲

北京大学 尤承业 编著

第4版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学专项训练系列

线性代数题型精讲

第 4 版

北京大学　尤承业　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是“考试名家指导”考研数学专项训练系列丛书之一，是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试命题、阅卷及辅导的经验编写而成。全书按照“考试大纲”规定共分六章：行列式；矩阵乘法和可逆矩阵；向量组的线性关系与秩；线性方程组；特征向量与特征值，对角化；二次型、正定。每一章均包括四个部分：考试大纲要求、基本内容与重要结论、典型例题分析、自测练习题与参考答案。

本书作者为北京大学多年从事数学基础教学及参加过全国考研辅导工作的名师，具有丰富的教学和辅导经验，其所编写的教材、辅导书和教授的课程在历年参加考研的学生中具有相当大的影响。

本书题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理，可作为考研辅导班的辅导用书或考生自学用书，对本科生及数学工作者也是一本比较好的学习用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数题型精讲/尤承业编著.—4版.—北京：
机械工业出版社，2005.3
(考研数学专项训练系列)
ISBN 7-111-14283-7

Ⅰ.线... Ⅱ.尤... Ⅲ.线性代数-研究生-入学
考试-解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 018343 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：边 萌 徐春涛
责任编辑：徐春涛 责任印制：石 冉
三河市宏达印刷有限公司印刷 · 新华书店北京发行所发行
2005 年 3 月第 4 版第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16 · 11.5 印张 · 245 千字
定价：18.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话：(010)68326294
本社服务热线电话：(010)68311609
本社服务邮箱：marketing@mail.machineinfo.gov.cn
投稿热线电话：(010)68354423
投稿邮箱：sbs@mail.machineinfo.gov.cn

出 版 说 明

由机械工业出版社与北京大学数学科学学院的几位老师策划、出版的“考试名家指导”考研数学专项训练系列丛书，其目的在于帮助有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息。这是一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的丛书。本丛书是根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验编写而成的。

本套丛书作者皆为北京大学多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

考研数学专项训练系列丛书分为四册：《高等数学题型精讲（理工类）》、《微积分题型精讲（经济类）》、《线性代数题型精讲》和《概率论与数理统计题型精讲》，这样不仅充分发挥了每个作者的特长，而且也方便读者根据自己的具体情况选购。

每册书都严格按照“考试大纲”的规定分章，每一章又都包括四个部分：

考试大纲要求——在这一部分中原原本本地介绍了大纲对本章考试内容以及考试要求的规定，使读者一览全局。

基本内容与重要结论——在这一部分中对大纲规定的考试内容以及重点、难点作了精心的总结和透彻的阐述，目的在于使读者对有关的基本概念、重要公式和定理获得深入的理解和全面的掌握。

典型例题分析——在这一部分中集中了经过精心挑选的部分历年考研真题和一批典型例题，总结了各种解题方法，许多解法构思精妙、匠心独运，对读者深入领会基本内容、开阔思路和灵活解题十分有利。

自测练习题与参考答案——在这一部分中有针对性地编排了若干题目（并附有答案），供读者作为自测练习之用。由于本书篇幅所限，这里提供的练习题数量也许并不能完全满足备考的需要。为了作好研究生入学考试的复习，读者还需要从其他渠道获得更多的题目。

为了在研究生入学数学考试中取得高分，考生须切记以下几点：明确大纲规定的考试内容和要求，掌握历年数学命题的特点和重点是前提；深入掌握基本概念，牢记并能熟练运用基本公式和法则，确保基本计算准确熟练是基础；搞清有关知识间的纵向与横向的联系，按照解题为主线，重新组织有关知识，增强灵活运用知识解决综合题目的能力是关键。

研究生试题中有相当数量的综合题，即在一个题目中考查不同章节的多个知识点，甚至考

查不同学科内容的试题。这类题目着重考查考生对大纲内容的融会贯通与灵活运用，为此考生必须对所学知识进行重组，彻底搞清有关知识间的纵向与横向联系，把原来学过的内容按照解决特定问题的需要进行梳理，打乱次序后再重新编排，以期做到“成竹在胸，信手拈来”，迅速而准确地找到解决综合题的切入点。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。

机械工业出版社

前　言

研究生入学考试数学考试所涉及的三门课程中,线性代数是概念性最强的一门,对代数理论理解的深浅直接影响考场上应对代数题的能力。对线性代数的考前准备自始至终都应该把加深对理论的理解放在最重要位置上。

代数的概念题和证明题常常是考生的难题。对这类题的解题能力直接反映出对代数理论的理解程度。

线性代数计算题的类型并不多,计算的方法也很初等,但是往往计算量比较大。做好代数计算题一要熟,二要巧。熟,是要熟练掌握各类题型的计算方法,必须在理论上懂得其道理;巧,是指解题的思路要简捷清晰,这样可减少计算量,既节省了时间,又降低出错可能性,这更需要有对理论的较好理解,使得你能高瞻远瞩,眼明心亮,容易找到最好的解题途径。总之,做好代数计算题同样也要求对理论清楚明白。

从理论的角度看,代数学又是比较难的一门课。它的许多概念和性质比较复杂和抽象,尤其是各部分内容之间的联系非常紧密,而这方面往往是许多考生过去在学习中不大注意的。

基于以上原因,作者在编写本书时,对于概念的复习部分作了精心设计。虽然这部分内容在篇幅上不是本书的主要部分,但是这里凝聚了作者多年来讲授线性代数的教学经验和对该课程的独到理解。希望在此基础上,为考生提供一个系统的、有着内在有机联系的,从而更加好懂、好记、好用的代数复习材料。

读者会发现,本书的概念复习部分不是考试大纲的“名词解释”。考试大纲自然是编写本书的重要依据,但我们并不完全“忠实”于大纲,有的内容是“超”出大纲的。读者还会发现,本书的内容也不是一般教材的简单浓缩,在体系上不同于一般教材,突出了各部分内容的联系,在讲法上也有自己的特色。在这里我们要谈几点看法。

(1) 有的考生以为“考试大纲上没有提到的就不会考,因此不必复习”。这种看法是片面的。数学的特点是系统性强,线性代数尤其如此。有的内容虽然没有列入大纲要求,这只能说明它们不会直接作为考试题出现,并不是不需要复习,因为对理论整体的理解上,它们往往是不可缺少的。

(2) 复习的最终目标是应对考试。随着考研竞争性的增强,考题的形式在变化,难度在加大,多数不再是一般教材中常见的基本题型。这些考题不仅要求考生熟练掌握计算题的解法,还应较好地理解有关概念和性质。本书中,我们针对考题,介绍一些一般教材上不讲的结果,教给大家一些常见问题的实用而简捷的方法。这些方法并不涉及到高深的理论知识,只是在考试大纲的基础上往前跨出了一小步,因此是容易理解的。

(3) 在复习阶段,应该注意各部分内容的联系,这也是本书的一个着眼点。这种联系不仅直接体现在内容中,在安排上也作了考虑。代数中几个最基本的概念并不难理解,一般学过的考生都还不会忘记。我们把这些基本的概念集中在本书的开篇中作了简单介绍,让考生在复习之初先对代数学中的基本概念作一个大致的回忆,然后可把精力放在真正需要下功夫的部分。同时,也为了在后面讲述各章内容时强调概念的横向联系,而不必受各概念出现先后顺序的限制。

例题是本书内容的主要部分。在每一章,我们精选了丰富的例题(一部分是历年较难的考题),它们覆盖了有关内容的各类典型问题。对于解题的方法,我们不求全面,不介绍那些繁琐而不得要领的方法,力求简捷,思路自然,有启发性。必要时,我们还会用小注强调解题中的思路和方法。在有的例题后面,附有相关题型,以供读者即时练习,以便起到举一反三的功效。

例题中包含了证明题,有的是有相当难度的。真正考试中,也许这样难度的考题并不多见,但是通过对这类例题及它们的分析和证明,读者可以领会其思路和方法要领,提高自己的解题能力。

本书还精选了题型广泛的练习题。例题和练习题可以说包含了本课程的几乎所有题型。

数一、数二、数三、数四的考试大纲在线性代数上的要求差别不大,但也有不同,本书涵盖了各类考试大纲的所有要求,可供理工和经济各类的考生使用,各类考生可从中选择自己所需的内容。第三章的3.8(向量空间)只有数一要求。数二还不要求:第三章的3.7(内积、正交矩阵等)、第五章5.3(实对称矩阵的对角化)和第六章(二次型)全部。在例题和习题方面,凡是数二不要求的打"*"号。

由于时间仓促,本书难免会出现考虑不周之处,欢迎读者提出宝贵意见和建议。

尤承业

2005年2月于北京大学

目 录

基 本 概 念

基础比较好的考生可不必看这部分内容,或者只用本部分的习题对自己进行一次测试.

(一) 矩阵

(1) 基本概念

矩阵是描写事物形态的数量形式的发展.

由 $m \times n$ 个数排列成一个 m 行 n 列的表格,两边界括以圆括号或方括号,即为一个 $m \times n$ 型矩阵.这些数称为它的元素,位于第 i 行第 j 列的数称为 (i,j) 位元素.

本书中用大写黑体英文字母表记矩阵.

元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**,通常就记作 $\boldsymbol{O}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等(记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$),是指它的行数相等,列数也相等(即它们的类型相同),并且对应的元素都相等.

(2) 线性运算和转置

加(减)法:两个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以相加(减),得到的和(差)仍是 $m \times n$ 矩阵,记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$,法则为对应元素相加(减).

数乘:一个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个数 c 可以相乘,乘积仍为 $m \times n$ 的矩阵,记作 $c\boldsymbol{A}$,法则为 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素乘 c.

这两种运算统称为线性运算,它们满足以下规律:

① 加法交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

② 加法结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

③ 加乘分配律:$c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B},(c+d)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}$.

④ 数乘结合律:$c(d\boldsymbol{A})=(cd)\boldsymbol{A}$.

⑤ $c\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow c=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

转置:把一个 $m \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列互换,得到的 $n \times m$ 的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{A}'$).

有以下规律:

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

③ $(c\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=c(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

(3) n 阶矩阵和几类特殊矩阵

行数和列数相等的矩阵称为方阵，行列数都为 n 的矩阵也常常叫做 **n 阶矩阵**.

把 n 阶矩阵的从左上到右下的对角线称为它的主对角线，或简称对角线.(其上的元素行号和列号相等.)

下面列出几类常用的 n 阶矩阵，它们都是考试大纲中要求掌握的.

对角矩阵：主对角线外的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

单位矩阵：主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{I}$).

数量矩阵：主对角线上的元素都等于一个常数 c 的对角矩阵，它就是 $c\boldsymbol{E}$.

上(下)三角矩阵：主对角线下(上)的元素都为 0 的 n 阶矩阵.

对称矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵.也就是对任何 i,j，(i,j) 位的元素和 (j,i) 位的元素总是相等的 n 阶矩阵.

反对称矩阵：满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵.也就是对任何 i,j，(i,j) 位的元素和 (j,i) 位的元素之和总等于 0 的 n 阶矩阵. 反对称矩阵对角线上的元素一定都是 0.

(4) 矩阵的初等变换和阶梯形矩阵

矩阵的**初等行变换**有以下三种：

① 交换两行的上下位置.

② 用一个非 0 的常数乘某一行的各元素.

③ 把某一行的倍数加到另一行上.

类似地，矩阵还有三种**初等列变换**，大家可以模仿着写出它们，这里省略了. 初等行变换与初等列变换统称**初等变换**.

阶梯形矩阵：一个矩阵称为阶梯形矩阵，如果满足：

① 如果它有零行，则都出现在下面.

② 如果它有非零行，则每个非零行的第一个非 0 元素所在的列号自上而下严格单调递增.

阶梯形矩阵的每个非零行的第一个非 0 元素的位置称为它的**阶梯台角**，简称**台角**.

简单阶梯形矩阵：是特殊的阶梯形矩阵，特点为：每个台角上的元素为 1，并且其正上方的元素都为 0.

每个矩阵都可以用初等行变换化为阶梯形矩阵和简单阶梯形矩阵.这种运算是线性代数的各类计算题中频繁运用的基本运算，必须十分熟练.

一个矩阵用初等行变换化得的阶梯形矩阵不是惟一的，但是它们在形式上相同(即非零行数相等，台角位置相同)；化出的简单梯形矩阵是惟一的.

(二) 向量

(1) 基本概念

向量是另一种描述事物形态的数量形式.

由 n 个数构成的有序数组称为一个**n 维向量**，称这些数为它的**分量**.本书中常用小写黑体希文字母表记向量.

书写中可用矩阵的形式来表示向量，例如分量依次是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的向量可表示成

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ 或 } \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

请注意，作为向量它们并没有区别，但是作为矩阵，它们不一样(左边是 $1 \times n$ 矩阵，右边是 $n \times 1$ 矩阵).通常把它们分别称为行向量与列向量.请注意它们和下面规定的矩阵的行向量、列向量的区别.

一个 $m \times n$ 的矩阵的每一行是一个 n 维向量，称为它的**行向量**；每一列是一个 m 维向量，称为它的**列向量**.常常用矩阵的列向量组来写出矩阵，例如当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 时(它们都是表示为列的形式!)，记为 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

矩阵的许多概念也可对向量规定，如向量的相等，零向量(记号也用 $\boldsymbol{O}$) 等等.这里从略.

(2) 线性运算和线性组合

向量也有加减法和数乘这两种线性运算，并且也有完全一样的运算规律，这里也不再复述了.

向量组的线性组合：设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组 n 维向量，$c_1, c_2, \cdots, c_s$ 是一组数，则称 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1 + c_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + c_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的(以 $c_1, c_2, \cdots, c_s$ 为系数的) **线性组合**.它也是 n 维向量.

(三) 线性方程组

(1) 基本概念

线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中未知数的个数 n 和方程的个数 m 不必相等.分别称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}) = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

为方程组的**系数矩阵**和**增广矩阵**.

如果 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$，则称为**齐次线性方程组**.把一个非齐次线性方程组的每个方

程的常数项都换成 0,所得到的齐次线性方程组称为原方程组的**导出齐次线性方程组**,简称**导出组**.

线性方程组的解是一个 n 维向量$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,它满足:当未知数 x_i 都用k_i替代时每个方程都成为等式.

线性方程组的解的情况有三种:无解,惟一解,无穷多解.

n 维零向量总是齐次线性方程组的解,因此齐次线性方程组的解的情况只有两种:惟一解(即只有零解)和无穷多解(即有非零解).

(2) 同解变换与矩阵消元法

线性方程组的同解变换有三种:

① 交换两个方程的上下位置.

② 用一个非 0 的常数乘某个方程.

③ 把某方程的倍数加到另一方程上.

以上变换反映在增广矩阵上就是三种初等行变换.

线性方程组的基本求解方法是消元法,用增广矩阵或系数矩阵来进行,称为**矩阵消元法**,步骤如下:

① 写出方程组的增广矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})$,用初等行变换把它化为阶梯形矩阵$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\gamma})$.

② 用$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\gamma})$判别解的情况:

如果它的最下面的非零行为$(0,0,\cdots,0,d)$,则无解,否则有解.

有解时比较它的非零行数 r 与未知数个数n, $r=n$ 时惟一解, $r<n$ 时无穷多解.

③ 在有解时,写出$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\gamma})$所代表的阶梯形方程组(它与原方程组同解),用它来求解. 在有无穷多解时,通解的表达比较复杂,放在第四章讲.

如果是惟一解,可求解如下:去掉$(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{\gamma})$的零行,得 $n\times(n+1)$ 矩阵$(\boldsymbol{B}_0\mid\boldsymbol{\gamma}_0)$,用初等行变换将其化为$(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta}$ 就是解.

对于齐次方程组,只用把系数矩阵化为阶梯形矩阵,则只有零解 $\Leftrightarrow$ 此阶梯形矩阵的非零行数 $r=$ 未知数个数 n.

(四) 习题

1. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\3&1&-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&1&5\end{bmatrix},$$

求(1) $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$;(2) $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

2. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&x\\y&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}s-1&4\\-2&t+1\end{bmatrix},$$

已知 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=0$,求 x,y,s,t 的值.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足等式 $\boldsymbol{X}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{X}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{X}$.

4. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}=(2,-1,0,1),\quad \boldsymbol{\beta}=(-1,4,2,3),\quad \boldsymbol{\gamma}=(1,0,1,0),$$

求 $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\frac{3}{2}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$.

5. 已知 $(2,0,a)$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+\lambda x_3=4,\\ 3x_1+2x_2-5x_3=11,\\ 2x_1+x_2+x_3=\mu \end{cases}$$

的解,求 a,λ,μ.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,则(　　)成立.

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不对称,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不对称;

(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵;

(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称,$\boldsymbol{B}$ 不对称,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不对称;

(D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称,$\boldsymbol{B}$ 不对称,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可能对称,也可能不对称.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵,则(　　)正确.

(A) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵;

(B) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵;

(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是上三角矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;

(D) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶矩阵,则(　　)正确.

(A) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 都是对角矩阵;

(B) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三角矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是三角矩阵;

(C) 如果 $c\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 也是数量矩阵;

(D) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不是对角矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也不是对角矩阵.

9. 下列断言中正确的是(　　).

(A) 两个阶梯形的 $m\times n$ 矩阵之和也是阶梯形矩阵;

(B) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是阶梯形矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的最下面的行向量是零向量;

(C) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶的阶梯形矩阵,记 a_{ii} 是它的主对角线上的第 i 个元素,则当 $a_{ii}=0$ 时,$\forall j>i, a_{jj}=0$;

(D) 阶梯形矩阵的等于 0 的元素个数多于不等于 0 的元素的个数.

10. 用初等行变换化下列矩阵的阶梯形矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & a & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

11. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶的阶梯形矩阵，并且没有零行. 它用初等行变换化出的简单阶梯形矩阵是什么矩阵？

（五）习题参考答案

1. (1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.　　(2) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -7 \\ 9 & -2 & -17 \end{bmatrix}$.

2. $x=-2$, $y=1$, $s=-5$, $t=-5$.

3. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{2}+\dfrac{3}{2}\boldsymbol{\beta}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2},3,5\right)$；　　$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}=(-1,7,3,7)$.

5. $a=-1$, $\lambda=-2$, $\mu=3$.

6. (C).

7. (A).

8. (A).

9. (C).

10. 答案不惟一，这里省略. 下面写出化出的简单阶梯形矩阵.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) $a=5$ 时，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$a\neq5$ 时，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

第一章　行　列　式

一、考试大纲要求

(一) 考试内容

行列式的概念和基本性质、行列式按行(列) 展开定理.

(二) 考试要求

1. 了解 n 阶行列式的概念,掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列) 展开定理计算行列式.

二、基本内容与重要结论

1.1　形式和意义

形式:用 n^2 个数排列成的一个 n 行 n 列的表格,两边界以竖线,就成为一个 **n 阶行列式**.

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应的行列式记作 $|\boldsymbol{A}|$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

如果行列式的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,则此行列式可表示为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|$.

意义:是一个算式,把 n^2 个元素按照一定的法则进行运算,得到的数值称为这个行列式的**值**.

注意行列式和矩阵在形式和意义上的区别.当两个行列式的值相等时,就可以在它们之间写等号!(不必形式一样,甚至阶数可不同.)

1.2　定义(完全展开式)

2 阶和 3 阶行列式的计算公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

一般地,一个 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值是许多项的**代数和**,每一项都是取自不同行,不同列的 n 个元素的乘积,其一般形式为:

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里把相乘的 n 个元素按照行标的大小顺序排列,它们的列标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 构成 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列(称为一个 n 元排列),一共有 $n!$ 个 n 元排列,因此共有 $n!$ 个项.

所谓代数和是在求总和时每项先要乘 $+1$ 或 -1.规定 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为全排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的逆序数(即小数排列在大数后面的现象出现的个数,例如 6 元排列 231645 有 4 个逆序:21,31,64,65,因此 $\tau(231645)=4$),则所乘的是 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.称上式为 n 阶行列式的**完全展开式**.

1.3 性　质

行列式有以下性质:

① 把行列式转置则值不变.

② 某一行(列)的公因子可提出.

③ 对一行或一列可分解,即如果某个行(列)向量 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$,则原行列式等于两个行列式之和,这两个行列式分别是把原行列式的该行(列)向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 换为 $\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\gamma}$ 所得到的行列式.