

我知道什么

混沌

〔法〕 弗朗索瓦·吕尔萨 著
马金章 译



科学出版社
www.sciencep.com



我知道什么？

混



[法] 弗朗索瓦·阿尔萨 著

马金章 译

科学出版社

北京

图字：01-2003-0479 号

Que sais-je?

Le Chaos

François Lurçat

Presses Universitaires de France

©Presses Universitaires de France, 1999

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

图书在版编目(CIP)数据

混沌/[法] 吕尔萨著; 马金章译. —北京: 科学出版社, 2005

(我知道什么?)

ISBN 7-03-014223-3

I. 混… II. ①吕…②马… III. 混沌学-普及读物 IV. O415.5-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 107338 号

责任编辑: 沈红芬/文案编辑: 姚庆典/责任校对: 陈丽珠

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 张 放

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

2005 年 1 月第一次印刷 印张: 3 3/4

印数: 1—5 000 字数: 65 000

定价: 9.50 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

致 读 者

本书主要写给非专业读者，他们不需要任何数学知识。关于方程，我更喜欢用几何图形表示，因为比较直观。我不敢说对“混沌”的主要观点和发现做了严密的介绍。实际上，没有什么“科学上的光明大道”。混沌星系的核心是数学，如果没有数学，人们只能得到一个模模糊糊的概念。

所以编写本书的目的是有限的。我希望当人们提到混沌时，认真的读者会明白，它究竟是与什么有关，与什么无关，因为本题目的各种观点不是都凿凿有据。我希望他们能赏识这一科学潮流的哲学意义。混沌既是从伽利略到牛顿等物理奠基人及其后继者研究的继续，也是对数百年思想习惯的反思，使我们更好地理解数学与物理学的性质。

本书尽量简略了数学内容，但完全避免也不大可能。严格说来，读者可以跳过那些数学部分，结论还是用普通文字叙述的。不过，我建议仔细看看那些插图。

在目前了解的许多混沌现象中，本书只列举了若干例子。本书对某些细节尽量做了详细介绍，以便使大家明白。书后附的参考文献可以供读者查考，因为书中某些内容因故省略了。

目 录

致读者

第一章 运动分析	1
初始条件与运动定律	1
相空间	2
动态系统	4
行星运动：开普勒近似	5
第二章 运动学的经典概念	7
摄动法	7
运动常数与不变环面	9
可积系统	13
“科学是偶然性的敌人”	14
第三章 决定论系统的随机特性	16
对经典概念的慢慢质疑	16
麦克斯韦和初始条件的敏感性	17
庞加莱	19
三体问题轨迹	22
随机性	26
运动的近似计算	30
规则轨道与随机轨道	31



KAM 定理	36
第四章 太阳系中的混沌	39
太阳系中的混沌	39
小行星	40
陨石	43
土卫七	45
行星	47
冥王星	51
拉斯卡尔的研究	53
行星的斜率	55
地球不是寻常星	58
太阳系的临界稳定性	59
第五章 耗散系统	61
摩擦作用	61
一维应用	64
逻辑斯谛应用	65
周期的分支与加倍	72
混沌	74
普遍性	77
第六章 混沌现象	80
水龙头流水	80
洛伦茨与气象混沌	82
奇怪的吸引子	85
湍流	88





遗憾	90
第七章 思考	91
关键的转折	91
注意	94
决定论：一词四义	95
决定论与预测：拉普拉斯和庞加莱	98
时间尺度	101
偶然性	103
数学与物理学	106
参考文献	112

第一章

运动分析

初始条件与运动定律

20 世纪最伟大的物理学家之一尤金·威格纳 (Eugene Wigner) 说过：物理学的目的不是解释自然，而是发现其最简单的规律。在伽利略 (Galilée) 和牛顿 (Newton) 之前，人们就开始寻找最完整的解释了。为此，开普勒 (Kepler) 提出了一个太阳系理论：他的主要目的是算出各个行星到太阳的距离及行星的数量（当时只知道有 6 个）。他把每颗行星看作一个球体，在 6 个球体之间，他插入了普拉东 (Platon) 发现的 5 个规则多边形。牛顿迈出的一大步是清楚地区分物理学能解释的和应当放弃的部分。用它可以找出**运动定律**，但其**初始条件**则无法确定。

例如，假设我们抛出一块石头，物理学并不告诉我们它是从地表的哪个点抛出，并具有一定方向与速度的。这些数据叫做初始条件。但是，从伽利略以后，物理学便可以告诉我们石头的运动，只要知道一

定的初始条件便可。预测的方法是**运动定律**。一般来讲，只要初始条件确定，运动定律便可以惟一地确定运动。这就叫做**决定论**——这个重要话题后面我们还要讲（第二章和第七章）。

相 空 间

在头脑中，一块石头（这不是真石头，而是一个“**质点**”：一个忽略其体积或尺寸的物体）运动的第一描述是按时间变化的轨迹（轨迹在某时某刻经过某点）。但是，物理学从不考虑某一特定的运动：对于它，每个运动都是一个典型，是各种可能运动中的一个元素。

经空间一点，石头有无限个可能轨迹。只要知道经过某一点（初速度）时的速度（大小、方向），便可以将其描述。因此，经过物理空间每一点，都可能有无数条轨迹。

我们进一步抽象一下，现在取数学概念的“空间”，定义一个不仅包含位置，而且包含速度的空间。此空间的一点（六维，三维定义位置、三维定义速度）对应于一个质点的确定速度。此初始条件的空间叫做一质点的**相空间**。

一个运动的质点在每个时刻都具有一个确定的位置，而且，在每个时刻都具有一个确定速度；所以，移动的**相点**在每个时刻都有一个位置；然后，它在相

空间描绘一条曲线，叫做相轨迹。对于相轨迹的每个点，我们描绘出其在各个时刻的位置，就会得到完整的运动几何曲线。

现在最重要的是：大家知道，除非例外，初始条件确定全部运动（确定时间前后间定为“初始”）。从几何角度而言，其规则可表达为：**经过相空间的各点，可有一条相轨迹，并且仅有一条。**轨迹充满相空间，因为经过相空间的每一个点都有一条；它们互相从不相交、相切，因为每个点都有一条。这一简单几何规律是我们抽象的结果：接受一个相空间有六维（一质点时）的概念。

幸运的是，我们经常遇到一个位置仅由一个坐标描述的坐标系（如只考虑垂直运动的质点、铁轨上的车厢）。当相空间两维时，一维是位置，一维是速度（图 1.1）。这就是所谓的“一维运动”。

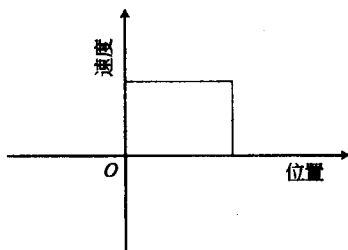


图 1.1 相平面
(一维运动相空间)

动态系统

现在，我们根据物理状态限定的条件（动力学），从运动的单纯描述（运动学）转到运动规律的研究。假设一质点不受任何力，或其受力互相抵消而合力为零，其速度大小、方向不变，这就是**惯性原理**。力不产生运动，而是改变运动：它改变速度，因而可以说是小小改变。几何上如此表示：在无穷小的时间内（无穷小，即此时间小于任何已知时间；实际上，物理学家认为时间极短，位置与速度变化则极小，我们所说的变化也极小）相点的位移在相平面分解为水平方向和垂直方向。

相点的水平移动（图 1.2）通过获得的速度描述质点位置的变化，它与此速度成正比；相点的垂直移动描述由于力的作用而使质点速度变化，它与此力成正比 [例如，水平移动 $dx = v dt$ ，垂直移动 $dv = (F/m) dt$]。

所以，在相空间的每个点都有一个向量（一个箭头），它给出相点无穷小位移的方向，或者说是经过这一点与相轨迹的切线方向（图 1.2）。可以说，所有这些向量定义一个**动态系统**，动态问题在于确定在已知动态系统时的相轨迹。应当指出，“动态系统”的表达是一个数学概念。在很简单的情况下，可以准确地确定一个动态系统的相轨迹，但是，在大多数情



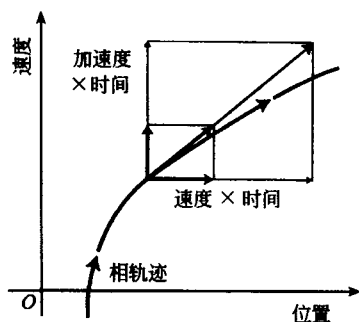


图 1.2 动态系统向量分解。无穷小时间相点的无穷小位移（粗箭头）。相轨迹与动态系统相切况下，只是近似地确定。

行星运动：开普勒近似

开普勒发现了太阳行星的三大定律，它们引起了数次科学革命。每颗行星有一个椭圆形轨道，太阳在一个焦点上，这就是第一定律。另两个定律说明行星在椭圆上运行的时间规律以及椭圆大小与在上面运动一周所用的时间。这些经验定律缺乏坚实的理论基础，而这理论基础还是牛顿奠定的。

为此，他使用了我们概括的原理：分开了初始条件与运动规律；动态的基本原理取决于运动，而运动则取决于力的大小，其关系可以用几何图形表示。牛



顿做了一个假设，作用力是太阳对行星的引力，即万有引力，它与太阳与行星距离平方的倒数成正比。

为了能确定动态系统的轨迹，牛顿首先简化了问题，求了一个根的近似，我们称之为开普勒近似：假设仅此行星绕太阳运行。由于异乎寻常地符合，可以使用开普勒定律。根据开普勒的观测（肉眼的观测！），他不能发现实际运动与其定律的偏差。在开普勒定律与观测之间，有着必不可少的符合性，它使天文学家和物理学家鼓足勇气继续研究。

但是，牛顿是怎样证明开普勒定律的呢？我们将他的发现用几何语言表示为两个主要论点：初始条件的概念给出相空间；运动定律给出动态系统。确定太阳系物体可能的运动，就是通过简化找出动态系统（数学目标），然后求出此系统的相轨迹。牛顿用开普勒近似准确地解决了这个问题。

第二章

运动学的经典概念

摄 动 法

怎样超越开普勒近似？怎样考虑其他行星对我们所研究行星运动的影响？通过足够精确的观测，经过足够长的时间，证明这些影响确实存在：行星的开普勒椭圆并不是固定不变的，它们有轻微的变化，转动很慢。为了说明摄动开普勒运动的概念，还是举个实例，以便证明开普勒运动与星体运动的差别还是很大的。图 2.1 表示与木星轨道平面垂直的木卫八轨迹的投影图；观测时间长达 5800 天。与开普勒运动的误差主要是由于太阳的万有引力产生的。

从牛顿到 19 世纪末，人们曾研究过其他行星对于“摄动法”要求的一颗行星运动的影响。太阳系的能量可以用和来表示；计算的能量只考虑太阳的万有引力加上行星相互引力的能量。摄动法的根据是本和的第二项小于第一项（所以，完全略去时，可得到开普勒近似结果，正如我们所见，结果并不坏）。因此，可以对开普勒近似进行连续小修正法计算行星间的相互作用，叫做零阶逼近。第一

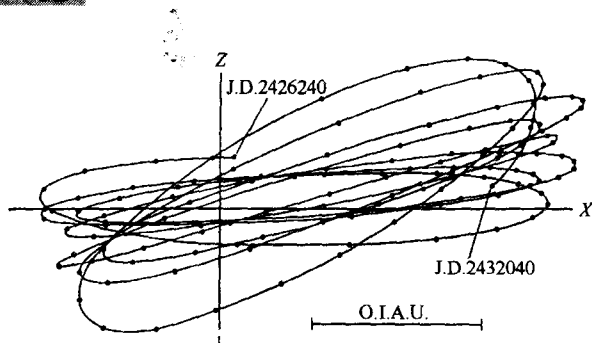


图 2.1 木星 - 卫星的运动

[J. 卡瓦列夫斯基绘制,《开普勒定律与现代天体力学》,
《天文学展望 18》(1975), P.608. 经 Elsevier Science NL,
Sara Burgerstraat 25, 1055 KV Amsterdam, Pays-Bas 批准]

次修正时,可粗略地考虑一下其他行星的作用,这是一阶逼近。然后,较准确地考虑其他行星的作用,进一步修正这种逼近,依此类推,进行连续逼近。定义椭圆位置与形状的量以和表示:零阶项(开普勒的),加一阶项,加二阶项等。牛顿的后继者们认为项取得越多,就越逼近椭圆的真实情况。另外,人们可以(原则上至少如此)将真实值与逼近值之差想取多小就取多小,用摄动法就可以达到:只要取足够的项就行了。

这种数项和表示法是项越多越逼近的方法,叫做展成级数。“级数”的数学概念概括了和的概念:在和,项数是有限的;而在级数中,项数是无限的。现举一个很简单的例子,以便说明这两种概念的主要

区别。在 $1+1+1+\cdots+1$ 和中，项数为整数 n ，和即为 n 。但在 $1+1+1+\cdots$ 级数中，项数为无限个，所以和当然不是有限的。可以说和是无限的，即无限和，其级数叫发散级数。也有有限和级数，叫收敛级数。例如，分数 $1/9$ 经展开用小数表示为 $0.1111\cdots$ ，表示级数 $1/10 + 1/100 + 1/1000 + \cdots$ 是收敛的，其和为 $1/9$ 。实际上，对收敛级数和的概念的定义是很难的。经过了几个世纪对级数的经验应用后，数学家们才发现其规律。

但是收敛问题就一劳永逸地解决了吗？项越多，计算越困难，计算往往是到头几阶就止步了：对于天文学而言，用摄动法，不用很多项，只不过所得的是近似值就是了。再以前面那个简单问题为例，实际应用时，以小数表示 $1/9$ ，小数点后二、三、四位就可以了。

运动常数与不变环面

通过历史的回顾，现在大家可以知道，摄动法不仅仅起计算方法的作用，而且对建立我们所说的经典概念的动力学也起了重要作用。与混沌的极端主义者所说的相反，混沌既没有破坏牛顿及其后继者的力学，也没有破坏摄动法。但是，它使我们发现，经典概念不能真正引出牛顿方程，它给这些方程增加一些隐式假设和过于大胆的推广。经典概念的核心是最简

单的动力系统为典型系统，其他系统的不同之处仅仅是在非主要方面更复杂一些罢了。

现在我们来详细说明。有些动力系统可以用基本的方法确切地计算相轨迹。例如，用开普勒近似法计算太阳系（行星只与太阳相互作用，不与其他行星相互作用）的方法。为了确定某个动力系统，人们首先问：为了定义其位置，需要多少个参数？所以，人们只能认为太阳是固定的，然后给出各行星的位置。对于一颗行星（近似地看作一个质点），应在三维空间中给出三个坐标；可以说它确定一个三自由度的动力系统。所以，行星相空间有六维（三个坐标加三个速度）。两颗行星自然有六个自由度，相空间有十二维。

所以，这样一个系统的总能量不随时间变化而变化，因为，直到第五章我们都不考虑摩擦：这时是一个哈密顿动力系统。这样一个系统，能量是一个运动常数。假设我们的动力系统有 N 个自由度，所以相空间有 $2N$ 维（ $2N$ 表示整数 N 乘以 2 的积）。因而，每个相轨迹是 $(2N-1)$ 维的“面”的能量守恒，运动常数的存在失去一维。但“面”这个词使人想到一个有用的面，好像一个平面，二维的。可以说，这是个任意维的数而不是一个面。为了“看”一个守恒定律的存在如何失掉一维并使相轨迹保持在 $(2N-1)$ 维的变化，试想一下一维运动（第一章）， $N=1$ 。假设能量与一点到一固定点 O 的距离成正比，能量守恒使我们的点在圆心为 O 的圆上；所以，圆是个曲