骆克仁编

人口应用数学

甘肃科学技术出版社

人口应用数学

骆克任　编

甘肃科学技术出版社

责任编辑：毕　伟
封面设计：谢艺平
版式设计：陈安庆

人口应用数学

骆克任　编

甘肃科学技术出版社出版
（兰州第一新村81号）
甘肃省新华书店发行　天水新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32　印张6.25　字数148,000
1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷
印数：1——3,000
ISBN 7-5424-0035-5/C·1　定价：1.50元

前　　言

在我国经济和社会发展中，人口问题始终是极为重要的问题。要了解和处理好人口问题，首先要分析和掌握与人口有关的具体规律。对这些规律的认识和叙述，只有在既作定量描述又做定性说明后，才显得比较细致和准确。不做数据的积累和处理工作，不摸索规律，而是凭借想象来决断，依靠折衷方案来调和，或者生搬硬套地借用他人经验，其结果肯定都不会令人满意。

认识人口中反映出的本质关系上的数量规律的途径，就是进行大量的人口统计、分析和规划工作，作好这些工作的前提，就需要具备有关的数学知识。然而，必要的数学知识正是目前许多从事人口工作和人口研究的人员所欠缺的，特别是广大的计划生育专职干部急待于在这方面得到培训和提高。

本书的目的在于提供一本紧密结合国内外人口统计、分析与规划工作的数学教材，以利教学和自修之用。在内容上力求由浅入深，简洁而系统地讲解人口工作中所需的初等数学和高等数学知识，并体现数学上的严谨和完善。全书分初等数学、微积分学、行列式和矩阵、数理统计知识等四章。为了易读、易懂其中的内容，以联系在人口工作中的实际应用，在书中配有较多的应用在人口学上的实例和习题，并附有一些重要的人口学基本知识。因此，从一定意义上说，本书也是从事人口工作和研究的跨学科的工具书。

本书在定稿前，经马元鹏同志审校，并提出了宝贵的修改意见，谨在此致谢。

人口学在发展，由于作者水平有限，书中内容必有不到和谬误之处，望批评指正。

编　者

目　录

前　言 ………………………………………………………………（1）

第一章　初等数学 ……………………………………………………（1）

1.1　代数基础 ……………………………………………………（1）

1.2　乘法公式和因式分解 ……………………………………（4）

1.3　分式 …………………………………………………………（7）

1.4　根式 …………………………………………………………（8）

1.5　平均数、均方偏差与算术加权平均数 ………………（11）

1.6　方程式 ………………………………………………………（13）

1.7　不等式 ………………………………………………………（18）

1.8　数列 …………………………………………………………（20）

1.9　排列与组合 …………………………………………………（23）

1.10　百分比、比、比率及比例 ……………………………（25）

1.11　函数 ………………………………………………………（28）

1.12　公式、表与图像 …………………………………………（28）

1.13　指数函数与对数函数 ……………………………………（39）

1.14　常用的人口指标的定义和公式 …………………………（42）

习　题 ……………………………………………………………（52）

第二章　微积分学 ……………………………………………………（56）

2.1　极限 …………………………………………………………（56）

2.2　一元函数微分学 ……………………………………………（59）

2.3　多元函数微分学 ……………………………………………（78）

2.4 积分学……………………………………………………(86)
习 题……………………………………………………(97)
第三章 行列式与矩阵……………………………………(100)
3.1 线性方程组与行列式……………………………(100)
3.2 行列式的主要性质………………………………(104)
3.3 行列式的展开……………………………………(106)
3.4 克兰姆法则………………………………………(110)
3.5 矩阵和矩阵的秩…………………………………(112)
3.6 解一般线性方程组的步骤………………………(114)
3.7 矩阵的运算………………………………………(119)
3.8 特殊矩阵…………………………………………(122)
3.9 逆矩阵法解线性方程组…………………………(127)
3.10 线性变换…………………………………………(129)
3.11 矩阵在人口测算中的应用………………………(130)
3.12 人口规划…………………………………………(137)
习 题……………………………………………………(139)
第四章 数理统计基础……………………………………(142)
4.1 数理统计及其在控制人口中的用途……………(142)
4.2 人口抽样调查……………………………………(147)
4.3 位置量数…………………………………………(149)
4.4 变异量数…………………………………………(151)
4.5 分组资料的平均数、方差和标准差……………(153)
4.6 正态分布…………………………………………(153)
4.7 人口抽样误差与抽样数的确定…………………(159)
4.8 回归分析…………………………………………(162)
习 题……………………………………………………(187)
参考文献……………………………………………………(190)

第一章

初等数学

1.1 代数基础

1.1.1 有理数

在客观实际中，许多事物的数量在性质上是相反的。如温度的上升和下降，财务的收入和支出、人口的出生和死亡等。若要计算这些数量的总数，这就不仅要知道这些数量的多少，还要知道上述的性质。在代数学中，可用正负号来表示上述正好相反的性质。正和负是相对的，只有在它们的相互关系中才有意义。但是在正负两方面既经指定后，各个量的数字之前就必须按规定记正负号。符号“$-$”读为负，符号“$+$”读为正。加上“$+$”的数字是正数，加上“$-$”的数字就是负数。

正的整数和分数、负的整数和分数以及零统称为有理数。

有理数可以形象地表示在数轴上。数轴的画法是在一根直线上取一点为原点，记作 0，然后按一定的单位长度从点 0 向左右依次划分，一般规定从左向右是正方向，用箭头标出。这样规定了原点、方向和量度单位的直线，就作为数轴。

数轴上表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值，并用记号“$|a|$”表示。如-1和$+1$的绝对值都是 1，记作：

$$|+1|=|-1|=1$$

1.1.2 代数式

代数是算术的延伸，其主要特点是用字母代替数。用字母代替数有以下好处：首先，使我们摆脱具体数值的束缚，来阐明数的一般运算规律；其次，字母可以代表暂时还不知道数值的数（称为未知数）参加运算，以确定其值；其三，字母加脚注往往可以代表某些只能用很长的文字才能说明其确切涵义的数量，使式子能够简单明了地代表语言，有利于分析和研究。

用运算符号（如+、－、×、÷）将数和字母连结起来的式子，叫代数式。如果知道每个字母表示什么和它所使用的量度单位，则代数式的意义即可确定。

在代数式中，在给定问题的条件下，始终保持相同值的字母叫做常量，常量代表的数叫常数；取不同值的字母叫变量。同一个量在某一个问题中是常量，而在另一个问题中可以是变量。和字母相乘的常数，一般称为系数。

比如人口性比例系数可以用下面的代数式表示：

$$\frac{P_m}{P_w}\times 100$$

（P_m代表男性人口数，P_w代表女性人口数，100是常数）

上述代数式就表示某总人口数中，女性为100时，男性相对的为多少，系数100使得代数式的意义更加明确。

1.1.3 基本运算规则

加减法规则：同号两数相加，绝对值相加，符号与加数同；异号两数相加，绝对值相减（大的减小的），符号与绝对值大的加数相同；减法是加法的逆运算，两个数相减只须把减数变成同它符号相反的数，即可按加法规则运算。

例1：$(+a)+(-b)=a-b$

例2：$(-a)-(-b)=-a+b$

乘除法规则：同号两数相乘，绝对值相乘，符号为正；异号两数相乘，绝对值相乘，符号为负。除法是乘法的逆运算，同号两数相除，绝对值相除，符号为正，异号两数相除，绝对值相除，符号为负；零不能做除数。

例1：$(+a)\times(-b)=-ab$

例2：$(-a)\div(-b)=a\div b$

四则混合运算规则：先乘除，后加减，先括号内，后括号外。

三个基本运算律：

交换律：$a+b=b+a$，

$a\times b=b\times a$

结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，

$(ab)c=a(bc)$

分配律：$(a+b)c=ac+bc$

例如：

$$\begin{aligned}&a+2[3a-(2+3\div 3)]\\=&a+2[3a-(2+1)]\\=&a+2(3a-3)\\=&a+6a-6\\=&7a-6\end{aligned}$$

.1.4 乘方

n个数a相乘

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n个}=a^n$$

称为a的n次方，又称为a的n次幂，a称为幂底数，n称为幂指数。

乘方的符号规则是：

$$a^n=\begin{cases}|a|^n, & \text{当}a>0\text{或}a<0\text{，且}n\text{为偶数时；}\\ -|a|^n, & \text{当}a<0\text{，且}n\text{为奇数时；}\\ 1\quad, & \text{当}a\neq 0\text{，且}n=0\text{时}\end{cases}$$

幂有以下三个运算规律：

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加。

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

幂的乘方，底数不变，指数相乘。

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

乘积的幂等于幂的乘积。

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

例1： $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

例2： $(5^3)^4 = 5^{3\times 4} = 5^{12}$

例3： $(5\times 3)^2 = 5^2 \times 3^2 = 225$

1.2 乘法公式和因式分解

应用上节的知识可以进行以下的乘法运算：

$$(a+b)(a-b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2,$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2$$
$$= a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ab+b^2$$
$$= a^2-2ab+b^2,$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$= a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$= a^3-b^3$$

类似以上的运算叫做多项式乘法。对于经常用到的多项式乘法，可以直接应用公式。从以上五例可直接写出乘法公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

另外还可以写出和或差的立方公式：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

例1： $(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$

例2： $(x^2-3)^2=x^4-6x^2+9$

例3： $(2x+3)(4x^2-6x+9)=(2x+3)[(2x)^2-3(2x)+3^2]=(2x)^3+3^3=8x^3+27$

例4： $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$=[(x+1)(x^2-x+1)][(x-1)(x^2+x+1)]$$
$$=(x^3+1)(x^3-1)$$
$$=x^6-1$$

二项式定理可以帮助求算 $(x+y)^n$型的乘法。

二项式定理：二项式 $(x+y)^n$可展开如下：

$$(x+y)^n=c_n^0x^n+c_n^1x^{n-1}\cdot y+c_n^2x^{n-2}\cdot y^2+\cdots+c_n^n\cdot y^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}c_n^kx^{n-k}y^k$$

式中n为正整数，c_n^k称为二项系数。用著名的杨辉三角形，仅采用加法就能求出二项系数。可以看到在杨辉三角形中，各行的开

					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

杨辉三角形

头及末尾都是1，而中间的数是由上一行相邻两数相加得到。三角形中某一行中各数正是对应幂的二项式各系数。

如展开 $(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$。这里二项系数正是取自杨辉三角形的第六行。

例：求 $(1+r)^n$ 的值，这里 r 是比1小的量，而 n 是很大的。

解：根据二项式定理

$$(1+r)^n=1+nr+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}r^2+\cdots+r^n,$$

因为 n 很大，r 是比1小的量，所以上式可近似地写成：

$$(1+r)^n\approx 1+nr+\frac{n^2r^2}{1\cdot 2}+\frac{n^3r^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

可以证明等式右边正是 e^{nr} 的展开式，

故 $\quad (1+r)^n\approx e^{nr}$，其中 $e\approx 2.71828$

对于上面讲的代数式乘法的逆运算就是因式分解过程。以上八种特殊形式的乘法公式，只要等式两边交换一下，就是因式分解的公式了。因式分解用于简化一些繁杂的代数式。

因式分解经常是困难的，但仍有一些准则：

(1)将多项式的所有各项的相同因式提到括号外。

例：$7a^2xy-14a^5x^3=7a^2x(y-2a^3x^2)$

(2)有时可将各项分成几组后，将各组中的相同因式提到括号外，而使各括号内成为相同的式子。这时，又可将该式提到括号外，因而将多项式分解为因式。

例：$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)$

$$=(a+b)(x+y)$$

(3)上变换有时要在预先引入两个新（相消的）项或将一项分解为两个被加项后进行。

例：$p^2+pq-2q^2=p^2+2pq-pq-2q^2$

$$=p(p+2q)-q(p+2q)$$

$$= (p+2q)(p-q)$$

（4）有时可反向利用本节上面提到的一些有用的公式，来得到现成的分解因式。

例：$12+x^3-4x-3x^2=3(4-x^2)-x(4-x^2)$

$$=(4-x^2)(3-x)$$

$$=(2+x)(2-x)(3-x)$$

（5）由原式的形成可以得到暗示的另一有用的形式为：

x^2+ax+b 型：这因式将是 $(x+c)(x+d)$ 型的，这里 $c+d=a$ 和 $c\cdot d=b$。

例1： $x^2+11x+30=(x+6)(x+5)$

$c+d=11$，$c\cdot d=30$

$c=6$，$d=5$

例2： $x^2-11x+30=(x-6)(x-5)$

$c+d=-11$，$c\cdot d=30$

$c=-6$，$d=-5$

1.3 分　　式

当分母内出现字母时，该式叫分式。

1.3.1 分式的加减运算

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b},$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

法则：先通分，将分母化为同样的。为使计算简化，要对分子和分母(主要对分母)进行因式分解，将同一个分式中的分子和分母的公约因式约去，再将各个分式的分母的最小公倍式找出，

当作公分母计算。

例1：
$$\frac{1}{ax+bx}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(a+b)}+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{1}{x(a+b)}+\frac{a+b}{x\ (a+b)}$$
$$=\frac{1\ +a+b}{x(a+b)}$$

例2：
$$\frac{1}{a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a^2+ab+ab+b^2}+\frac{1}{a+b}$$
$$=\frac{1}{a(a+b)+b(a+b)}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{1\ +a+b}{(a+b)^2}$$

1.3.2 分式的乘、除运算

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

法则：分式的乘法，是分子乘分子，分母乘分母。分式的除法，用除式的倒数，去乘被除式。

例1：
$$\frac{a^2-2a-24}{5a-30}=\frac{(a-6)\ (a+4\ )}{5\ (a-\ 6\ )}=\frac{a+4}{5}$$

例2：
$$\frac{ab}{a^2-b^2}\div\frac{1}{a-b}=\frac{ab}{(a-b)(a+b)}\times(a-b)=\frac{ab}{c+b}$$

1.4 根　　式

1.4.1 开方和方根

开方是乘方的逆运算。若$a^2=b$，则a称为b的平方根，记为$a=\pm\sqrt{b}$，求平方根的运算称为开平方。若$a^3=b$，则a称为b的

立方根，记为$a=\sqrt[3]{b}$，求立方根的运算称为开立方。

开方法有笔算、查表（平方根表和立方根表）和使用电子计算机等。

1.4.2 实数和近似值

分数都能表示成有限小数或无限循环小数；反过来也一样。

例如：$\frac{1}{2}=0.5$；　　$0.5=\frac{1}{2}$；

$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$；　　$0.\dot{3}=\frac{1}{3}$

但是象$\sqrt{2}$一类的数，既不是有限小数，也不是无限循环小数。用笔算开平方，可以得到$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$，它是算不完的。又如$e=2.718281828\cdots$以及圆周率$\pi=3.1415926\cdots$都是这类无限不循环小数。

正负无限不循环小数叫做无理数。无理数和有理数统称为实数。有理数不能布满数轴，实数可以布满数轴。所以，数轴又叫实数轴。前面讲过的运算规律均适用于实数。

碰到无限不循环小数以及对一些有精度要求的数，都要用它们的近似值。求近似值一般有两种办法：

四舍五入法：如求$\sqrt{2}$与$\sqrt{5}$的精确到0.01的近似值：

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots\approx1.41,$$

$$\sqrt{5}=2.23606\cdots\approx2.24$$

四舍六入五单双法：此法比上法更合理。有个记忆的口诀是：四舍六入五考虑，五后非0则进1。五后皆零视奇偶，五前为偶应舍去，五前为奇则进一。

1.4.3 根式运算

数a的n次方根是指求一个数，它的n次方恰好等于a。a的n次方根记为$\sqrt[n]{a}$（n为大于1的自然数）。作为代数式，$\sqrt[n]{a}$称为根式，n称为根指数，a称为根底数。在实数范围内，负数不能开偶次方；一个正数开偶次方有绝对值相同，符号相反的两个方根。

正数的正方根称为算术根。零的算术根规定为零。

根式的运算规则有：

乘积的方根：$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$　　（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）

分式的方根：$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　　（$a\geqslant 0$，$b>0$）

根式的乘方：$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　（$a\geqslant 0$）

根式的化简：$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$　　（$a\geqslant 0$）

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}\qquad (a>0)$$

同类根式及其加减运算：根指数和根底数都相同的根式称为同类根式，只有同类根式才可用加减运算进行合并。

例1：$\sqrt[6]{9x^4}=\sqrt[6]{(3x^2)^2}=\sqrt[3]{3x^2}$

例2：$\sqrt[4]{a^2b^2}=\sqrt{ab}$

例3：$(\sqrt[3]{2ax^2})^2=\sqrt[3]{(2ax^2)^2}=\sqrt[3]{4a^2x^4}=x\sqrt[3]{4a^2x}$

例4：$\frac{2}{3}\sqrt{9a}+6a\sqrt{\frac{a}{4}}-a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

$=2\sqrt{a}+3a\sqrt{a}-a\sqrt[3]{a}$

$=(2+3a)\sqrt{a}-a\sqrt[3]{a}$

分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　　（$a\geqslant 0$，m、n是正整数）

利用分数指数幂，可以把根式的运算转化为幂的运算。特别当进行根式的乘、除、乘方和开方运算时，利用分数指数幂。常比直接用根式来得简便。

例1：$\sqrt{125}\cdot\sqrt[4]{5}=5^{\frac{3}{2}}\ 5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}$

$=5^{\frac{7}{4}}$

例2：$\sqrt[4]{\left(\frac{16m^{-4}}{81n^4}\right)^3}=\left(\frac{2^4m^{-4}}{3^4n^4}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{2^3m^{-3}}{3^3n^3}$