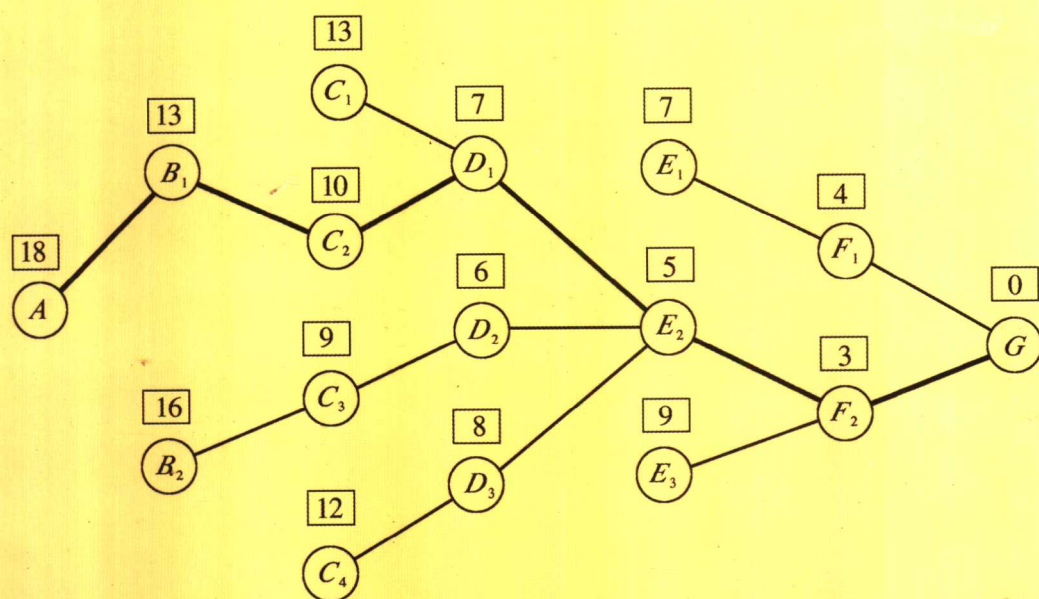


普通高等教育测绘类规划教材

数学规划 在测绘学中的应用

(修订版)

郑肇葆 编著



测绘出版社

普通高等教育测绘类规划教材

数学规划在测绘学中应用

(修订版)

郑肇葆 编著

测 绘 出 版 社

· 北 京 ·

内 容 提 要

本书以数学规划在数据处理和航空影像处理中应用为重点,介绍了线性规划,动态规划,非线性规划的理论和方法,单纯形法与遗传算法集成用于数字图像处理的理论和方法。内容上深入浅出,有算例配合,便于读者自学和理解。

本书可供高等院校测绘和遥感类专业本科生、研究生作教材使用,也可供有关的科研与工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学规划在测绘中应用/郑肇葆编著. —2 版(修订本).
北京:测绘出版社,2003.1
ISBN 7-5030-1168-8

数… Ⅱ. 郑… Ⅲ. 数学规划—应用—测绘 N.P2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007232 号

数学规划在测绘学中应用

郑肇葆 编著

*

测绘出版社出版

三河市艺苑印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16·印张 17.25·字数 383 千字

1993 年 6 月第一版·2003 年 1 月第二版第二次印刷

印数: 1501—3500·定价: 32.00 元

ISBN 7-5030-1168 8 P·381

前 言

数学规划已被国民经济各部门广泛采用,而且效果显著,在重大的决策课题中,发挥了它巨大的作用。将数学规划的理论和方法应用到测绘学中,在我国还是 80 年代的事,引用的时间虽然不长,然而最优估计的稳健性质,使这种方法应用在测量数据的粗差定位、解求病态方程中已经取得明显的效果。特别是近几年,动态规划的理论和方法在图像匹配、特征提取、模式识别等图像处理过程中,正在推广使用,效果显著。可以看出数学规划在信息学科中应用是很有潜力的,作为信息学科的测绘学当然是不能例外。编写这本教材的目的就是为了使数学规划的基本理论和方法与测绘学中的具体问题结合起来,让数学规划寻求最优解的理论在测绘学中得到更广泛的应用。

本教材包括的主要内容是:线性规划、动态规划、非线性规划以及数学规划在测绘学中应用四大部分。教材着重于基本理论和方法的阐述,引用有关定理和结论,避免数学上严密的推证。对于各种方法的算法均有较详细的推演过程,便于读者掌握计算方法。每章后附有小结和习题,供读者练习使用。本书除了介绍一些经典的方法之外,在第四章介绍了在摄影测量中经常遇到的约束条件为大型稀疏矩阵的解算方法;第十章阐述了摹矩阵的应用,这是我国秦裕瑗教授提出的“嘉量原理”理论的一部分,这个原理使多阶段寻优的问题,用摹矩阵的表达方式变得简单明了,而且很容易程序化,便于在计算机上计算。

本教材适合测绘专业的大学本科生和研究生使用。对于本科生,书中第四章、第六章、第七章中 § 7-10 以及第十章可以选读。

秦裕瑗教授、钱曾波教授审阅了本书原稿,并提出宝贵意见,编者表示衷心感谢。本书得到国家自然科学基金的资助。

这门课程在测绘专业中开设是第一次,数学规划在测绘学中应用时间还不长,加之编者水平有限,教材编写中错误难免,敬请读者、同事们、专家们批评、指正。

编 者

1991 年 12 月

修订版前言

本书自 1993 年出版以来,经过十年的教学实践、受到同事和学生们的欢迎,1995 年该书获全国高等院校测绘类优秀教材一等奖。十年来数学规划在测绘学中有了更加广泛的应用,特别是在航空影像分析与处理中应用,加之作者自 1993 年以来从事国家自然科学基金项目的研究,将数学规划的单纯形法与进化计算中遗传算法集成起来解决航空影像纹理的分类取得一定的效果。因此,决定将这些科研的成果和积累的教学经验充实到教材中去,对本书进行修订、补充。

修订版与初版书相比增加了一章——第九章,该章讲述单纯形与遗传算法集成方法的原理、算法及应用实例。介绍中仍然重在理论和方法的阐述,避免数学上严密的推证。为了配合这一章的教与学,在修订版中增加附录 D:遗传算法简介。另外,第五章中增加了第 5 节:动态规划与线性规划的关系。第七章的第 3 节中加入用线性规划方法解求摄影测量的相对定向元素和单张像片外方位元素的数学模型。第八章增加了第 7 节:图像特征匹配的动态规划方法。初版书中第九章改为第十章。与此同时,在第二、三、五章中的习题作了修改与充实。

由于编者水平有限,本书编写中不妥之处在所难免,敬请读者、同事们、专家们批评、指正。

编 者

2002 年 7 月

目 录

第一章 数学规划基础	(1)
§ 1-1 概述	(1)
§ 1-2 集合与集合符号	(2)
§ 1-3 n 维几何与集合	(4)
§ 1-4 凸集	(5)
§ 1-5 凸函数和凹函数	(7)
小结	(8)
第二章 线性规划的单纯形法	(9)
§ 2-1 概述	(9)
§ 2-2 线性规划问题的解和它的几何意义	(11)
§ 2-3 线性规划的单纯形算法	(12)
§ 2-4 线性规划单纯形法的矩阵表示和算例	(17)
§ 2-5 人工变量法	(25)
§ 2-6 线性规划应用的实例	(35)
§ 2-7 线性规划的发展	(40)
小结与习题	(42)
第三章 线性规划的对偶理论	(52)
§ 3-1 对偶问题的提出	(52)
§ 3-2 原问题与对偶问题之间的关系	(54)
§ 3-3 对偶问题的基本性质	(63)
§ 3-4 对偶单纯形法	(66)
§ 3-5 灵敏度分析	(74)
小结与习题	(79)
第四章 结束条件为大型稀疏矩阵时的解算方法	(86)
§ 4-1 大规模稀疏线性规划问题	(86)
§ 4-2 单关联线性规划的解法	(87)
§ 4-3 有界变量法	(99)
小结与习题	(105)
第五章 动态规划	(108)
§ 5-1 概述	(108)
§ 5-2 动态规划的基本概念和基本方程	(109)

§ 5-3	构成动态规划模型的条件	(115)
§ 5-4	动态规划的基本定理和函数迭代法	(117)
§ 5-5	动态规划应用的实例	(121)
§ 5-6	动态规划与线性规划的关系	(128)
	小结与习题	(136)
第六章	非线性规划	(139)
§ 6-1	概述	(139)
§ 6-2	无约束极值问题	(140)
§ 6-3	有约束极值问题	(147)
§ 6-4	用线性规划逐步逼近非线性规划的方法	(149)
	小结与习题	(155)
第七章	数学规划在测量数据处理中应用	(157)
§ 7-1	概述	(157)
§ 7-2	残差绝对值和最小平差方法的稳健性	(158)
§ 7-3	在粗差定位中的应用	(161)
§ 7-4	在水准网平差中的应用	(169)
§ 7-5	在观测方案选择中应用	(170)
§ 7-6	在病态方程求解中的应用	(174)
§ 7-7	大 M 法在粗差定位中的应用	(177)
§ 7-8	残差绝对值和最小原理的光束法区域网平差	(179)
§ 7-9	在摄影测量网优化中的应用	(181)
§ 7-10	数据处理中值得进一步研究的问题	(183)
第八章	数学规划在数字图像处理中应用	(201)
§ 8-1	概述	(201)
§ 8-2	在影像数据处理中应用	(201)
§ 8-3	在影像遮蔽区自动搜索中应用	(209)
§ 8-4	动态规划在图像边缘提取中应用	(212)
§ 8-5	动态规划在图像配准中应用	(214)
§ 8-6	动态规划在模式识别中应用	(216)
§ 8-7	图像特征匹配的动态规划方法	(219)
第九章	单纯形与遗传算法集成的优化方法	(221)
§ 9-1	单纯形的几何意义	(221)
§ 9-2	无约束最优化的单纯形法	(222)
§ 9-3	三种其它的单纯形法	(224)
§ 9-4	算例	(225)
§ 9-5	Simplex 与 GA 集成的优化方法	(230)
§ 9-6	Simplex 与 GA 集成算法的应用	(231)

小结与习题.....	(235)
第十章 摹矩阵的应用.....	(237)
§ 10-1 半域.....	(237)
§ 10-2 摹矩阵.....	(238)
§ 10-3 摹矩阵的应用.....	(243)
附录 A $E^{(i)}$ 的计算.....	(254)
附录 B 线路网络用穷举法运算次数的计算.....	(256)
附录 C 梯度与 Hesse 矩阵.....	(257)
附录 D 遗传算法简介.....	(258)
参考文献.....	(264)

第一章 数学规划基础

§ 1-1 概 述

数学规划是运筹学的一部分,它包括线性规划、非线性规划、动态规划等。早在第二次世界大战期间,英国军事管理部门邀请了一批科学家来研究与全国的空中和地面防御有关的战略与战术问题。由这些科学家组成的科学小组标志着第一次正式的运筹学活动,通过这个小组的活动,使英国作战研究小组获得可喜的成果,进而促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动。在美国小组有成效的应用中,包括复杂逻辑问题的研究,新的作战方案的发明,埋设水雷的计划以及电气设备的有效利用。

战后,工业管理家们注意到军事小组的成就,也想用来解决他们的问题。这些问题由于在商业机构中推行职能专门化而变得更加突出了。尽管最初建立专门的职能部门是为机构的整个目标服务,但是这些职能部门的个别目标常常和机构的总目标不一致,这样产生了复杂的决策问题,终于使商业机构要利用运筹学这个有效的工具。

虽然英国是运筹学这门新学科的创造者,但美国在这方面迅速取得了最快的发展速度。第一个在这方面被广泛公认的数学方法称为线性规划的单纯形法,它是1947年由美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)制定的。在这之后,线性规划在理论上趋向成熟,在实际中的应用日益广泛与深入。特别是能用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后,它的适用领域更广泛;从解决技术问题的最优化,到工业、农业、商业、交通运输业、军事的计划和管理及决策分析都可以发挥作用;从范围来看,小到一个小组的日常工作和计划的安排,大至整个部门,以至国民经济计划的最优化方案的提出,它都有用武之地。

把许多实际问题归结为线性规划问题时,其目标函数和约束条件都是自变量的线性函数。但是,还有另外一些问题,它的目标函数和约束条件很难用线性函数表达。如果目标函数或约束条件中,有一个或多个是变量的非线性函数,就称这种规划问题为非线性规划问题。解这种问题就要用非线性规划的方法。由于很多实际问题要求进一步精确化,以及电子计算机的发展,使非线性规划在近二三十年间得以长足进展。目前在最优设计、管理科学、质量控制等许多领域中都得到越来越广泛的应用。

一般说来,解非线性规划问题要比解线性规划问题困难得多。也不像线性规划有单纯形法这一通用方法,非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法,各个方法都有自己特定的适用范围。因而,这是需要人们更深入地进行研究的一个领域。

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。大约产生于50年代。1951年美国数学家贝尔曼(R. Bellman)等人,根据一类多阶段决策问题的特性,提出了解决这类问题的

“最优化原理”，并研究了许多实际问题，从而创建了解决最优化问题的一种新的方法——动态规划。他的名著《动态规划》于1957年出版，该书是动态规划的第一本著作。

动态规划的方法，在工业、经济、工程技术及军事等部门中都有广泛的应用，并且获得了显著的效果。近年来，又广泛用于最优控制方面。许多问题利用动态规划的方法去处理，常比线性规划或非线性规划更有成效。特别对于离散性问题，由于解析数学无法施展其技，而动态规划的方法，则成为解决它的一个非常有用的工具。但是，动态规划方法也存在两大弱点：一是利用“最优化原理”得出函数方程后，尚没有一种统一的处理方法，必须根据问题的各种性质结合其它数学技巧来求解。二是所谓“维数障碍”，即当问题中的状态变量个数（维数）太大时，由于计算机存储器容量和计算速度的限制而无法解决。

我国的秦裕琰教授提出的“嘉量原理”，为解决多阶段的决策问题作出贡献，应用摹矩阵方法，使多阶段的决策问题代数化，容易编成程序，由计算机完成大量的计算工作。

以上所介绍的数学规划的各类问题在国民经济各部门中的应用及所取得的效果是很明显的了，而在测绘中的应用还是80年代的事，开始在测量的数据处理中引用线性规划的单纯形法检测数据中存在的粗差，特别是当含有多个粗差时，粗差定位的效果比其它的方法更为有效。此外在摄影测量平差计算的问题中还能应用线性规划的方法改善病态方程求解的精度。近几年来动态规划在摄影测量数据处理中应用日益增加，目前已在影像特征的提取、边界影像匹配、数字影像相关、从数字立体像对提出一个地物的三维坐标等方面应用，取得确有成效的结果。数学规划中寻求最佳解、获取最优方案或对某实际生产过程寻求最优控制的方法和理论在测量中的应用还刚刚起步，在测量中更加广泛的应用，有待于从事数学规划和测量的工作者进一步开拓和研究。

§ 1-2 集合与集合符号

我们把具有某种特征的对象的全部叫做集合。最简单的对象称作元，是几何点。我们这里考虑的集合限于点集合。例如，在三维线性空间中，用有序的三个实数 (x_1, x_2, x_3) 表示“点”，在 n 维线性空间中，用有序的 n 个数 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示“点”。数组中的每个数有时称为点的分量。

通常我们用一些条件规定点的集合，例如，在某个圆内所有点是一个集合。我们可以研究二维线性空间中的位于直线 $x_1 + x_2 = 10$ 上的全部点的集合 P ，

$$P = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\} \quad (1-1)$$

式(1-1)读作“ P 是由使得 $x_1 + x_2 = 10$ 成立的全部点 (x_1, x_2) 所组成的集合”。竖线读作“使得”。竖线左方我们标记了点的一般本质或形式；竖线右方我们阐明 P 的成员所满足的限制或条件。

我们记任意点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 x 。为了指明点 x 是某集合 P 的元，写作

$$x \in P \quad (1-2)$$

式(1-2)读作“ x 是集合 P 的元”，若 x 不是集合 P 的元，写作 $x \notin P$ 。

式(1-2)给出的关系是点与集合的关系。还可以给出集合间的关系。两个集合相等是指

它们包含有相同的元。一个集合可以是另一集合的一部分。例如,集合 P 可以包含于集合 S 中。这种情况下,称 P 为 S 的子集。这种关系记为

$$P \subseteq S \quad (1-3)$$

读作“ P 为 S 的子集”。如果 P 是 S 的真子集(即在式(1-3)中 $P \neq S$),则记为

$$P \subset S$$

交集:二集合 S_1 和 S_2 的交集是一个集合,其点 x 同时是 S_1 和 S_2 的元。那么,二集合 S_1 和 S_2 的交集定义为一新集合 P ,即

$$P = \{x | x \in S_1, x \in S_2\} \quad (1-4)$$

通常把表达式(1-4)所描述的集合用下面符号表示

$$P = S_1 \cap S_2 \quad (1-5)$$

式(1-5)读作“ P 等于 S_1 和 S_2 的交集”。

式(1-5)的简单推广,可定义任意有限数目集合的交集。 n 个集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的交集写作

$$P = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n = \bigcap_{i=1}^n S_i \quad (1-6)$$

或

$$P = \{x | x \in S_1, x \in S_2, \dots, x \in S_n\} \quad (1-7)$$

并集:二集合 S_1 和 S_2 的并集是这样的全部点 x 的集合,这里 x 或是 S_1 的元或是 S_2 的元。二集合 S_1 和 S_2 的并集定义一新集合 P ,即

$$P = \{x | x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2\} \quad (1-8)$$

或

$$P = S_1 \cup S_2 \quad (1-9)$$

式(1-9)读作“ P 为 S_1 和 S_2 的并集”。 n 个集合 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的并集可定义为

$$P = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = \bigcup_{i=1}^n S_i \quad (1-10)$$

或写作

$$P = \{x | x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2 \text{ 或 } \dots \text{ 或 } x \in S_n\} \quad (1-11)$$

二集合的交集和并集的图示见图 1-1 和图 1-2。

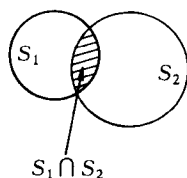


图 1-1

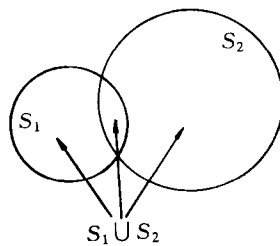


图 1-2

§ 1-3 n 维几何与集合

若我们研究全部点 (x_1, x_2) 的集合, 并给出任意两个这样的数对之间距离的定义, 则这个集合称为二维欧几里德空间, 并用 E^2 表示。若有两个点 $x_1 = (a_1, b_1)$ 和 $x_2 = (a_2, b_2)$, 则距离 d 为

$$d = [(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1-12)$$

同理, 一个三维欧几里德空间 E^3 , 其距离定义为

$$d = [(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1-13)$$

(a_1, b_1) 或 (a_1, b_1, c_1) 这样的点, 与向量一一对应。通过向量符号, 式(1-12)、式(1-13)可写为

$$d = [(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)^T]^{\frac{1}{2}} \quad (1-14)$$

这是通过两个向量的数量积表示。

定义全部有 n 个分量的点或向量的集合为一个 n 维线性空间。

我们将距离定义为

$$d = [(x - y)(x - y)^T]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-15)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 。这样的线性空间称为 n 维欧几里德空间, 记作 E^n 。

从二维空间、三维空间中的两点间的距离到 n 维空间中两点间“距离”的扩展, 启示我们, 可以将二维、三维空间中某些几何概念或图形, 作类似的扩展。

例如, E^3 中的一平面可表示为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad (1-16)$$

或

$$ax^T = b \quad (1-17)$$

这里 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ 。推广到 E^n , 下式给出

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1-18)$$

或

$$H = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid ax^T = b\} \quad (1-19)$$

的点集合称为超平面, 甚至简称为平面。其中, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。可以看出, 当 $n=3$ 时, 超平面变成了 E^3 中的平面。超平面只不过是一个点集合。

例如在 E^2 或 E^3 中, 通过两点 X_1 和 X_2 的直线是由下面的集合来表示

$$L = \{X \mid X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2\} \quad (1-20)$$

同理, 我们用上式来定义通过 E^n 中的两个点 X_1 和 X_2 的直线, 其中 λ 为任意数量。

如果我们希望定义 x_1 和 x_2 间的线段, 我们将用下式:

$$L_1 = \{x \mid x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (1-21)$$

由于当 $\lambda=1$ 时, $x=x_1$ 和当 $\lambda=0$ 时, $x=x_2$ 。

再例如,在 E^2 中以点 a 为中心, r 为半径的圆周(或球面)或圆内(或球内)概念也可推广到 E^n 中来,我们把这种圆(球)内的点所组成的集合称作 r -圆(或 r -球),还称做中心 a 的 r -邻域。

现在我们在欧几里德空间里讨论点集的“边界”的概念。若我们参考图 1-3,看到边界线包围的部分称作 S ,诸如点 a, b 或 c 是集合 S 的边界上的点,另外,点 d, e, f 则是 S 的内部点; g 则是在 S 之外。但是,需要使这个概念更严谨些。若我们考虑一个点,例如,点 d ,绕它划一个圆,若令圆的半径足够地小,全部位于这圆内部的点均是集合 S 的点。但是,若我们选择一个点,例如 b ,绕其划一个圆,无论我们使这个圆怎样小,圆内总有某些点位于集合 S 的外部,而某些点位于集合 S 之内。以这个讨论做为基础,我们作下述定义。

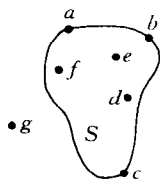


图 1-3

内点:若 x 存在一个 ϵ -邻域,它仅包含集合 S 的点,则 x 是集合 S 的内点。

边界点:若 x 的每个 ϵ -邻域,不论 ϵ 怎样小,总含有集合 S 的某些点,以及不属集合 S 的点,则点 x 是集合 S 的边界点。

开集:若集合 S 只包含内点,则说集合 S 是开的。

闭集:若集合 S 包含它的全部边界点,则说集合 S 是闭的。

边界:全部边界点组成的集合称作边界。

应注意,包含某些但不是全部边界点的集合,即不是开的,也不是闭的。

§ 1-4 凸 集

若对于集合 X_c 中的任意两个点,连接它们的线段仍位于该集合中,则集合 X_c 定义为凸集。更严谨地说,对每个点对 $x_1, x_2 \in X_c$, 集合 S_L 将为 X_c 的子集,其中 S_L 定义为

$$S_L = \{x | x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (1-22)$$

表达式 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$ 称为点 x_1 和 x_2 的凸组合。对于任意的一个 λ 值, x_1 和 x_2 的凸组合给出一个由式(1-22)定义的线段上的点。由单个点构成的集合是一个特殊情况($\lambda = 0, x = x_2$),所以依定义亦是凸的。为了方便起见,空集(不包含任何点的“集合”)规定为凸的。

在图 1-4 的图形 A, B, C 中,我们可看到,在图中或点集中,连接任何两个点的线段,完全位于图形之内。因此,这些是凸集。然而,对于图形 D, E 和 F ,可立刻看出,连接某些点对的线段,将部分地或完全地位于集合之外。因此,这些不是凸集。

平面、半平面、直线、直线段、圆面、球都是凸集。我们规定,空集合是凸的。

一个与凸集有关的重要结果如下,我们仅阐述而不证明。

定理 1-1 任意数目凸集的交集是凸集。

图 1-5 表示两凸集及其交集。

凸集同其它任何集合一样,也具有内点和边界点。凸集的边界点中,有些具有一种有意义的性质,这种点称为顶点。

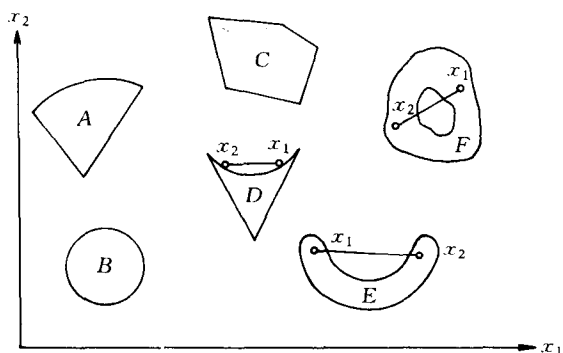


图 1-4 一些凸集和凹集的例子

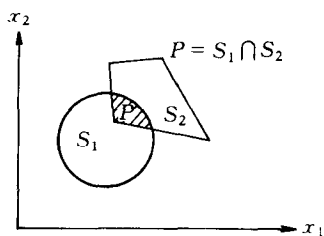


图 1-5 凸集的交集

顶点: 设 k 是凸集, $X \in k$; 若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)}, X^{(2)} \in k$ 的线性组合表示为 $\lambda X^{(1)} + (1-\lambda)X^{(2)}, (0 < \lambda < 1)$

则称 X 为 k 的一个顶点(或极点)。

上述定义的几何意义是, 一个顶点不能位于集合中连接其它两点的线段上。换言之, 一个顶点不能表示成集合中某两个不同点的凸组合。

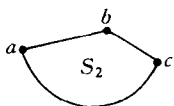
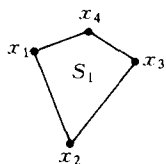


图 1-6 凸集与顶点

图 1-6 中集合 S_1 有四个顶点, 记为 x_1, x_2, x_3, x_4 。集合 S_2 有无限数目的顶点。除点 a, b, c 外, 下边界的圆弧包括有无限数目的点, 它们均为顶点。

由顶点的定义和例子, 有两个事实应该阐明: ① 顶点都是边界点, 但不是所有的边界点都是顶点; ② 内点不可能是顶点。

我们定义有限数目的凸组合如下:

有限点集 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的凸组合是

$$x = \sum_{i=1}^p a_i x_i \quad (1-23)$$

其中, $a_i \geq 0, i=1, 2, \dots, p$, 且

$$\sum_{i=1}^p a_i = 1 \quad (1-24)$$

定理 1-2 有限数目点 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的全部凸组合 S_c 是凸集。

例如, 图 1-6 中, 凸集 S_1 可以视为四个顶点 x_1, x_2, x_3, x_4 的全部凸组合的集合。

对于非凸的任意给定集合 S , 有包含 S 的凸集 C 。很明显, 有许多(有限个或无限个)包含 S 的凸集。这就导出包含 S 的“最小”凸集的概念, 定义如下:

凸包: 包含给定集合 S 作为其子集的所有凸集的交集称为 S 的凸包。

定理 1-3 有限点集的凸包是这些点的全部凸组合的集合。

有 E^2 中点 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的集合的凸包是多边形。类似地, 在 E^n 中, 有限点集的凸包为凸

多面体。

定理 1-4 凸多面体中的任意点,能够表示为凸多面体的顶点的凸组合。

§ 1-5 凸函数和凹函数

凸函数: 设 $f(x)$ 为定义在 n 维欧几里德空间 E^n 中某个凸集 R 上的函数,若对任何实数 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ 以及 R 中任意两点 x_1 和 x_2 ,恒有

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1-25)$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的凸函数。

若对每一个 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 和 $x_1 \neq x_2 \in R$ 恒有

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1-26)$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的严格凸函数。

将式(1-25)和(1-26)中不等号反向,即可得到凹函数和严格凹函数的定义。

若函数图形上两点的连线处处都不在这个函数图形的下方,它是下凸的,如图 1-7(a)所示,凹函数则是下凹的,如图 1-7(b)所示。

凸函数的性质:

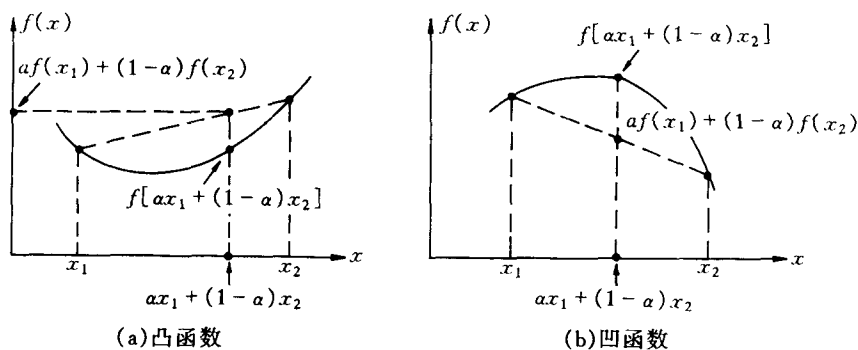


图 1-7

1. 设 $f(x)$ 为定义在凸集 R 上的凸函数,则对任意实数 $\beta \geq 0$,函数 $\beta f(x)$ 是定义在 R 上的凸函数。

2. 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义在凸集 R 上的两个凸函数,则其和 $f_1(x) + f_2(x)$ 是定义在 R 上的凸函数。

3. 设 $f(x)$ 为定义在凸集 R 上的凸函数,则对每一实数 β ,集合

$$S_\beta = \{x | x \in R, f(x) \leq \beta\} \quad (1-27)$$

是凸的。

定理 1-5 若 $f(x)$ 为定义在凸集 R 上的凸函数,则它的任一极小点就是它在 R 上的最小点(全局极小点);而且,它的所有最小点形成一个凸集。

定理 1-6 设 $f(x)$ 是定义在凸集 R 上的可微凸函数,若存在点 $x^* \in R$,使得对于所有

的 $x \in R$ 有

$$\nabla f(x^*)^T(x-x^*) \geq 0 \quad (1-28)$$

则 x^* 是 $f(x)$ 在 R 上的最小点(全局极小点)。

如果 R 是 E^n 中某一区域, $\nabla f(x^*)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 x^* 处的梯度。它可用下式表示

$$\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right)^T \quad (1-29)$$

小 结

本章介绍了本教材所应用到的一些数学基础,主要有:

1. 集合

子集: P 为 S 的子集, 记为 $P \subset S$

交集: P 为 S_1 和 S_2 的交集, 记为

$$P = S_1 \cap S_2$$

并集: P 为 S_1 和 S_2 的并集, 记为

$$P = S_1 \cup S_2$$

2. n 维几何

n 维欧几里德空间记为 E^n 。

超平面是 E^n 中满足式(1-19)的点集合。

3. 点集的概念

内点; 边界点; 开集; 闭集; 边界。

4. 凸集

凸集中的一些概念与线性规划中寻求的最优解有密切的关系, 应当很好地掌握它。

凸集; 空集; 凸集的顶点; 有限点集的凸组合; 凸包。

5. 凸函数和凹函数

凸函数与严格凸函数; 凹函数与严格凹函数; 凸函数的性质; 凸函数 $f(x)$ 在凸集 R 上的最小点的概念; 凸函数 $f(x)$ 的梯度。

第二章 线性规划的单纯形法

§ 2-1 概 述

在生产管理中经常提出如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源,以便得到最好的经济效益。现用一个实际例子说明这个问题。

例 2-1-1 今有航空摄影测量的内业队使用三种方法成图,每种方法可以制作不同比例尺的地形图,共有 6 种成品,按航测成图的工艺流程,每种图可以经过 5 种流程,每一种图在每一流程中所需工天数列在表 2-0 中,每种流程现有的年生产能力列在表的最后一列。生产一幅图所需的材料费列在表的最后一行,试问在现有生产能力的情况下,怎样分配各种成图数量的比例,使一年的出图总量最大。

表 2-0

生产流程	成图方法	综合法成图		精测仪成图			多倍仪成图	各生产流程现有的年生产能力(工天)
	图种	1:1 万像片图	小比例尺像片图	1:1 万地形图	更大比例尺地形图	高程全野外布点的测图	1:1 万地形图	
	图的数量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
电算加密		3	3	3	3	3	4	1 700
纠正		3	6	0	0	0	0	1 000
精测仪		0	0	15	15	15	0	2 500
多倍仪		0	0	0	0	0	18	2 700
清绘		0	0	15	15	15	20	4 300
材料费(元)		75	50	50	50	60	60	100 000 元

设 $x_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 表示 6 种图的最佳年产量,我们的问题是希望出图的年产量达到最大,也就是我们要达到的目标,由此列出线性规划问题的目标函数。

目标函数 $\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

出图量的增加不是靠无限地使用仪器设备的使用时间能解决问题的,因为各生产流程的年生产能力是有限的,即出图量最大必须受到各生产流程年生产能力的约束。由此我们就得到这个问题的线性规划的数学模型:

目标函数 $\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$