清华大学公共基础平台课教材

概率论与数理统计

葛余博 编

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

概率论与数理统计

葛余博 编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是依据非大学数学专业本科生“概率论与数理统计”课程的教学要求及作者在清华大学数十年的教学积累与经验编写的. 其中概率论部分包括：概率和条件概率，有等可能性的概型，事件的独立性；随机变量，随机向量与分布等基本概念；重要分布律的产生、性质及相互之间的关系，随机向量（含变量）的函数的分布；数学期望，矩与方差，两个随机变量间的协方差与相关系数；主要的极限定理、结论及应用. 数理统计部分包括：总体和样本的概念，抽样分布与统计量；参数估计（点估计，区间估计及估计量的优良标准）；正态总体和非正态总体的参数的假设检验，两个独立正态总体参数的差异性检验，非参数检验（分布拟合和秩和检验）；线性回归分析.

本书可作为高等院校非数学专业和普通师范院校数学专业的本科生教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/葛余博编. —北京：清华大学出版社，2005. 4

ISBN 7-302-10563-4

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 葛…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 013790 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
版式设计：刘祎淼
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：23.5　**字数**：482 千字
版　　次：2005 年 4 月第 1 版　2005 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-10563-4/O・447
印　　数：1～3000
定　　价：32.00 元

前言

FOREWORD

依据非数学专业本科生“概率论与数理统计”课程的教学要求，基于在清华大学数十年的教学经验，编写了这本教材．本书除供非数学专业本科生作为教材外，也可作为普通师范类院校数学系学生的教材，以及准备报考研究生的学生与工程技术人员的参考书．

随着社会科学技术的进步和研究的深入，概率论与数理统计起着越来越重要的作用．但概率论与数理统计的学习，因为其理论和方法的特殊性，长时间以来一直令学习者感到苦恼，众多的分布和繁杂的公式也常使有志者学得辛苦．

如何学好概率论与数理统计？如何提高学习效率？针对这两个问题，作者做了如下一些努力，希望本书成为读者学习和备考的好向导．

1．注意基本概念和基础理论，特别注意彼此间的内在联系和融会贯通，使学习更具启发性和主动性，从而克服较为流行的忽视基本概念和基本理论、埋头做题盲目做题的弊端．本教材强调对概念的深刻理解和相互之间的联系，使得概念和结论更容易理解和记忆——要记的其实更少了．这是高效率学习的关键之举．

2．强化基本概型和规律性，为此增加重要分布律产生的背景，从而提高模型化能力和实用中准确判断和使用分布律的能力．

3．全书分为 8 章，注意各章间的联系与综合．章内各节有精选的典型例题，各章后有习题，正文之后有习题答案．

4．为便于学习和记忆，本书将随机变量和随机向量合于一章．

5．为叙述简洁、方便，本书文中还沿用一些记号，请见本书常用符号表，并尽可能熟悉．

限于编者水平，书中的疏漏与错误之处在所难免，敬请读者批评指正．

编者于清华园

常用符号表

GENERAL NOTATION

a. e.	几乎处处(所有的)	$\Leftrightarrow$	充要条件
$\forall$	对所有的(任意的)	$\Rightarrow$	可推出(必要条件)
$\overset{\text{def}}{=\!=}$	定义为	$\sim$	服从(…分布)
$\in$	属于		

$I(x<a)$　　$I(x<a)=I_{(-\infty,a)}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$I(0<x\leqslant y)$　　$I(0<x\leqslant y)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$B(n,p)$	二项分布	$\chi^2(n)$	χ^2 分布(自由度 n)
$\mathrm{Ge}(p)$	几何分布	$F(n,m)$	F 分布(自由度 n,m)
$F(r,p)$	负二项分布	μ_k	k 阶矩(总体)
$P(\lambda)$	Poisson(泊松)分布	$\mu(=\mu_1)$	数学期望(总体)
$\mathrm{Ex}(\lambda)$	指数分布	σ^2	方差(总体)
$\Gamma(r,\lambda)$	Gamma(伽马)分布	M_k	k 阶矩(样本)
$U(a,b)$	均匀分布	$\overline{X}(=M_1)$	均值(样本)
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	S^2	方差(样本)
$t(n)$	t 分布(自由度 n)		

目录

CONTENTS

第1章

概率论的基本概念

1.1 引言

1.1.1 概率论研究的对象和任务

本书主要介绍概率论基础和数理统计的一般内容. 通过对本书的学习,能理解处理和研究随机现象的主要思想和方法,掌握一些重要的随机规律,为进一步学习随机数学和有关专业的知识及实际应用奠定坚实的基础.

概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支.

什么是随机现象? 顾名思义,它是指一个随机的、偶然的自然现象或社会现象,它和必然现象是相对的. 北京地区冬季一定下雪,是必然现象,但降雪量多少,却是随机的; 一个计算机网络上有商务信息和广告,是必然现象,而广告数量和做广告的各个企业将有多少收益、网络上访问某网站的次数、网络访问会不会遇到阻塞等也都是随机的. 一类现象,在个别实验或观测中呈现出不确定性,在大量重复实验或观测时,又具有统计规律性,我们称它是随机现象.

"天有不测风云,人有旦夕祸福",精彩地概述了随机现象无处不在,因此随机现象的研究便因普遍而重要. 天有不测风云,也有可测风云. 气象研究要涉及大量的随机的变量: 气温、气压、气流以及降雨量等,做气象预报就要观测和收集瞬息万变的数据,研究它们的变化规律,对明天及今后的天气形势做出预报. 说"不测",只是因为现在对这些随机现象的规律性,把握得还不够好. "人有旦夕祸福",正是发展各种社会保险的依据,也是生产管理、健康保健等问题中要认真统计分

析研究的课题.卫星发射能否成功,与发射系统的各个部件在发射过程中的性能参数以及部件间的连接协调是否合理可靠息息相关.一个计算机网络的服务器应有怎样的配置,除物力和财力的限制外,当然要取决于网络开放时刻用户的各类需求数量,它们显然是随机的变量.此外,某类产品的社会供求数量,股市中各上市公司的股票行情,穿过某十字路口的汽车和行人数量,一家商场在一天内销售某类商品的数量及营业额,在某公共汽车站排队候车的人数与乘客的候车时间,某地区环境污染对地区流行病的影响程度,以及对某项社会措施做计划中的民意测验会有的统计结果等等,都是随机变化的.

既然是随机的、偶然的,那么有客观的数量规律吗?我们来看一个很著名的 Galton 钉板实验.如图 1.1.1 所示,在一块平滑木板上均匀钉上几排钉子,两侧钉有护栏,下方打上隔板,将隔出的空格从左向右依次编号.将此板倾斜放置,上方置一均匀小球,可使其滚下.假设小球质量是均匀的,钉子是光滑的,并且钉子间的距离和护栏的位置,使得小球从上端落下或从上一排钉子间落下后必然碰到下一排钉子中的某一个,并且在假设的理想情况下,向右方和向左方落下的可能性一样,即各为 1/2.如此滚下的小球,最后将落入哪个格子里去呢?显然小球落入哪个格子都是可能的,我们事先并不能肯定.也就是说,结果是偶然的、随机的.但是如果仔细分析一下,根据假定的理想条件,不难发现:假如小球第一次碰钉后向右落下(其可能性为 1/2),那么第二次碰钉(第 2 排右方的钉子)后仍然向右落下(即两次都向右落下)的可能性便是 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,类似地(或说对称地),两次碰钉都是向左落下的可能性也是 1/4.而小球两次碰钉后从第 2 排中间空挡落下的可能性则是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.按照以上的方法分析第三次碰钉后从第 3 排的 4 个空挡落下的可能性,则从左到右分别为 1/8,3/8,3/8,1/8.以 4 排钉子为例,碰最后一排钉子后从 5 个空挡落下,即落入编号为 1 至 5 的 5 个格子的可能性则依次为 1/16,4/16,6/16,4/16 和 1/16.可见,表面看来是偶然性起作用的地方,确实有内在的数量规律可循.

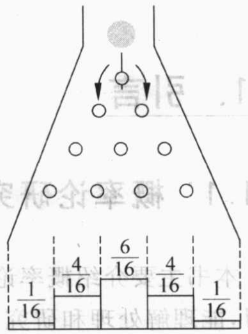


图 1.1.1　Galton 钉板实验

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的;因此可以对它进行量度.量度的数量指标就是概率.这个试验中,小球落入 5 个格子的概率依次为 1/16,4/16,6/16,4/16 和 1/16.概率论的任务就是研究和发现各种随机现象中的客观规律并掌握它们,为经济建设、社会与生产管理以及科学研究服务.

随着生产和社会经济的发展,科学研究的深入,概率论的理论和方法的研究与应用不断深入.这些进步有力地推动了工农业生产、经济和金融管理、科学技术以及军事理论和

技术的发展.同时概率论自身也在日益丰富和深入.概率论的理论和方法已渗透到许多基础学科，出现了随机分析、随机微分方程、随机运筹和随机服务系统等新兴学科，并且随机模拟和概率统计计算也应运而生.概率论的理论与方法也不断向工程等科学渗透，现已出现了随机信号处理、随机振动分析、生物统计、统计物理等边缘学科.概率论也是人工智能、信息论、控制论、随机服务系统(排队论)、可靠性理论和风险分析与决策等学科的基础.

1.1.2 概率论研究的内容

再次回到 Galton 钉板实验，我们来速写概率论的主要内容.

前面在理想条件下，就最简单的情况计算了一些事件发生的概率.本书第 1 章首先要介绍“事件”与“概率”的概念，并介绍一些简单的概率模型(概型)及如何计算事件的概率.介绍条件概率之后，引进几个重要公式.在 Galton 钉板试验中，我们把“小球落入第 2 格”、“落入后两格”等这些试验结果都称为事件.我们已经算出或者可以算出发生这些事件的可能性大小，或者称概率，例如小球落入第 2 格的概率是 4/16=0.25.

事件的概率也可通过试验得到.假如在 Galton 钉板实验中陆续滚下 100 个小球，在第 2 格你可能收集到 27 个小球，其频率 f 为 27/100.但再落下 100 个小球，在第 2 格可能只收到 20 个小球，频率 f 就变了.继续做落下 1 千个、1 万个、10 万个小球……的试验，通过试验我们会发现，与落入总球数 n 有关的频率 $f(n)$ 会越来越靠近一个常数，即当 n 趋于无穷大时 $f(n)$ 有极限值.这样，小球落在第 2 格的概率也就可用这个极限来定义.这便是概率的统计定义，这个极限存在的事实，叫频率的稳定性，将在第 4 章里给出严格证明.不难看到，利用频率稳定性，我们还可以在 Galton 钉板实验不满足理想条件(光滑和均匀)的情况下，近似求得事件的概率.

一个随机试验，例如 Galton 钉板实验中，会有许许多多事件，这些事件的刻画可以通过叫做随机变量的取值来实现.如令 X 是小球所落入格子的序号数，则“小球落入第 2 格”可用“$X=2$”来表示.假如落下 100 个小球后，五个格子收集的小球数依次是 6，27，34，23，10.于是我们可以在图 1.1.2 中画出一个实细线的频率直方图.设想板上的钉子加密，增加行数，小球数量增加而质量相应减小，并且仍然假定光滑和均匀的理想情况，我们可能得到图 1.1.2 中的一个虚线的频率直方图.而当钉子无限加密，小球质量小如一粒面粉时，频率直方图将演化成图 1.1.2 里的一条曲线，以粗线表示.这条曲线就是一种叫做正态密度的曲线.在第 2 章“随机变量及其分布”中，我们会看到，这条曲线表示随机变量的概率密度函数，准确地说是一

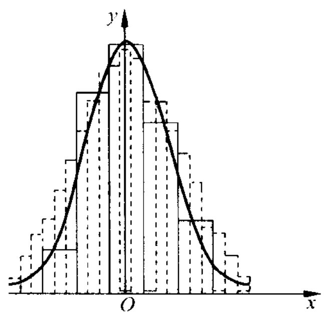


图 1.1.2 直方图极限

种叫做正态分布的密度函数的图像.随机变量的引进使得我们能借助数学分析里函数和微积分的知识,对一个随机现象的概率规律作一个总体性的描述.在第 2 章,我们还要基于随机变量分门别类地对各种重要的概率规律进行介绍和研究,同时把我们的视野扩大到多维的情形,并引入随机变量间独立性的概念.第 3 章"随机变量的数字特征"则从分布里提炼出一些重要的反映概率规律特征的数量,并研究它们.例如,刻画小球落点按概率加权的平均位置(数学期望),以及离开平均位置的一种波动情况(方差)等.第 4 章"极限定理"研究随机变量和的极限问题,给出"频率稳定性"和上面提到的直方图的极限为正态密度曲线的依据.这些是概率论基础的主要内容.

本书第 1 章为初步,第 2 章、第 3 章是重点,而第 4 章是研究的深入. 以上便是概率论基础的主要内容的一个"速写".其后 3 章是数理统计,介绍利用抽样得到的数据,基于概率论基础和抽样分布,作统计分析和推断:估计分布类型、参数以及对它们的检验.以上是概率论与数理统计课程的全部内容,可以在一个学期内以每周 3 学时完成教学。第 8 章"回归分析"是一些生产与经济管理以及生物生态等专业常常选学的内容.

1.2 事件与概率

1.2.1 事件

研究随机现象,当然要考察随机现象里出现的事件.下面先用随机试验的概念来引入事件的概念,然后用集合论知识给出事件的严谨定义(定义 1.2.1),初学者可先略去这一严谨定义,而理解为随机试验的结果.

Galton 钉板实验是一个随机试验.抛一枚硬币看它落地时是否正面朝上,在一批产品中随机抽取 10 个产品时抽到正品的次数,考察某厂流水线上电视机的寿命等,都是在做随机试验.一般地,一个试验,如果在一定条件下可重复,试验的结果不止一个,并且每次试验时,我们不能肯定是哪一个结果出现,这样的试验称为**随机试验**.随机试验里最基本的不能再分解的结果叫做基本结果.基本结果也叫做**基本事件**.由若干基本结果组成的集合,我们称之为**复合事件**.基本事件和复合事件,泛称**事件**.特别地,由所有基本结果组成的事件,我们称之为**必然事件**.它的反面,也认为是一个事件,就是**不可能事件**.称所有事件的全体为**事件体**.必然事件、不可能事件及事件体分别记为 Ω,$\varnothing$ 及 $\mathscr{F}$.

例 1.2.1 在有两排钉子的 Galton 钉板实验中基本结果只有 3 个:小球落入第 1 格、第 2 格及第 3 格.它们都是基本事件.但"小球落入前两格"、"小球落入奇数格"就是复合事件.特别地,事件"小球落入第 1 至第 3 格"是必然事件.它的反面,"小球不落入第 1 至第 3 格"就是不可能事件.

如果用$\{\omega_i\}$表示事件"小球落入第i格",$i=1,2,3$.那么例1.2.1中基本事件为$\{\omega_1\}$,$\{\omega_2\}$,$\{\omega_3\}$,而必然事件就是$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$."小球落入前两格"这一事件可写为$\{\omega_1,\omega_2\}$,此时事件体为

$$\mathscr{F}=\{\Omega,\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\{\omega_2,\omega_3\}\}. \tag{1.2.1}$$

我们看到Ω是一个非空点集,事件是Ω的一个子集,事件体由Ω的子集组成,是集合的集合.上例中Ω是一个有限的点集,事件体可以全部列出来.而在考察电视机寿命时,Ω就是一个无限的点集了,它常是一个实数区间.这时事件和事件体$\mathscr{F}$如何表示呢?能不能仍然借助集合论的概念来刻画?

现在就来利用抽象的集合论的概念,严格定义一般的事件和事件体$\mathscr{F}$.现实中的随机试验中的事件和事件体$\mathscr{F}$都可以用它们来解释.

定义 1.2.1 设$\mathscr{F}$是一个抽象的非空点集Ω的一些子集组成的集合,满足

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$.

(2) 若$A\in\mathscr{F}$,则$\overline{A}\stackrel{\text{def}}{=}\Omega-A\in\mathscr{F}$.

(3) 若$A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

则称$\mathscr{F}$为事件体.称$\mathscr{F}$中的每一元素(点)为**事件**,Ω为**必然事件**,事件$\overline{A}$为A的**逆事件**.空集$\varnothing$也为事件,称为**不可能事件**.

今后我们一般用大写英文字母表示事件.请注意:事件是Ω(也称为样本空间)的子集,是事件体的元素(点),因此对任一事件A,有$A\subset\Omega$,而$A\in\mathscr{F}$.由下面关于事件体性质的定理,说明如上定义的事件体$\mathscr{F}$,对有限次和可列(无穷)多次(这两种情况常合称为"**至多可列次**")的集合的并、交及求余运算是封闭的.所谓可列无穷多是指像正整数那样可以依某种规则一个个列出的无穷多.常用$i=1,2,\cdots,(n)$,表示至多可列多个.

定理 1.2.1 (1) $\varnothing\in\mathscr{F}$.

(2) 如$A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots,n$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

(3) 如至多可列个$A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots,(n)$,则至多可列次的交集$\bigcap\limits_{i}A_i\in\mathscr{F}$.

(4) 如$A,B\in\mathscr{F}$,则$A-B\stackrel{\text{def}}{=}A\cap\overline{B}\in\mathscr{F}$.

证明 由定义1.2.1之(1)及(2)知$\varnothing=\overline{\Omega}\in\mathscr{F}$,即本定理的(1)真.令$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则由定义1.2.1之(3)可推出(2).下面证明定义1.2.1之(3).由定义1.2.1之(2)知$\overline{A}_i\in\mathscr{F}$,由可列并的封闭性(3)或有限多次并的封闭性(2),知$\bigcup\limits_{i}\overline{A}_i\in\mathscr{F}$,且再由(2),其逆也为事件.从而由集合运算的对偶原理,

$$\bigcap_i A_i=\bigcap_i\overline{\overline{A}}_i=\overline{\bigcup_i\overline{A}_i}\in\mathscr{F}.$$

从而证得(3).由(2)及(3),立得(4). □

下面带有*号的注,初学者可先略过.

注 1*　在集合论中，由集合组成的集合，叫做**类**，满足条件定义 1.2.1 之(1)至(3)的类叫做 **σ 代数**. 因此事件体 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数. 当 $\Omega=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$时，如果定义类 $\mathscr{L}=\{(-\infty,x]: x\in\mathbb{R}\}$，并将 $\mathscr{L}$ 中所有元素(它是一个半开半闭的无限区间)经过至多可列次并、交、求余运算所得到的全部集合记为新的类 $\mathscr{B}$. 容易验证它是一个 σ 代数，也说它是由 $\mathscr{L}$ 产生的 σ 代数，并特别称为**博雷尔**(Borel)**集类**. 如果用 O 表 $\mathbb{R}$ 中所有开区间全体，F 表 $\mathbb{R}$ 中所有闭区间全体，则可以证明，O 或 F 产生的 σ 代数也是 $\mathscr{B}$，详细证明请见参考书[10]或[11].

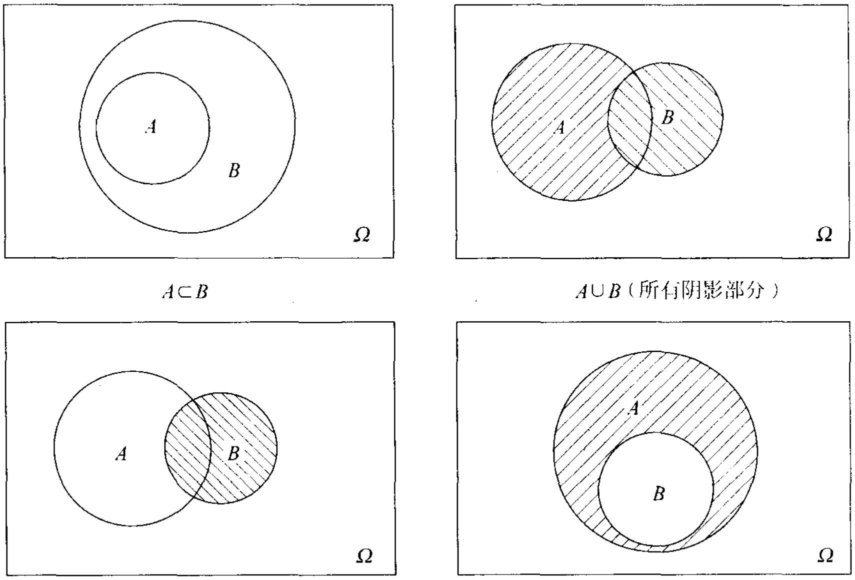
根据上面的定义，现实里随机试验中的事件可以抽象为某个点集. 例如在例 1.2.1 中取 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，单点集$\{\omega_i\}$表示基本事件："小球落入第 i 格"，$i=1,2,3$. Ω 的子集$\{\omega_1,\omega_2\}$表示事件"小球落入前两格"或"不落在第 3 格". 取事件体 $\mathscr{F}$ 为集合(1.2.1)，就包容了这个试验中的所有事件. 而在考察电视机使用寿命时，可取 $\Omega=[0,\infty)$，事件"使用寿命超过 400h 而不超过 900h"如记为 A，则可写为 $A=(400,900]$. 而事件"使用寿命超过 1000h"则可写为 $B=(1000,\infty)$等，这里取小时(h)为单位. 一般地，它是一个实数区间. 事件体 $\mathscr{F}$ 对至多可列次的集合运算：并、交及求余都是封闭的，因此事件体 $\mathscr{F}$ 应该包括所有的非负的实数区间，以及包括由这些实数区间做至多可列次的集合运算(并、交及求余)所得到的集合. 并且事件体 $\mathscr{F}$ 也就是由这些集合所组成就够了，就足以刻画所有的事件了. 这样，定义里给出的事件体，就确实可以看成现实中一个随机试验的所有可能的结果，即是所有的事件的全体.

现在我们用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算. 集合 A,B 求交的运算符号$\cap$常省略不写，即 $AB\overset{\text{def}}{=}A\cap B$. 在例 1.2.1 中，如果事件"小球落入前两格"记为 A，"小球落入第偶数格"记为 B. 那么在钉板入口处让一个小球落下，假如落入第 1 格，那么我们就可以说事件 A 出现了. 当然也可说事件 B 未出现，用集合论中的表示法分别记为 $\omega_1\in A$ 和 $\omega_1\notin B$. 当然也有 $\omega_1\in A\bar{B}=A-B$. 如果落下的小球进入第 2 格，则 $\omega_2\in A\cap B=AB$，即此时事件 A 和 B 同时发生了. 这样我们可以在集合间的关系和运算与事件间的关系和运算之间建立对应，见表 1.2.1.

表　1.2.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件 A 发生
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生
$A\cup B$ 或 $A+B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$\bigcup\limits_i A_i$	事件 A_i 中至少有一个发生
$A\cap B$ 或 AB	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bigcap\limits_i A_i$	所有事件 A_i 都同时发生
$A\backslash B$ 或 $A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生

事件的关系和运算可用图 1.2.1 表示，这种图叫 Ven 图. 常称 $A\cup B$（简写为 $A+B$）为 A 与 B 的**和事件**，而称 AB 为**积事件**. 如果 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互斥**，或**不相容**，有时也说**不相交**. 如 $A_iA_j=\varnothing$，$\forall\, i\neq j$，则说**诸事件 A_i 两两不交**，此时将 $\bigcup\limits_i A_i$ 专记为 $\sum\limits_i A_i$.



$A\subset B$　　$A\cup B$（所有阴影部分）

AB（较浅的阴影部分）　　$A-B$

图 1.2.1　事件的关系和运算

至此，我们已经完成利用集合论给出概率论中事件的严谨定义. 所谓事件体是空间有一定条件的某些子集的集合，它对至多可列次的集合运算（并、交和求余）都是封闭的. 此外也完成了利用集合论中集合间的关系和运算来刻画概率论中事件间的关系和运算. 于是事件间的运算有结合律、交换律和分布律，也有对偶原理：

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i.$$

例 1.2.2　设 $\Omega=\{\omega\mid 0\leqslant\omega\leqslant 2\}$，$A=\left\{\omega\,\middle|\,\frac{1}{2}<\omega\leqslant 1\right\}$，$B=\left\{\omega\,\middle|\,\frac{1}{4}\leqslant\omega<\frac{3}{2}\right\}$.

（1）试具体写出下列各事件：$\overline{A}B$，$\overline{A}\cup B$ 及 $A\cup\overline{B}$.

（2）下列两命题是否成立：①$\overline{A}B=A\cup B$；②$\overline{A}B+\overline{B}=\overline{A}$.

解　注意，本题的空间 Ω 实际上为实数区间$[0,2]$，且有 $A\subset B$.

（1）$\overline{A}B=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$，　$\overline{A}\cup B=\Omega=[0,2]$.

由对偶原理可知

$$A \cup \bar{B} = \overline{\bar{A}B} = \Omega - \bar{A}B = \left[0,\frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2},1\right] \cup \left[\frac{3}{2},2\right].$$

(2) 由 $A \subset B$ 可知,$A \cup B = B \neq B - A = \bar{A}B$,因此①不成立.

由 $A \subset B$ 知,有 $\bar{A} \supset \bar{B}$,因此 $\bar{A}\,\bar{B} = \bar{B}$. 于是

$$\bar{A}B + \bar{B} = \bar{A}B + \bar{A}\,\bar{B} = \bar{A},$$

因此②成立.

1.2.2 概率

我们常说"这事有百分之百把握"、"那事有七成把握"等,都是用 0 到 1 之间的一个实数来表示事件发生的可能性的大小. 因此事件的概率值可以看成以事件(用集合论的语言,就是集合)为自变量的一个函数值,它们在[0,1]之中. 严格的定义如下.

定义 1.2.2 设 P 是在事件体 $\mathscr{F}$ 上定义的实值集函数,满足

(1) 非负性: $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性: 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$,且两两不交,即 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j$,便有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

则称 P 为定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度**,简称**概率**. 称 $P(A)$ 是**事件 A 的概率**.

若 $P(A)=0$,称 A 为几乎不可能事件; 若 $P(A)=1$,称 A 为几乎必然事件. 由于我们关心的是概率,因此今后对几乎必然事件与 Ω,及几乎不可能事件与 $\varnothing$ 都不作区分.

注 2* 下面来看熟知的"长度"的概念. 一个区间的"长度",或更一般的,一个实数点的集合 A 的"长度"是非负的集函数,用 $L(A)$ 表示.

令 $\Omega = [0,1), A_1 = [0,1/2)$,对 $n > 1, A_n = [1-1/2^{n-1}, 1-1/2^n)$. 易知 $L(A_n) = 1/2^n$,注意诸 A_n 不交,且 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1)$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 = L[0,1),$$

因此 $L\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L(A_n)$,这就是可列可加性. 可见作为一个度量的尺度的概念,应该有可列可加性. 更一般地,一个 σ 代数上的"测度"定义为非负的有可列可加性的集函数.

从而$\Omega=[0,1]$上的长度(因为一个点的长度为0,因此$[0,1)$和$[0,1]$在讨论长度时不作区别),也就可看成规范化($L(\Omega)=1$)的测度,从而$[0,1]$上的长度测度也可视为$\Omega=[0,1]$上的概率测度.

一个长度为0的集合的任何子集,也可认为都有长度0.由于这些子集不一定是博雷尔集,这样我们把在$\mathscr{B}$上定义的长度测度扩展了.扩展了的长度测度叫做勒贝格(Lebesque)测度,这种方法叫测度扩张,也叫测度的完备化.概率测度也常仿此扩张而成为完备化测度,详见参考文献[10]或[11].

我们知道概率应该是刻画事件发生的可能性大小的数量指标.现在这样定义的概率,确实能够担当起这个角色吗?比如说,不可能事件的概率应该为0,又比如说,事件B如果包容了事件A,即事件A发生必然导致事件B发生,那么$P(A)$应该不大于$P(B)$等.下面证明这样定义的概率确实能够保证这些事实仍然是正确的.作为刻画事件发生的可能性大小的数量指标的概率,所有应有的结论,只要定义1.2.2中规定的条件满足,就都得到了保证.

定理1.2.2(概率的性质) 设P是事件体$\mathscr{F}$上的概率,则满足

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性:设$A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots,n$,且两两不交,则$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(3) 设$A\in\mathscr{F}$,则$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 单调性:如果$A\subset B$,则$P(A)\leqslant P(B)$.

(5) 连续性:设$A_i(\in\mathscr{F})$单调,即$A_i\subset A_{i+1}$或$A_i\supset A_{i+1}$,$i=1,2,\cdots$,此时分别定义$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$或$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

证明 (1) 由P的可列可加性及规范性,有

$$\begin{aligned}1=P(\Omega)&=P(\Omega+\varnothing+\varnothing+\cdots)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\\&=1+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\end{aligned}$$

故$P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots=0$,注意$P(\varnothing)\geqslant 0$,这样只能有$P(\varnothing)=0$.

(2) 仿定理1.2.1(2)的证明,令$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则由可列可加性(2)及已证得的$P(\varnothing)=0$可推出(2).

(3) 设$A\in\mathscr{F}$.由$A+\overline{A}=\Omega$,有限可加性及规范性(2),易得$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 由$A\subset B$知可写$B=A+B\overline{A}$,则由有限可加性及$P(B\overline{A})\geqslant 0$得$P(A)\leqslant P(B)$.

(5) 仅对单调非降列证明P的连续性,对于单调非升列可类似证明.

设$A_i\subset A_{i+1}$,$i=1,2,\cdots$,此时定义