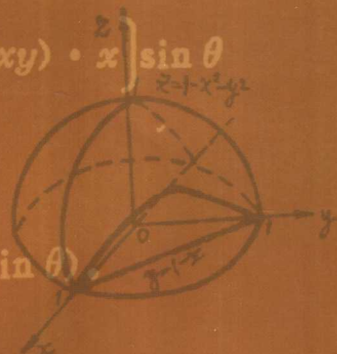
屈宏香◎主编
黄　旭◎主审

多元微积分

——高等职业技术学院通用教材

$$+\left[\frac{\partial z}{\partial u}(-2y)+\frac{\partial z}{\partial v}(-\sin xy)\cdot x\right]\sin\theta$$



$$=\frac{\partial z}{\partial u}2(x\cos\theta-y\sin\theta)$$

$$-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\sin xy\cdot(y\cos\theta+x\sin\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta}$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

SWJUP 西南交通大学出版社

高等职业技术学院通用教材

多元微积分

屈宏香　主编
黄　旭　主审

西南交通大学出版社
·成都·

内 容 简 介

本教材是在教育部最新制定的高职高专高等数学课程基本要求的精神指导下编写的，是作者根据多年从事本课程教学和教研的体会，利用数形结合的方法，结合高职教育的特点精心撰写而成的.

教材共分四章，主要内容有：向量代数、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分. 每节后面都有足够的习题，并在书末集中给出答案.

本书适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职的数学教学，也可作为高职学生的自修教材.

图书在版编目（CIP）数据

多元微积分 / 屈宏香主编. —成都：西南交通大学出版社，2003.6（2004.7 重印）
高等职业技术学院通用教材
ISBN 7-81057-714-X

Ⅰ. 多… Ⅱ. 屈… Ⅲ. 微积分 - 高等学校：技术学校 - 教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 032035 号

高等职业技术学院通用教材
多 元 微 积 分
屈宏香 主编
黄 旭 主审
*
责任编辑 刘婷婷
封面设计 何东琳设计工作室
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：87600564)
四川森林印务有限责任公司印刷
*
开本：850 mm × 1168 mm 1/32 印张：8.5
字数：204 千字 印数：5101—8700 册
2003 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 2 次印刷
ISBN 7-81057-714-X/O · 048
定价：13.00 元

序　言

多元微积分是高等数学中不可缺少的重要内容。它包括向量代数和空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、线积分和面积分。本书是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写的，适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职，也适用于三年制普通大专，是高职学生自考本科或专升本必不可少的参考书。

本书有以下特色：

1. 突出了数学概念的物理来源和几何背景，使读者从实际问题中深刻理解数学概念。

2. 采用数形结合的方法，充分利用图形阐明数学概念和定理，收到了攻破难点的效果。

3. 在部分内容的叙述上有独到之处，创新意识强。例如母线平行 z 轴的柱面方程 $F(x, y)=0$ 的引入，两异面直线间的距离等都有别于其他教材。

4. 书中例题较多且有代表性，既有基本题也有提高题；既有利于消化掌握基本知识，又有利于综合运用知识解决实际问题；有利于自学。

5. 精心选编习题，综合检测所学知识，书后附有答案，少数题附有提示。

6. 叙述简明，语言严谨，图形直观，数据准确。

本书由屈宏香主编，黄旭主审。各章节编写分工如下：第一章向量代数与空间解析几何由黄晓津编，第二章多元函数微分法及

其应用由刘东海编，第三章重积分、第四章曲线积分和曲面积分由屈宏香编。

在编写过程中，得到了湖南铁道职业技术学院的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和不当之处请同行和读者指正。

编　者

2003 年6 月

目　　录

第一章　向量代数与空间解析几何 …… 1

第一节　空间直角坐标系 …… 1

习题 1.1 …… 5

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法 …… 6

习题 1.2 …… 12

第三节　向量的坐标 …… 12

习题 1.3 …… 20

第四节　数量积　向量积 …… 20

习题 1.4 …… 28

第五节　平面及其方程 …… 28

习题 1.5 …… 35

第六节　空间直线及其方程 …… 36

习题 1.6 …… 46

第七节　曲面及其方程 …… 47

习题 1.7 …… 54

第八节　二次曲面 …… 55

习题 1.8 …… 65

第九节　空间曲线及其方程 …… 65

习题 1.9 …… 72

第二章　多元函数微分法及其应用 …… 74

第一节　多元函数的基本概念 …… 74

习题 2.1 …… 83

第二节　偏导数 ………………………………………………… 84
习题 2.2 ……………………………………………………… 92
第三节　全微分及其应用 ………………………………… 93
习题 2.3 …………………………………………………… 102
第四节　多元复合函数的求导法则……………………… 103
习题 2.4 …………………………………………………… 111
第五节　隐函数的求导公式………………………………… 112
习题 2.5 …………………………………………………… 120
第六节　微分法在几何学上的应用……………………… 121
习题 2.6 …………………………………………………… 130
第七节　多元函数的极值及其求法……………………… 131
习题 2.7 …………………………………………………… 142

第三章　重积分……………………………………………… 143

第一节　二重积分的概念和性质………………………… 143
习题 3.1 …………………………………………………… 149
第二节　在直角坐标系中计算二重积分………………… 150
习题 3.2 …………………………………………………… 157
第三节　在极坐标系中计算二重积分…………………… 159
习题 3.3 …………………………………………………… 165
第四节　二重积分的应用………………………………… 166
习题 3.4 …………………………………………………… 174
第五节　三重积分的概念及其计算……………………… 175
习题 3.5 …………………………………………………… 184
第六节　三重积分的应用………………………………… 186
习题 3.6 …………………………………………………… 190

第四章　曲线积分与曲面积分…………………………… 192

第一节　对弧长的曲线积分……………………………… 192

习题 4.1 …………………………………………………… 198
第二节 对坐标的曲线积分…………………………………… 199
习题 4.2 …………………………………………………… 211
第三节 格林公式及其应用…………………………………… 212
习题 4.3 …………………………………………………… 221
第四节 对面积的曲面积分…………………………………… 223
习题 4.4 …………………………………………………… 229
第五节 对坐标的曲面积分…………………………………… 230
习题 4.5 …………………………………………………… 242
习题答案……………………………………………………… 245
参考文献……………………………………………………… 262

第一章　向量代数与空间解析几何

大家都知道，在平面解析几何中是用平面直角坐标系这一个有力的工具来解决平面图形的问题的. 那么在解决空间图形的问题中，是否也有类似的工具呢？与平面解析几何相仿，有空间解析几何这一有力的工具. 在这一章中将讨论空间直角坐标系的建立以及怎样利用这个坐标系来研究空间图形.

同时，由于向量在很多领域中有着广泛的应用，因此我们还将利用这个坐标系来研究向量，这就是向量代数.

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

1. 空间直角坐标系的建立

在空间，任意取一定点 O 和三条经过 O 且两两互相垂直的坐标轴 Ox，Oy 和 Oz，而且这三条坐标轴的相对位置构成右手系，即令右手的拇指、食指、中指两两互相垂直，此时拇指、食指和中指应分别指向坐标轴 Ox，Oy 和 Oz 的正方向，如图 1.1 所示，这样我们就建立了一个**空间直角坐标系**.

我们将这个空间直角坐标系用 $Oxyz$ 表示，将 O 点称为坐标**原点**，分别将坐标轴 Ox，Oy 和 Oz 称为 x 轴，y 轴和 z 轴（或称为**横轴，纵轴和竖轴**），统称为**坐标轴**. 通常空间直角坐标系是这样选取的：从观察者的角度来看，z 轴指向上方；x 轴指向自己；y 轴指向右方.

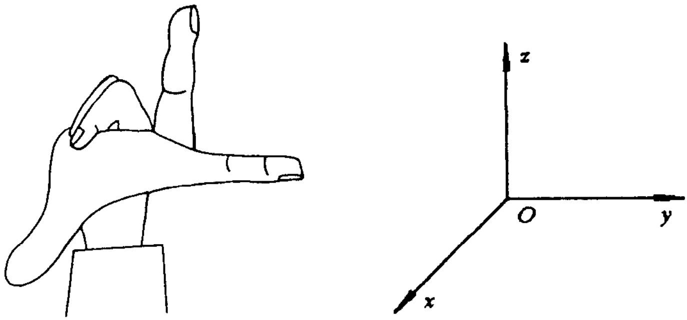


图 1.1

三条坐标轴中的每两条可以确定一个平面，其中由 x 轴和 y 轴所确定的平面叫 xy 面；由 y 轴和 z 轴所确定的平面叫 yz 面；由 z 轴和 x 轴所确定的平面叫 zx 面，统称为**坐标面**. 这三个两两垂直的坐标面将空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**. 各卦限的编号是这样确定的：

在 xy 面的上方的四个卦限中，含 x 轴和 y 轴正半轴的那个卦限称为第 Ⅰ 卦限；其余三个卦限依次称为第 Ⅱ，第 Ⅲ 和第 Ⅳ 卦限，按逆时针方向确定；

在 xy 面的下方的四个卦限中，第 Ⅰ 卦限的下方称为第 Ⅴ 卦限；其余三个卦限依次称为第 Ⅵ，第 Ⅶ 和第 Ⅷ 卦限，按逆时针方向确定，如图 1.2 所示.

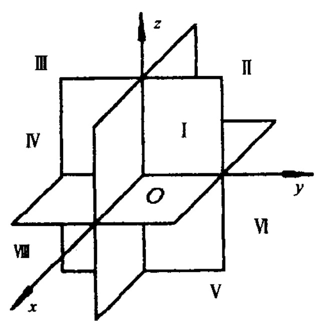


图 1.2

在建立了坐标系之后，对于空间任意点 P，可确定它的坐标如下：通过 P 点，作三个平面分别与三个坐标面平行，它们和坐标轴 Ox，Oy 和 Oz 分别交于 A，B，C，如图 1.3 所示.

由立体几何知道，给定一点 P 后，A,B,C 三点就完全确定. 设这三点在坐标轴 Ox,Oy 和 Oz 上的坐标分别为 x,y 和 z，这样，给定空间任意一点 P 后，就惟一确定一个有序三元数组 (x,y,z)；反之，给定任意一个有序三元数组 (x,y,z) 后，也可以惟一确定空间的某一点 P. 于是，在建立了空间坐标系后，空间的点 P 和有序三元数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应的关系.

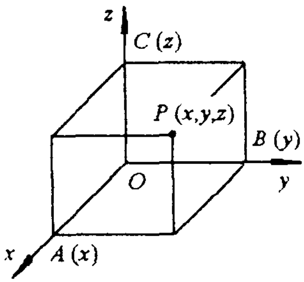


图 1.3

我们将 (x,y,z) 叫做点 P 的**坐标**，记为 $P(x,y,z)$，并分别称 x,y 和 z 为点 P 的**横坐标、纵坐标**和**竖坐标**.

最后，我们指出，原点的坐标为 $(0,0,0)$；坐标轴 Ox,Oy 和 Oz 上的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；三个坐标面 xy 面，yz 面和 zx 面上的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$；而各卦限内的点的符号如下：

Ⅰ(+,+,+)； Ⅱ(−,+,+)； Ⅲ(−,−,+)； Ⅳ(+,−,+)；
Ⅴ(+,+,−)； Ⅵ(−,+,−)； Ⅶ(−,−,−)； Ⅷ(+,−,−).

2. 点在空间坐标系中的画法

现在讨论怎样在空间直角坐标系中画出已知点 $P(x,y,z)$ 的问题.

我们知道，在平面上画立体图形是有很大的局限性的：空间不同的点，画在平面上时，可能有相同的位置. 虽然这个问题不好解决，但是这里介绍一种画法，按照这种画法，往往可获得较好的直观的效果.

在平面上，先画出如图 1.4 所示的坐标系，令 y 轴和 z 轴的单位长度相等，但 x 轴的单位长度等于 y 轴或 z 轴的单位长度的

$\sqrt{2}/2$. 换句话说,若以 y 轴和 z 轴的单位长度作正方形的边,则在平面上,令 x 轴的单位长度等于正方形的对角线的一半. 这样,直观上就会觉得这三个轴上的单位长是大体相等的.

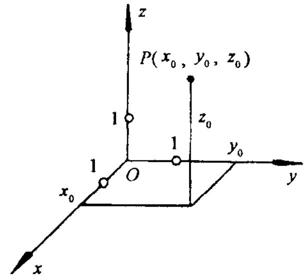


图 1.4

有了以上规定,已知一点 P 的坐标 x,y 和 z,就可以比较直观地将这一点在空间直角坐标系的位置画在平面上了. 具体画法,可以像图 1.4 那样画折线表示,也可以像图 1.5 那样画立方体表示.

二、空间两点间的距离

为了举例说明直角坐标系的运用,我们试求空间任两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离公式.

过 P_1 作三个平面分别平行于三个坐标面,且和坐标轴 Ox,Oy 和 Oz 分别交于 $A_1(x_1,0,0)$,$B_1(0,y_1,0)$和 $C_1(0,0,z_1)$;过 P_2 作三个平面分别平行于三个坐标面,且和坐标轴 Ox,Oy 和 Oz 分别交于 $A_2(x_2,0,0)$,$B_2(0,y_2,0)$和 $C_2(0,0,z_2)$,如图 1.5 所示.

这六个平面构成一个长方体,它的三个边长分别为 $a=|x_2-x_1|$,$b=|y_2-y_1|$,$c=|z_2-z_1|$,

在图 1.5 中,由平面几何的知识可知,

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

又由于 $$|P_2M|=|z_2-z_1|=\sqrt{(z_2-z_1)^2},$$

故在直角三角形 P_1P_2M 中,

$$|P_1P_2|=\sqrt{|P_1M|^2+|P_2M|^2}=\sqrt{|AB|^2+|P_2M|^2},$$

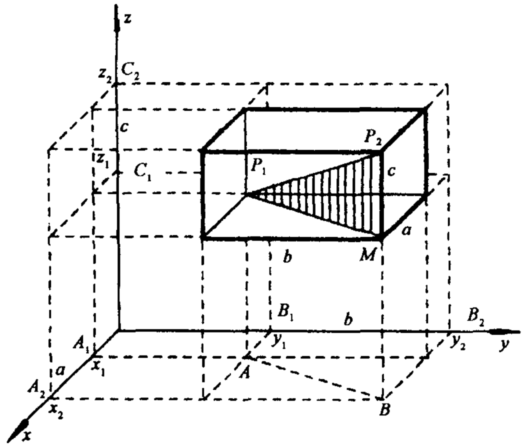


图 1.5

即 $$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1.1)$$

例 1 求 $A(3,0,2)$与 $B(5,-1,1)$之间的距离.

解 $$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\\&=\sqrt{(3-5)^2+[0-(-1)]^2+(2-1)^2}\\&=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

例 2 求点 $M(4,-3,5)$到 y 轴的距离.

解 过点 M 作一平面与 y 轴相交,设交点为 A,则$|AM|$为所求的距离. 又 A 点的坐标为 $A(0,-3,0)$(参见图 1.4),故

$$|AM|=\sqrt{(4-0)^2+[-3-(-3)]^2+(5-0)^2}=\sqrt{41}.$$

习 题 1.1

1. 试求 $A(3,-1,2)$与 $B(-1,1,4)$的距离.

2. 在 x 轴上找一点,使它与点 $M(4,1,2)$的距离为 $\sqrt{30}$.

3. 求证以 $A(4,3,1)$,$B(7,1,2)$与 $C(5,2,3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

4. 在 yz 面上,求与 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$,$C(0,5,1)$等距离的点.

5. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$,$B(3,5,-2)$等距离的点的坐标.

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

在这一节以及后面的两节中,将利用空间直角坐标系来研究向量,换句话说,利用数来研究向量. 将这种研究向量的方法称为向量代数.

一、向量的概念

在实际问题中,经常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如力、力矩、速度等,这一类量叫**向量**.

定义 1　向量是既有大小又有方向的量.

在数学上,我们往往用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点,B 为终点的有向线段的向量,记为 $\overrightarrow{AB}$,如图 1.6 所示. 有时也用一个粗体小写字母或用一个上面加箭头的小写字母来表示向量,例如 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$.

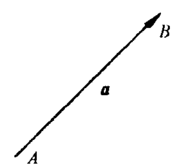


图　1.6

向量的大小叫向量的**模**,记为 $|\overrightarrow{AB}|$,$|\boldsymbol{a}|$ 或$|\vec{a}|$. 模为 1 的向量叫**单位向量**,通常将与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量用 $\boldsymbol{a}^{\circ}$表示. 模为零的向量叫**零向量**,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的长度为零,没有确定方向,我们**规定所有的零向量均相等**.

由向量的模以及单位向量的定义不难得出,与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}. \tag{1.2}$$

与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同但方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$，如图 1.7 所示.

在直角坐标系中，以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫点 M 对于点 O 的**向径**，通常用粗体小写字母 $\boldsymbol{r}$ 或 $\vec{r}$ 表示.

在本章中，我们所研究的向量只与它们的大小和方向有关，而与它们的起点所处的位置无关，这样的向量叫**自由向量**. 今后所说的向量，若无特别说明，均指自由向量.

规定：**若两个向量方向相同，且模相等，则认为这两个向量是相等的**，即相等的两个向量可以通过平行移动的方法使它们完全重合. 如图 1.8 所示的三个向量，它们的关系可以记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

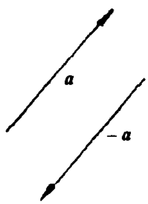


图 1.7

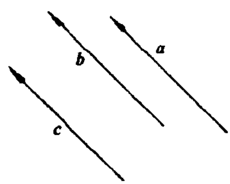


图 1.8

二、向量的加减法

在物理学中，作用于一个物体上的两个力可以看做是两个向量，它们的合力就是以这两个力作为边的平行四边形的对角线上的向量. 这里关于两个向量的加法就是对合力这一概念作数学上的抽象和概括的结果.

1. 向量的加法

设已给向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，以任意点 O 为起点，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，再以 OA,OB 为边作平行四边形 $OACB$，则对角线上的向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫向量加法，上述求向量和的作图法叫**平行四边形法则**，如图 1.9 所示.

求向量和还有另一种方法，如图 1.10 所示，从空间一点引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，从 $\boldsymbol{a}$ 的终点引向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求向量和的作图法叫三角形法.

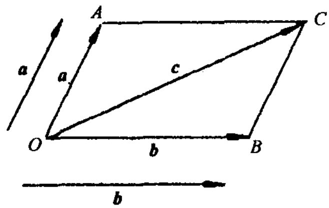


图 1.9

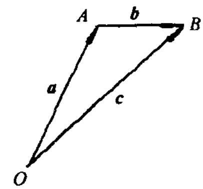


图 1.10

对于任意向量，我们有

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}.$$

向量加法满足下列运算律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；　(1.3)

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.　(1.4)

这可以从图 1.11 和图 1.12 中得到验证.

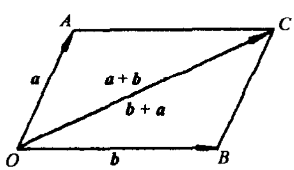


图 1.11

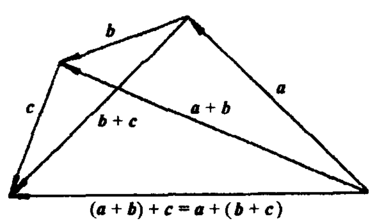


图 1.12

由于向量加法满足交换律和结合律，故多个向量之和的表达式中不需加任何括号，各向量的次序也可以任意调换.

多个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由三角形法则推广如下：由空间任一点 O 引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，由 A_1 引 $\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，最后由